第三章　研究方法

本研究係採質與量兼併的方式進行幾何證明閱讀理解的分析，希望透過調查研究法探討中學生在幾何證明閱讀理解的表現，以及瞭解知識和邏輯推理因素對於此表現的解釋力。另一方面，也希望透過訪談研究法對於學生評析幾何論證的認知特徵作進一步的探討。由於文獻上尚未出現對於幾何證明閱讀理解的因素關係或預測模式的研究，擬先透過前置研究來探討幾何證明閱讀理解的面向與發展評量工具，再利用閱讀理解表現作為依變項和各因素所形成的獨立變項，以統計分析方法來估計和檢驗一個幾何證明閱讀理解之預測模式。在質性研究的設計上，則以主題式的訪談為主，經由研究者的詮釋分析來探討學生對於幾何證明有效性之評析的思維特徵。最後，整合質與量的分析結果來建構中學生對幾何證明閱讀理解的模式。

本章就研究理念、研究設計、研究工具、研究方法和樣本、研究過程、研究貢獻與研究限制等七節說明本研究之研究方法。

第一節 研究理念

關於數學論證的教育研究，多數以建構數學證明作為研究的主體。不同於以往，本研究企圖從閱讀理解的角度切入，探討數學證明的認知與學習問題。為了說明此觀點的立論基礎，研究者先就教學活動和語言學習來描述本研究對於數學與數學理解所抱持的觀點。至於有關數學教育研究的理念，則以研究的核心元素、意義探討、和理論化取向等來說明本研究的定位。

一、數學與數學理解

數學可視為一種人類的活動，而學習數學也可視為一種再創造的過程(Freudenthal, 1973)。雖然將數學視為一種人類活動，非常不同於將數學視為把印在書上的成品重印在腦裡，但書上的成品卻也是數學活動的參與者之一。然而，數學課本的編排只著重在展現組織化結構化的成果，而忽略把閱讀視為一種數學活動來設計教材。而且一般數學教室中，即使有強調閱讀數學的活動，大部分也偏向理解題意或重現他人的成果，較少提供學生統整推廣的學習經驗。如果能夠將閱讀視為數學活動之一，能夠將課本視活動的參與者之一，才可能自然融入組織化和結構化的學習，而不只是看到組織化結構化的產物。

經由人類和不同世界(現實、心靈、語言)的互動，許多數學物件漸漸發展崛起，包含語言、定理、問題、推論方法、後設性數學觀(Kitcher, 1984)等。語言在發展數學的過程中，不只是有助於思考、溝通的利器，也是數學活動的產品之一；有時用來陳述問題脈絡或解題過程，有時是對應情境脈絡下不斷抽象化、結構化的模型。數學知識是一種有邏輯組織的概念系統，但此系統無法被化約成不同內容的總合，瞭解或修改此系統必須探討的是在數學內和外的脈絡中各內容間的關係。透過數學課本如何傳達此數學發展的動態過程呢？

從許多探討理解的文獻中，可發現其中一個共通的想法是：語言既是理解的對象也是理解的媒介(Pirie & Kieren, 1994; Sierpinska, 1994)。那麼數學是否是一種語言？這個問題在數學界裡仍未產生一致的看法。但如果把它改成是否可將數學比喻為一種語言，我想反對的人應該不會很多；而且以 Pimm (1987)的論點：”mathematics is a language in the sense that it is a metaphorical, not a literal phrase(p. xiv)”也可以用來支持本研究的想法。把數學比喻為一種語言的目的在

於，我們可以從一般語言如何採用內隱的(implicit)或外顯的(explicit)語言學習與教學中得到一些值得參考的觀點，藉由數學語言與一般語言的差異性與數學理解的特殊性，也可明瞭數學論證的學習不同於一般語言的學習。

(一) 內隱的到外顯的語言教學

內隱的語言教學意指，讓學生處於自然的語言環境中所產生的學習；相對地，外顯的語言教學則意指，讓學生有意識地瞭解語意和語法的形式定義與結構，以及符號的表達規則。類比到數學語言的教學，Thom (1973)主張先透過內隱的教學，連接學生既有的認知結構，並幫助學生產生新的數學概念的意義；之後，再引入數學概念的形式定義與專有名詞，亦即投入外顯的教學階段。換言之，在母語的學習上，兒童從生活中學習日常的對話方式，接著學習閱讀圖片和文字，藉由聽、說、讀的過程才慢慢發展寫作的能力。同樣地，數學論證的教學也應該從學生自發的非形式演繹特徵發展至數學上的形式證明。

