

# 「畫」說分數倍

許嘉凌<sup>1</sup> 劉曼麗<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> 高雄市立勝利國民小學

<sup>2</sup> 國立屏東教育大學 數理教育研究所

## 壹、前言

在國小的數學課程中，「分數」向來是備受重視的主題之一。而九年一貫數學領域課程綱要中也特別指出，學生在小學畢業前，要能熟練小數與分數的四則計算（教育部，2003）。此外，分數概念與小數、百分率、比、除法等概念關係密切，這些概念不但是數學中的重要概念，且在國小數學教材中佔有相當份量（教育部，1993）。自從筆者（第一作者）教授國小高年級數學課後，更深深的感受到學生對於分數的運算常感到迷惑與無助，特別是學到了六年級課程中「分數乘除的綜合問題」時最為明顯。例如：「過年時，哥哥的壓歲錢是弟弟的 $\frac{5}{8}$ ，哥哥的壓歲錢是姐姐的 $\frac{4}{5}$ 。已知姐姐一共領了 6000 元的壓歲錢，請問弟弟的壓歲錢有多少？」學生通常能夠理解題目出現「 $\frac{5}{8}$ 」、「 $\frac{4}{5}$ 」是兩者數量關係的表示。但究竟該用乘法還是除法，卻常常發生錯誤。如：哥哥的錢究竟是「姊姊的錢 $\times\frac{4}{5}$ 」還是「姊姊的錢

$\div\frac{4}{5}$ 」？又弟弟的錢是「哥哥的錢 $\times\frac{5}{8}$ 」

還是「哥哥的錢 $\div\frac{5}{8}$ 」？又如「弟弟的壓

歲錢是姐姐的 $\frac{5}{8}$ ，哥哥的壓歲錢是姐姐

的 $\frac{4}{5}$ 。已知哥哥一共領了 6400 元的壓歲




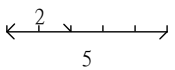
錢，請問弟弟的壓歲錢有多少？」情況又不同了。像這一類型的題目非常多，若學生不是真正的理解，只要題目稍加變化，就很容易搞混。因此，引導學生回到分數的圖形表徵來思考題目各數量的關係。從中察覺出「部分」與「全體」兩者之間的關係。不論是由「部分」求「全體」，還是由「全體」求「部分」，透過圖形表徵先協助學生掌握題意，學生才有做下去的勇氣。所以學生能畫出一個代表分數的表徵圖形是很重要的第一步。本文便以「畫」分數為教學核心，與學生一起來探討「部分」與「全體」的關係。

## 貳、分數的圖型表徵

在國小數學課程裡，第一次接觸到分數便是從圖形開始。我們知道，當一塊披薩平均切成 4 片後，弟弟吃了其中的 1 片，

\*為本文通訊作者

也就代表著弟弟吃了  $\frac{1}{4}$  塊披薩。圖形如

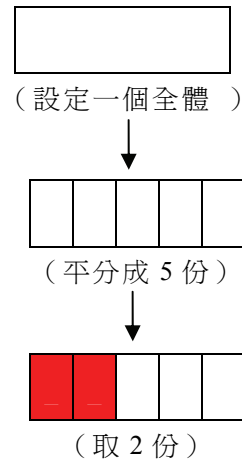
右：。此分數  $\frac{1}{4}$  中，分母「4」表示一塊披薩被平分成 4 片；分子「1」表示弟弟吃掉了 1 片。若用「部分」與「全體」的觀念來看，「4」代表著全體，也就是一塊披薩；而「1」代表著部分，也就是弟弟吃掉的部分，而「 $\frac{1}{4}$ 」代表著部分與全體的關係。像這樣利用圖形來表徵分數的意義，對國小學童來說是再熟悉不過的事。而筆者便是從這樣的觀點出發，來幫助學生對於「部分」與「全體」的關係做進一步的理解。例如：我們可以用  來表徵  $\frac{2}{5}$  塊披薩，用  來表徵  $\frac{2}{5}$  瓶水；用  來表徵  $\frac{2}{5}$  條繩子。若進一步以「關係」來看，這三個例子皆可表示圖色部分是全體的  $\frac{2}{5}$ 。所以，當我們想要表示兩種量之間的關係時，只要學生能畫出類似的圖形，都可以成爲我們教學素材。有了表徵分數的圖形之後，接著我們就要進一步來探討這個圖形中所隱藏的訊息。