但在發展過程中，學生如何從口語的論證中覺知數學證明的意義？數學溝通是數學教室持續數學活動的主要部分，但由於溝通的內容與方法之多樣性與複雜性，也導致許多沒有意義的、扭曲的、失去方向的溝通結果。例如，教師的用語有時不同於課本的用語。教師口頭說明的過程中，會增添許多註解的詞句或肢體動作，有時讓人更清楚有時卻模模糊糊。至於學生除了思考上尚未清晰有條理，有時也受限於無法明確表達自己的想法，聽者也可能或隱或顯地接收其中的資訊，然後綜合他人或自我的意圖再作反應。基本上也是從內隱的聽、說、讀學習到外顯的做、寫活動。只是在學習數學論證的經驗裡，似乎很少強調如何讀數學證明的外顯教學。

(二) 數學語言與一般語言的差異性

教學上如果能幫助學生理解數學語言的表達方式，即幫助學生找到一個自我開拓數學知識的方法。數學文本中的數學語言，同時使用了自然語言和數學專屬的記號系統，這些記號系統也可粗略地分為四類，(1)代表完整概念的特殊記號(logograms)，例如：≧、√、∫、∞等等，(2)影像式的規格化記號，例如：∠、△、⊥等等，(3)和(4)分別是標點符號和字母所組成的(Laborde et al., 1990)。在中文系統的數學課本中，還包含中文字的記號。當這些記號一起出現時，學生面對著熟悉的和不熟悉的數學的和語文的記號，也是從熟悉中猜測不熟悉的，從幾個熟悉的記號中串聯出新的意義，或是從不熟悉的片斷再瞭解所熟悉的。

從表面的特徵看來，數學語言和一般語言都是一種記號系統，學生也似乎是從聽、說、讀、做(寫)中學習這兩種語言，但為何前者的學習造成更多學生瞭解上的困擾和障礙？或許我們可以從此記號系統所表示的物件之抽象性，以及此記號系統所具有的精確且多重的轉換功能來回答這個問題。Duval(2000)將數學記號中的各類表徵區分為四種不同的登錄器，並強調數學不同於其他科學之處，即在於不同登錄器之間的轉換和協調。數學的理解力包括改變登錄器的能力，必須能夠澄清被表徵的物件及其表徵的使用。因為數學並不是藉由儀器觀察來學習的，必須透過記號表徵的方式。如果表徵登錄器沒有好好地整合，那麼數學理解也只是零碎和片面的單一表徵。

(三) 數學理解

與理解相關的元素有理解的基礎(來自於主體)、理解的方式以及

理解的對象(Sierpinska, 1994)，而且 Sierpinska 深入剖析了理解與意義的關係。意義的衍生可以分為兩種，一種來自於理解的主體，另一種來自於理解的對象。以主體為中心時，理解與意義的關係偏向透過理解所產生的意義；以對象為中心時，理解與意義的關係偏向透過公認的意義來界定理解。在數學學習歷程中，這兩種關係都是不可忽視的。如果只重主體則失去數學既有的規範，可能建構出不適宜的意義；如果只重數學則失去主體理解的基礎，則可能建構不出適宜的意義。在這個資訊時代，個體在任何時空下都處於不斷學習、不停協商既有的理解、改變理解的方式，所以覺知什麼是理解或反思理解了什麼也是學習和教學中不可缺少的成份。

二、研究的定位

如果把數學教育當成一門設計科學，則有關數學教育研究的核心元素特別包含了(Wittmann, 1998)：

(1) 數學活動和數學思考方法的分析

(2) 局部理論的發展

(3) 發展適合學習者學習的教材

(4) 就數學教學的一般性目標嚴格檢驗學習的內容

(5) 研究學習的先決條件和教學的歷程

(6) 發展和評鑑有具體內涵的教學元件，以及各種教學元件和課程的分類

(7) 發展、設計、觀察和分析教學現場的方法

(8) 數學教育史的內容物

這些核心元素需要研究者貼近實際的問題，但並不表示只將研究成果限定成可立即應用；也要更進一步地讓與某核心元素相關的研

究必然發展出有關此核心元素的理論。如此，從教學設計和實徵探究所衍生的理論或理論架構也是這些核心元素的必要成分。

如果把數學教育研究目標當成是某種意義的探討，Godino & Batanero(1998)依此將數學教育研究大致分成兩類：一類是官方的(institutional)和個體的意義的靜態特徵，另一類是意義演化和交互作用的動態特徵。前者透過量化的測驗來探討個體的意義和官方的意義有何差異，或是哪些因素能夠促使意義的發展和改變；後者透過教學現場和課程發展來瞭解個體對於某個物件如何產生意義，如何不斷演變，如何和官方的意義互相關聯。

在研究的理論化過程上，Layder(1998)也指出無論是實際進行的研究或是教科書上所討論的研究，其理論化的方式大致可分為三種取向。第一個取向強調經驗性資料蒐集的優先性與重要性，這個取向往往伴隨公開的反理論立場。當然，也有些並非刻意反對理論，只是更關心資料的發掘，例如社會問題導向的研究。第二個取向則假定，理論問題就是如何決定與應用一組概念或觀念的問題，也就是所謂的研究之理論架構的問題。這個取向帶有濃厚的檢證色彩，最常見的結果還是重新改造舊有理論而非建構新理論，但只要結果不能確認假設，還是可能導向新理論的形成。第三個即是調適理論取向，不僅順應於蒐集到的資料，也同時將資料本身經由外部的理論素材加以同化，希望兼容前兩種研究理論化的取向。