## 參、「畫」說分數倍的意義

### 一、「畫」分數

當學生開始著手進行分數表徵圖形

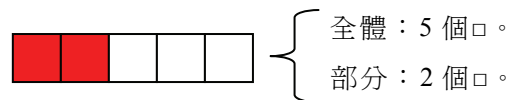
時，心裡面會產生一個全體的圖形。例如：一個圓、一個矩形、一條線段、...等等。將圖形平分成若干份後，再從中選取幾份，這就是學生所認知的分數意義。以  $\frac{2}{5}$  爲例：



塗色部分所代表的量就是原來全體的  $\frac{2}{5}$ 。

### 二、「一等分」的重要


當學生在進行「畫」分數的歷程時，「一等分」的概念便會在腦中自然形成，而究竟「一等分有多少？」就是我們教學的「核心」所在。以下圖爲例



我們將「部分」、「全體」的抽象概念，利用圖形表徵以轉化成「一等分」的倍數問題。因此，不論是「部分」或是「全體」的量，在表徵圖形裡面，都變成「一等分」的整數倍。透過這樣的關係，學生可以具體的掌握所謂的「部分」與「全體」的量是透過「一等分」的量累加而得，便能進行有意義的數學解題。

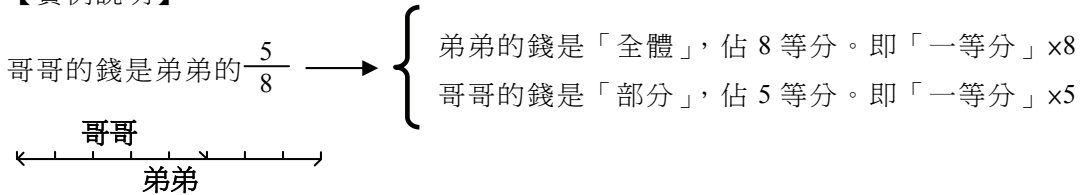
### 三、「一等分」與「部分」和「全體」的關係

根據上面的說明，我們知道掌握了「一等分」的量，就能任意的組合出我們想要表示的分數，進而得到「部分」或「全體」的量。

以右圖的表徵圖形為例：

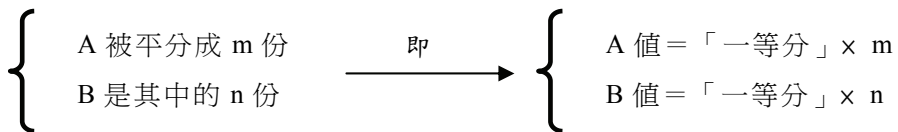
我們可以知道「5」代表全體，是5個「一等分」的組合。「2」代表部分，是2個「一等分」的組合。換句話說，全體就是「一等分」的5倍，部分就是「一等分」的2倍。所以，只要知道了每一等分所代表的量為何，我們就能知道「部分」和「全體」所代表的量了。

#### 【實例說明】



### 四、「部分」、「全體」和「每一等分」三者之間的關係

若我們知道 B 是 A 的  $\frac{n}{m}$ ，則



所以，最重要的問題是我們必須知道「一等分」的量是多少。根據已知條件的不同，我們分成「已知部分量求全體量」和「已知全體量求部分量」兩種情形說明：

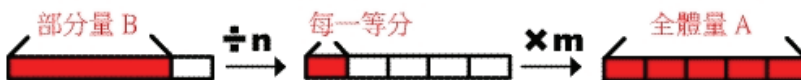
1. 若已知部分 B 是 x 單位，求全體 A：

(1) 因為 B 是「一等分」的 n 倍，所以「一等分」= (x÷n)