依據研究者的解讀，在數學教育的理論中至少有兩個符合第三種「調適理論」取向的例子。一個是 van Hiele 的幾何思考層次理論，此理論將 Piaget 的認知發展理論精緻化到幾何的內容，從一個較一般性的理論架構作為研究基礎，再透過特殊題材的與研究資料，進一步形塑新的理論。另一個是從荷蘭開始發展的現實數學教育研究，首先

從現實脈絡中或參考考既有理論進行乾實驗(thought experiment)，透過形成臆測、擬定計畫、執行檢驗、修正再臆測等循環性歷程，再慢慢發展成一般化的理論。

在設計科學、意義和理論化等不同觀點下，本研究定位在探討幾何證明閱讀理解的學習要素，來刻劃官方的(institutional)和個人的意義等靜態特徵；同時參考一般語言閱讀理解與數學認知的理論深入剖析幾何證明閱讀理解認知面向上的特徵，進而形成一個關於幾何證明閱讀理解的局部理論。而且本研究希望秉持調適理論的取向，一方面從參考文獻和現象分析擬定研究工具的設計架構，一方面從蒐集的資料中探討中學生幾何證明閱讀理解的現象與規律。除了描述中學生幾何證明閱讀理解的現象，也解釋形成此現象的認知特徵。最後，基於兩種結果建構中學生對幾何證明閱讀理解的模式，並且對於幾何論證閱讀理解的教學提出具體的建議。而且本研究的研究方向不同於之前以建構數學論證為主的研究，所以預期本研究成果能在數學論證的學習與教學研究上提供一些新的見解或問題。

第二節　研究設計

一、研究設計的流程

當一個研究目的中同時融入行為表現和心理認知的研究問題時，應該如何設計才能同時利用量化和質化研究來達成研究目的呢？量化研究的設計，需要進行研究前具有明確的假設和實驗步驟，在研究進行時嚴密監控既定的方法。而質化研究從設計到進行至完成時，都是在不同要素(問題、目的、概念情境、方法、效度)間來回交叉調整的過程(Maxwell, 1996)。為了融合量化的明確步驟以及質化的互

動彈性，研究者在此提出一個綜合兩種精神的研究設計(圖 3-2-1)。希望在這個設計架構下，讓研究者能夠在質與量層層的抽絲剝繭下不斷澄清現象與擬定計畫。

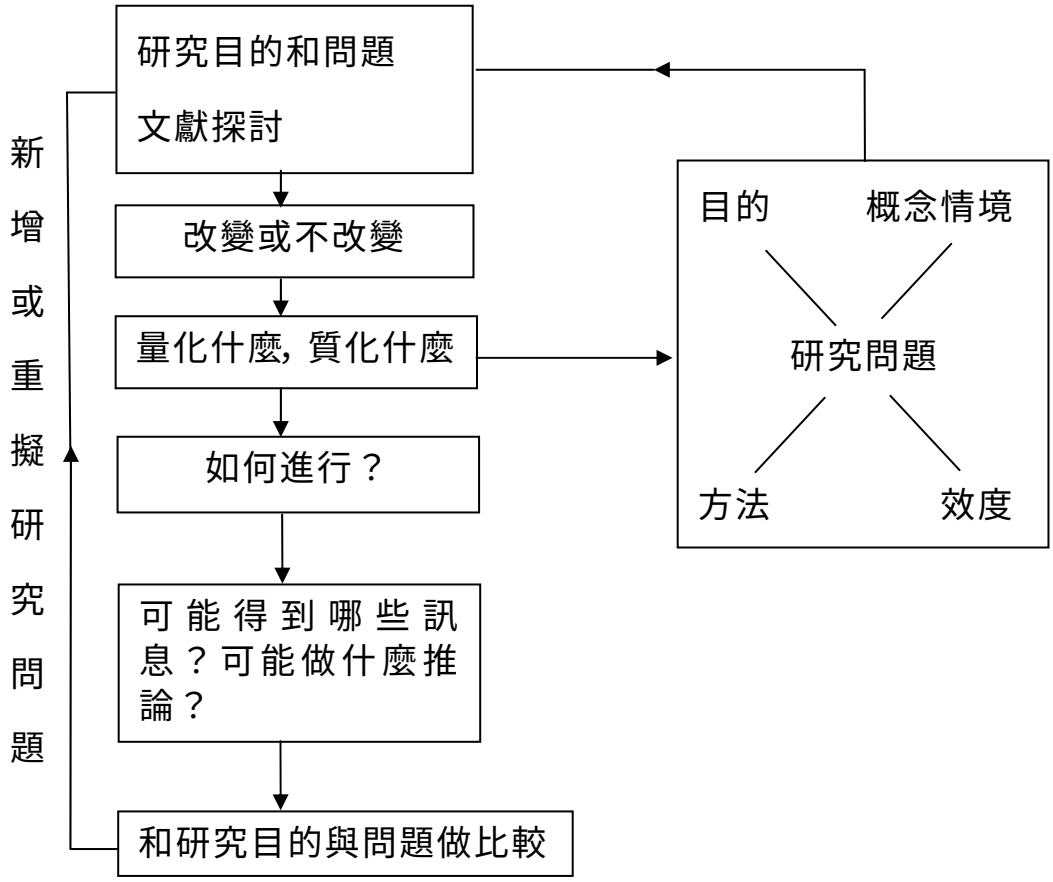


圖 3-2-1：兼具質化與量化方法的研究設計流程

首先，研究者依據擬定的研究目的搜尋相關的文獻，發現文本結構確實是影響學生閱讀理解的外在因素，而不改變只限定以幾何證明作為閱讀內容來探討證明的閱讀理解，但由國內外的教材中也發現幾何證明可分為純性質間邏輯關係的證明，和以邊長、角度、面積或體積等幾何量關係的證明，本研究稱前者為演繹式證明後者為演算式證明。並擷取語文和數學認知研究的成果，把原始的研究問題雛型精緻化。

需要量化或質化的現象是什麼？個體解碼文本所呈現的表層和深層的資訊後，可能嘗試解釋和推論等編碼、再編碼的過程，可能重現或調整舊有的基模或建構新的基模(如圖 3-2-2)。為了進一步瞭解個體編碼或再編碼的認知特徵，以及重現或重構基模的機制與限制，研究者必須透過兩種研究方法來蒐集資料，再從臆測、檢驗這些資料所呈現的規律來回答本研究的問題。一方面採用問卷調查法來瞭解學生幾何證明閱讀理解的靜態現象與結構，另一方面採用晤談法來推測學生內隱地思考與推理。

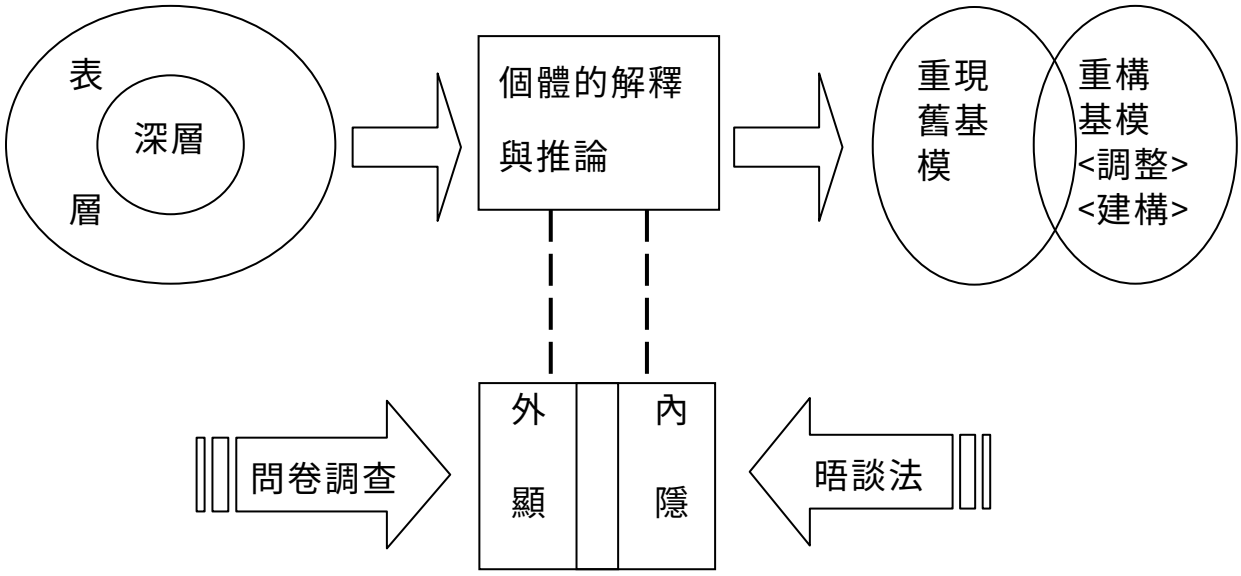


圖 3-2-2：數學證明閱讀理解的研究架構

表 3-2-1 就研究設計的流程作一程序性的總結，但這些步驟並非是依線性的方式一步一步進行的，而是在各步驟間來回反思的設計過程。此流程也可給應於品質管制的 PDCA(Plan-Do-Check-Act)迴圈，在計畫中包含步驟 1 和 2，執行包含步驟 3 和 5，檢查包含 4 和 6，行動包含 7、8、9。