(2) 又 A 是「一等分」的 m 倍，所以 A = (x÷n) × m

【下圖均是以 n=4，m=5 來說明三者之間的關係】

若 B 是 A 的  $\frac{4}{5}$ ，已知 B，求 A？



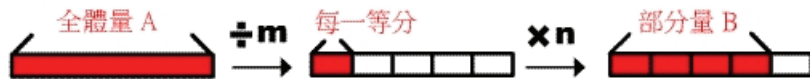
2. 若已知全體 A 是 y 單位，求部分 B：

(1) 因為 A 是「一等分」的 m 倍，所以「一等分」= (y÷m) 單位

(2) 又 B 是「一等分」的 n 倍，所以 B = (y÷m) × n

【下圖是以 n=4，m=5 來說明之間的關係】

若 B 是 A 的  $\frac{4}{5}$ ，已知 A，求 B？



在此，教師要特別強調，不論是上述的哪一種情況，最重要的媒介就是「一等分」所代表的量。一旦知道「一等分」的量，就能將「部分」與「全體」的關係建立一條相通的道路。

## 肆、「畫」說分數倍的題型分析

一、探討兩量的關係（A 表全體，B 表部分）

問題題型：

B 是 A 的  $\frac{n}{m}$

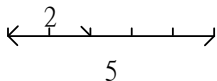
題型一（部分求全體）：已知 B，求 A = ？

題型二（全體求部分）：已知 A，求 B = ？

題型一之教學流程：

【佈題】哥哥的錢是弟弟的  $\frac{2}{5}$ 。已知哥哥有 900 元，請問弟弟有多少錢？

【教學流程與關鍵問話】

1. 師：畫出一個可以代表「 $\frac{2}{5}$ 」的圖形。例如：

2. 師：圖形中 2 和 5 分別代表什麼意思？

生：哥哥的錢是 2 等分，弟弟的錢是 5 等分。

3. 師：900 元是幾等分？

生：2 等分。

4. 師：那我們要怎麼算出「一等分」代表多少錢呢？

生：900÷2=450（元）。

5. 師：弟弟的錢是 5 等分，所以弟弟是？

生：450×5=2250（元）。

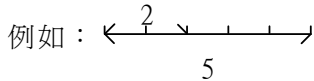
## 題型二之教學流程：

【佈題】哥哥的錢是弟弟的 $\frac{2}{5}$ 。已知弟弟

有 2250 元，請問哥哥有多少錢？

### 【教學流程與關鍵問話】

1. 師：畫出一個可以代表「 $\frac{2}{5}$ 」的圖形。

例如：

2. 師：圖形中 2 和 5 分別代表什麼意思？

生：哥哥的錢是 2 等分，弟弟的錢是 5 等分。

3. 師：2250 元是幾等分？

生：5 等分。

4. 師：那我們要怎麼算出「一等分」代表多少錢呢？

生： $2250 \div 5 = 450$ （元）。

5. 師：哥哥的錢是 2 等分，所以哥哥是？

生： $450 \times 2 = 900$ （元）。

兩量的關係探討結束後，再回到前言中我們所關心的問題。「過年時，哥哥的壓

歲錢是弟弟的 $\frac{5}{8}$ ，哥哥的壓歲錢是姐姐的

$\frac{4}{5}$ 。已知姐姐一共領了 6000 元的壓歲

錢，請問弟弟的壓歲錢有多少？」。題目

中，我們從哥哥的壓歲錢是弟弟的 $\frac{5}{8}$ 中看

到了哥哥與弟弟的關係，再從哥哥的壓歲

錢是姐姐的 $\frac{4}{5}$ 看到了哥哥和姐姐的關

係。過程中重複出現的哥哥便是將前後兩

種關係串起來的重要關鍵。換句話說，三量的關係，我們可以將之分解成兩個兩量關係來進行討論。

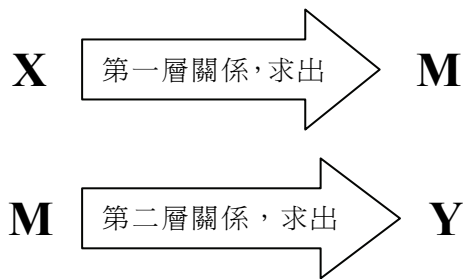
## 二、三量關係的探討

### 1. 三量的角色分析

X：已知

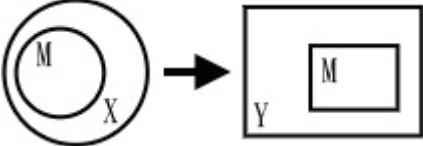
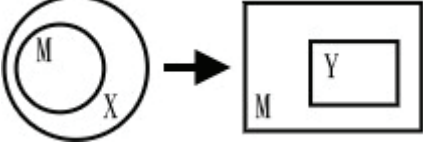
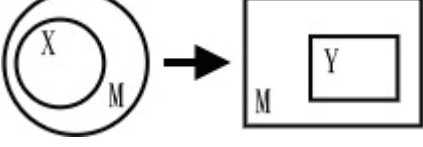
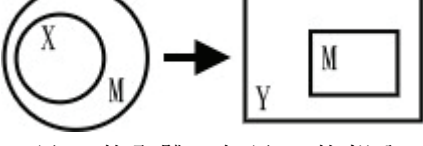
Y：欲求