表 3-2-1：研究設計的程序性總結

步驟	行動內涵
1 確定研究的目標	評估意義和重要性
2 形成相關的研究的問題	一般化和特殊化研究目標
3 尋找研究方法	回顧文獻、選擇策略、組合過程
4 評估預期研究結果是否達到解決研究問題的目標	模擬產出、調整方法、目標校準
5 蒐集初步的資料	現象分析、各構念元素的試題分析、受測結果的分析
6 檢驗初步成果	發現規律、重新調整
7 修訂研究問題或方法	精緻化研究問題、改善與修補研究方法
8 形成結論	確認規律、推論與詮釋
9 檢討與建議	反思與改進

二、研究工具的理論依據

基於知識、邏輯推理與幾何證明閱讀理解所發展的研究工具，來探討幾何證明閱讀理解各元素間的關係，以及知識和邏輯推理對幾何證明閱讀理解的影響。研究工具可分為蒐集量的和質的資料兩種類型，所以本研究分別就兩種資料型態的設計理念加以說明。在量的方面，提出設計知識、邏輯推理和幾何證明閱讀理解問卷時的理論依據；在質的方面，考量對象的理解程度來設計不同主題的訪談問題。

(一) 幾何證明的閱讀理解

我們從閱讀數學證明的過程中需要理解什麼？如果我們能夠先以簡單清楚的表徵模式來描述形成數學證明的過程，那也應該比較容易思考這個問題了。參考 Tabachneck-Schijf 和 Simon (1996) 對表徵所提出的一種詮釋：亦即用來記錄、儲存資訊和遵循一套規則來操作資訊的過程。在這個詮釋中，不僅豐富表徵的內涵也顧及表徵的多重功能。表徵所示意的內容不再只限於概念或某種資訊，也是一組操作資訊的規則，而數學論證所需的記號系統和推理規則都被融入其中。

符號或語言是傳達關鍵性想法和有效化規則的媒介，瞭解**媒介的意義和運作的規則**可視為考量數學證明閱讀理解的基本元素，而瞭解如何證明某敘述是對的或錯的，以及瞭解為什麼證明或反駁是有效的，則是更深層的閱讀理解。本研究將依此為基礎，再透過訪談數學家和中學數學教師，探討關於語文研究和幾何論證認知研究的文獻，以及參考數學史的發展，來形成幾何證明閱讀理解的面向。

有許多探討證明的研究，都以數學上的證明方法或學習者證明的方式來區分不同的類型。藉由形式或非形式證明的特徵，來瞭解學生如何理解證明。但本研究的調查，主要把焦點放在一般課本所提供的形式證明。因此，則以證明的結構來分析課本的形式證明。除了針對某一證明過程的論點(argument)，來思考證明中各論點的前提(premise)和結論(conclusion)，也將證明區分成一階段和二階段的證明。一階段表示透過一次已知條件的使用即可推得結論的充分條件，二階段表示已知資訊被分成兩次使用。依據八十三年所發布之國民中學數學課程標準編輯的第五冊數學課本裡，3-1 幾何推理的證明題大都屬於一階段的證明，3-2 綜合證題法的某些證明題即屬於二階段證明。

(二) 知識內容與邏輯推理能力

1. 知識內容

本研究的知識內容不同於閱讀理解表現中的表層理解，前者是從相關概念引入不同表徵型式的知識瞭解，而後者從書面溝通的媒介引入不同層面但等價的意義或演算。Dreyfus (1991) 研究數學概念時，將表徵分為記號和心理模式兩類：記號是屬於用來溝通的外在表徵；而心理模式則是心理基模或參考架構，用來理解外在事物的內在表徵，而表徵所示意的則是一個或一些數學概念。我們也可以說知識內容偏向

評量學生認知中既有的心理模式，而理解表現的表徵意義偏向評量學生對外在表徵的瞭解。從數學學習是為了理解的角度來說，數學知識空間包含了定理(result)、概念(concept)和例子(example)三個子空間(Michener, 1978)。例如在”兩個偶數相加是偶數”的證明過程中，敘述或命題本身可以看成定理，它與許多偶數的例子和偶數的概念形成一套與偶數相關的知識。由於形式化的演繹證明必須建立在嚴謹的公設及定義上，因此在探討知識因素與幾何證明閱讀理解的關係時，必須先瞭解受試者的幾何圖形概念是否完備。本研究分別以敘述性知識、給出正例和非例子與將文字轉譯成圖形作為評量學生概念心像、概念定義、構圖等知識內容的表現。

2. 邏輯推理能力

Jansson(1986)依據 Piaget 對於形式邏輯推理的結構分析，設計一份關於形式運思的命題邏輯測驗，要求受試者從這個二元命題運算所包含的邏輯意義來判斷它們的可能性。在心理學的研究中，也有以基本演繹規則為內容來研究人類的推理能力，主要包含六種常見的條件式推理。本研究將 Jansson(1986)以兩線間長短和位置關係作為測驗邏輯能力的情境稱為概念情境中的推理，另外以記號方式作為測驗演繹規則推理能力的情境稱為記號情境中的邏輯推理，從兩種不同的情境脈絡中來測量學生的邏輯推理表現。

第三節 研究工具

由於文獻上尚未出現對於幾何證明閱讀理解的因素關係或預測模式的研究，擬先透過前置研究來探討幾何證明閱讀理解的面向與發展評量工具，再利用閱讀理解表現作為依變項和各因素所形成的獨立

變項，以統計分析方法來估計和檢驗一個幾何證明的閱讀理解之預測模式。在質性研究的設計上，則以主題式的訪談為主，經由研究者的詮釋分析來探討學生解讀幾何證明的認知特徵。所以本研究的研究工具，可分為量化資料和質性資料兩類。在量化資料的部分，本研究涉及知識、邏輯推理、幾何證明閱讀理解實際表現與自我評估等四個主要元素，為能以具體、量化的數據表示個體在這些元素上的反應以及各元素間的關係，本研究設計了『幾何知識與邏輯推理問卷』、『幾何證明閱讀理解與評估理解問卷』等測驗工具，以下就編製過程與問卷內容作進一步地說明。在質性資料的部分，將就前置研究和主要研究來說明訪談的目的和訪談工具的設計。

一、測驗工具的編製過程

(一) 『幾何證明閱讀理解問卷』的編製過程

1. 閱讀相關文獻

由於「幾何證明閱讀理解」的相關理論很少，所以文獻上只能從論證活動、做證明的困難、證明的有效性等主題中獲得粗略的瞭解。雖然語文科在閱讀理解方面已累積不少的研究成果，但由於其文章結構以故事或說明文為主，也甚少探討閱讀推論與演繹能力的關係，所以很難將其理論架構直接移植到幾何證明閱讀理解的題目設計。

尤其是邏輯定位的理解該如何設計問題呢？Duval (2002) 提出幾何論證中學生可能面臨認識上的困難是，辨識敘述在證明過程中真值(認識的真值、邏輯演繹的真值)與敘述地位(前提、引用的定理、結論)的改變。舉例來說，學生可能認為”偶數加偶數一定是偶數是對的”，在他的認知中這已是事實

不需再證明，這就是將認識的真值視為邏輯演繹的真值。或是學生認為”三角形如果有兩個銳角，則另一個一定是鈍角是錯的”，而不能依據此敘述作出有效的推論，這就是忽略敘述的地位(假設、前提或結論)而使得認識的真值干擾了邏輯的真值。但 Duval 也同時提出一個待解的問題：如何才能知道學生真正理解數學證明的功能而不只有表層的數學證明成果仍是一個開放性問題？這個問題也是本研究必須克服的困難。

2. 教材分析

以『概念、性質和論證的發展關係』、『提問的問題類型』、『證明目標與敘述呈現的方式』、『附圖的呈現方式』、『證明過程的表達方式』等分析國中的幾何教材，除了作為問卷知識內容的參考，也確認教材並未明確涵蓋本研究所提出的幾何證明閱讀理解的面向。

3. 專家訪談

為了發展數學證明的理解面向，研究者以數學家與數學教師關於讀數學證明的觀點和看法作為設計問卷的參考來源之一，詳細的內容請見研究結果。

4. 編製預試題本

在訪談五位數學家和四位數學教師關於讀證明的經驗與看法，以及分析課本教材中預設的論證學習目標與實際提供學習論證的認識方式後，再配合問卷設計的理論依據形成架構，在此設計架構下進行命題。

邀請三位數學教育專家針對題目的適切性、有效性進行審查，以力求符合理論架構的設計(參閱第三章第二節之二研究

工具的理論依據)，並與指導教授討論後形成預試題本。

5. 問卷預試與分析

進行問卷預試，並將預試結果進行項目分析，作為編製正式題本的依據。從前置研究預試的結果，以一階段幾何證明閱讀理解各面向作為試題同源的假設下，計算各類別的標準化 α 係數和折半信度。從表 3-3-1 可知，在一階段演繹式幾何證明中，各理解面向的標準化信度都大於.51，折半信度也都在.63 以上。所以在正式的測驗上，除了將表層整合成 3 題，邏輯定位整合成 4 題，摘要的第二部分改成選擇題，一般性整合成 2 題，應用整合成 3 題，二階段幾何證明題則以同於一階段幾何證明題的問題架構來設計評量工具。

表 3-3-1：前置研究幾何證明閱讀理解各面向的信度

閱讀面向	**計分次**	**α 係數 (標準化)**	**折半信度 (兩半相關)**
表層	4	.445 (.812)	.696 (.533)
邏輯定位	6	.664 (.682)	.704 (.543)
摘要	4	.532 (.526)	.820 (.694)
一般性	4	.636 (.708)	.634 (.464)
應用	4	.510 (.513)	.701 (.539)