M：中間媒介



解題的路徑從 X 為起點，先透過第一層關係求出 M。再從 M 透過第二層關係求出我們所要找的答案 Y。從這兩層關係的思考，便能將 X、M、Y 三量之間的關係作連結。而在第一層關係裡，X 可能是 M 的部分或全體兩種，而在第二層關係裡，M 也可能是 Y 的部分或全體兩種。因此，在第一層關係的題目可分成「全體求部分」和「部分求全體」，而在第二層關係的題目也可分成「全體求部分」和「部分求全體」。而由這兩個兩量關係所形成的三量關係的題目便可分成「先全體求部分再部分求全體」、「先全體求部分再全體求部分」、「先部分求全體再全體求部分」、「先部分求全體再部分求全體」等四類題型，將此四類題型整理如表 1。

表 1 四類題型之內涵說明表

	圖示三量的關係	第一層關係 (X 求 M)	第二層關係 (M 求 Y)
題型一	 <p>M 是 X 的部分，也是 Y 的部分</p>	全體求部分	部分求全體
題型二	 <p>M 是 X 的部分，但是 Y 的全體</p>	全體求部分	全體求部分
題型三	 <p>M 是 X 的全體，也是 Y 的全體</p>	部分求全體	全體求部分
題型四	 <p>M 是 X 的全體，但是 Y 的部分</p>	部分求全體	部分求全體

以先前我們所提到的問題來說明「過年時，哥哥的壓歲錢是弟弟的 $\frac{5}{8}$ ，哥哥的壓歲錢是姐姐的 $\frac{4}{5}$ 。已知姐姐一共領了 6000 元的壓歲錢，請問弟弟的壓歲錢有多少？」



是屬於題型一的題目。所以我們可以用  $6000 \div 5 \times 4 = 4800$  先求出哥哥的錢，再用  $4800 \div 5 \times 8 = 7680$  即可求得弟弟的錢。所以，有了題型架構之後，老師就很容易掌握整個佈題的原則，並依循這樣的模式分類來佈題。在此，我們將每類題型所搭配的文字結構再整理如表 2，以供老師作為使用時的參考。

表 2 四類題型之文字結構說明表

	圖 示 關 係	文 字 結 構 ( $a > b$ 且 $c > d$ )	問 題 舉 例
題 型 一		M 是 X 的 $\frac{b}{a}$ ，M 是 Y 的 $\frac{d}{c}$ 。已知 X，求 Y？	弟弟的錢是哥哥的 $\frac{5}{8}$ ，弟弟的錢是姐姐的 $\frac{4}{5}$ 。已知哥哥有 4800 元，求姐姐有多少錢？
題 型 二		M 是 X 的 $\frac{b}{a}$ ，Y 是 M 的 $\frac{d}{c}$ 。已知 X，求 Y？	弟弟的錢是哥哥的 $\frac{5}{8}$ ，姐姐的錢是弟弟的 $\frac{4}{5}$ 。已知哥哥有 4800 元，求姐姐有多少錢？
題 型 三		X 是 M 的 $\frac{b}{a}$ ，Y 是 M 的 $\frac{d}{c}$ 。已知 X，求 Y？	哥哥的錢是弟弟的 $\frac{5}{8}$ ，姐姐的錢是弟弟的 $\frac{4}{5}$ 。已知哥哥有 4800 元，求姐姐有多少錢？
題 型 四		X 是 M 的 $\frac{b}{a}$ ，M 是 Y 的 $\frac{d}{c}$ 。已知 X，求 Y？	哥哥的錢是弟弟的 $\frac{5}{8}$ ，弟弟的錢是姐姐的 $\frac{4}{5}$ 。已知哥哥有 4800 元，求姐姐有多少錢？

## 伍、結語

「分數」一直是國小學童最容易產生混淆的一個關鍵課程，但卻也是銜接國中數學概念的一個重要起點。我們認為，像這一類型的應用問題，與其制式化的讓學生利用「分數的乘除」來進行解題，倒不如在背公式之前，利用「畫」說分數倍進行教學，讓學生先了解「部分」與「全體」之間的關係與數學語言的意義。以能精確掌握兩個數量之間的關係，進而到複雜的三個數量之間的關係。這一系列的問題也

是高年級學生進入國中代數前的暖身活動，也就是進入代數符號運作階段的前奏。不僅可讓高年級學生能精確的掌握數量之間的關係，更是國中代數的一個重要的基礎。

## 參考文獻

- 教育部(1993)。國民小學課程標準。臺北：台捷國際文化。
- 教育部(2003)。九年一貫數學學習領域課程綱要。教育部網站。