(二) 『幾何知識與邏輯推理能力問卷』、『評估理解程度問卷』的編製過程

1. 閱讀相關文獻

參考數學教育在認知研究與心理學在邏輯推理的相關研究後，提出本研究中問卷設計的理論依據。

2. 編製預試題本

依據理論所形成的問卷設計架構進行擬題, 再邀請一位現職高中教師和一位數學系大四學生針對題意、用語進行審查，

並與指導教授討論後形成預試題本。

3. 問卷預試與分析

進行問卷預試，並將預試結果進行項目分析、因素分析，作為編製正式題本的依據。在有關知識問卷的信度考驗方面，本問卷採用內部一致性信度，假設試題都是源自評量受試者的概念心像、定義或性質。從一階段演繹式所衍生的相關知識問卷的 α 係數為.748，折半信度為.717。由於刪除試題：「請把你念”$\overline{AB}$”這個符號的文字寫下來。」後，信度可增加至.780，而且此試題和其他試題間的關聯性也有呈現負相關的情形，所以將此試題改成：「$\overline{AB}=\overline{BC}$ 可以讀成：(請把你的讀法寫下來)」。而且考量在應用理解面向需要將文字轉譯或連結至圖形，所以在正式測驗的知識內容還增加構圖的部分。此外，二階段幾何證明題則以同於一階段幾何證明題的問題架構來設計。

在有關邏輯推理問卷方面，Jansson 的研究樣本的平均年齡是 13.6，本研究的樣本是鎖定國二以上的學生，基本上平均年齡是 14 歲以上。而且在十六種二元命題邏輯的七個階層中，最底層的問題都具有直接判斷的特性，這應該都是本研究樣本可以完全答對的問題。所以，本研究只從中間第二至第六的階層中，各擷取一半以上的邏輯類型，在最高階的邏輯類型才全部納入概念情境的邏輯推理中。至於記號情境的邏輯推理則就六種推理類型設計問題，並搭配一定出現、一定不出現和不一定出現等目標綜合評量學生在不同推理中對於確認性的瞭解。

以邏輯結構的類別作為試題同源的假設下，計算各類別

的 α 係數和折半信度，從表 3-3-2 可知除了 Equivalence 的 α 係數為.653 之外，所有類別的信度都大於.78。但由於監考教師反應國二學生在回答這些試題時有不少疑問，例如：老師說”如果”表示是”真的”嗎？符合老師提示是不是要符合老師的如果？四張卡都沒有要勾不知道嗎？為了避免這些疑慮，研究者除了舉一個例子來說明如何作答，也明確指出有符合提示和不違背提示兩種情形都要考慮並增加「沒有」這個選項。在正式測驗中，在情境推理前五個面向(表 3-3-2)的題目數分別只剩下 3、2、2、3、3 題。至於記號情境的推理，則以不同的推理類型作為試題同源的假設。由於 MT 推論的試題數只有其他推論的一半，相較之下 α 係數也低於 MP&SL 和 AC&DA 推理類型(見表 3-3-3)。所以，在正試的題本將增加 3 小題的 MT 推論問題。

表 3-3-2：概念情境邏輯推理的內部一致性係數

情境推理	作答數	α 係數 (標準化)	折半信度(兩半相關)
Disjunction	8	.780 (.737)	.754 (.605)
Equivalence	5	.653 (.639)	
Incompatibility	7	.844 (.815)	.887 (.798)
Implication	7	.806 (.744)	.885 (.793)
Reciprocal	7	.804 (.737)	.918 (.849)
Exclusion	3	.908 (.910)	

表 3-3-3：記號情境邏輯推理的內部一致性係數

記號情境	作答數	α 係數 (標準化)	折半信度 (兩半相關)
MP & SL	6 小題	.909 (.908)	.902 (.821)
MT	3 小題	.727 (.726)	
AC & DA	6 小題	.908 (.908)	.929 (.868)

對應於幾何證明閱讀理解的五個面向：表層、邏輯定位、摘要、一般性和應用，設計評估理解的試題，題數分別有 6、4、3、2、2 題。以單一因子分析各面向試題所能解釋各面向的總變異量，分別是 46.7%、53.3%、70.2%、81.0%、

86.8%，而且各面向標準化的內部一致性係數分別是.82、.81、.87、.90、.93。在正式的題本中，則先刪除因子負荷小於.5 的試題，並在一般性和應用理解的自我評估各增加一題。

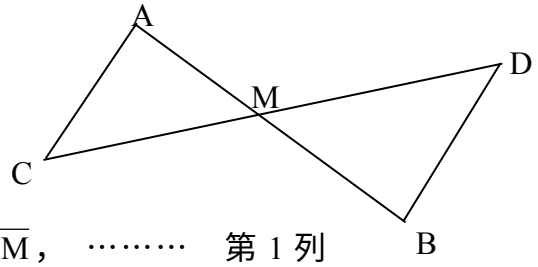
二、正式測驗的問卷內容

(一)『幾何證明閱讀理解問卷』的設計架構

1. 幾何證明的結構

《一階段幾何證明題》

問題：如圖，$\overline{AB}$和$\overline{CD}$交於 M，$\overline{AM}=\overline{BM}$且$\overline{CM}=\overline{DM}$；則$\overline{AC}$和$\overline{DB}$一定平行嗎？



針對此問題，小明提出下列的證明過程：

在△AMC 與△BMD 中，因為$\overline{AM}=\overline{BM}$且$\overline{CM}=\overline{DM}$， …… 第 1 列
又因為∠AMC =∠BMD， …… 第 2 列
所以△AMC≅△BMD (SAS)。 …… 第 3 列
所以∠MAC =∠MBD (對應角)， …… 第 4 列
因為∠MAC =∠MBD，所以$\overline{AC}//\overline{DB}$(內錯角相等)。…… 第 5 列

論點分析

證明內容	簡記	論點分析
$\overline{AM}=\overline{BM}$	P1	P1,P2,P'3→C1 「從 3 個前推得結論 C1，其中 P'3 是將已知條件的兩條直線作了轉換。」
$\overline{CM}=\overline{DM}$	P2	
∠AMC =∠BMD	P'3	
△AMC≅△BMD	C1	
∠MAC =∠MBD	C2	(C1)→C2 「再以 C1 為前提推得 C2，但未表明 C1 是前提。」
$\overline{AC}//\overline{DB}$	C3	C2 → C3 「再以 C2 為前提推得 C3。」

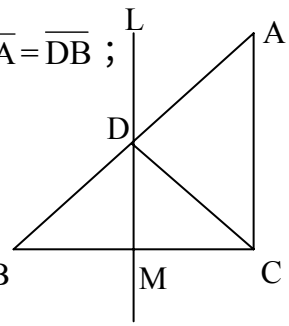
圖 3-3-1：一階段幾何證明題之論點分析

本研究的調查，主要把焦點放在一般課本所提供的形式證明。因此，則以證明的結構來分析課本的形式證明。除了針對某一證明過程的論點(argument)，來思考證明中各論點的前提(premise)和結論

(conclusion)，也將證明區分成一階段和二階段的證明。一階段表示透過一次已知條件的使用即可推得結論的充分條件，二階段表示已知資訊被分成兩次使用。依據八十三年所發布之國民中學數學課程標準編輯的第五冊數學課本裡，3-1 幾何推理的證明題即屬於一階段的證明，3-2 綜合證題法的某此證明題即屬於二階段證明。本研究採用國中課本中曾出現過的幾何證明題 (請見圖 3-3-1 和圖 3-3-2)，分別發展成 3 個論點的一階段證明題(甲式)和 5 個論點的二階段證明題(乙式)。

《二階段幾何證明題》

問題：在右圖中，$\overline{BC}$的垂直平分線 L 交$\overline{AB}$於 D，交$\overline{BC}$於 M，且$\overline{DA}=\overline{DB}$；則∠DCA 和∠DAC 一定相等嗎？



針對此問題，小明提出下列的證明過程：

如圖，因為$\overline{BC}$的垂直平分線 L 交$\overline{BC}$於 M， …… 第 1 列

所以∠BMD =∠CMD = 90°且$\overline{BM}=\overline{CM}$。 …… 第 2 列

又因為$\overline{DM}=\overline{DM}$， …… 第 3 列

所以△BMD≅△CMD (SAS)。 …… 第 4 列

所以$\overline{DB}=\overline{DC}$ (對應邊)， …… 第 5 列

又因為$\overline{DA}=\overline{DB}$， …… 第 6 列

由第 5 列和第 6 列得到$\overline{DA}=\overline{DC}$， …… 第 7 列

因為$\overline{DA}=\overline{DC}$，所以∠DCA =∠DAC。…… 第 8 列

論點分析

證明內容	簡記	論點分析
垂直平分線	P1	P1 → C1
直角、線段相等	C1	
$\overline{DM}=\overline{DM}$	P2	(C1),P2 → C2 「再以 C1,P2 為前提推得 C2，但未表明 C1 是前提。」
△BMD≅△CMD	C2	
$\overline{DB}=\overline{DC}$	C3	(C2)→C3 「再以 C2 為前提推得 C3，但未表明 C2 是前提。」
$\overline{DA}=\overline{DB}$	P3	C3, P3(→)C4 「再以 C2,P3 為前提推得 C4，但未表明推算過程。」
$\overline{DA}=\overline{DC}$	C4	
∠DCA =∠DAC	C5	C4(→)C5 「再以 C4 為前提推得 C5，但未表明引用的性質。」

圖 3-3-2：二階段幾何證明題之論點分析

2. 幾何證明閱讀理解面向的操作型定義

數學證明過程中的論點，有些是具有前後邏輯次序，也就是之前的結論可能是接下來的前提；有些則是沒有邏輯次序的平行關係，也就是各有不同的子前提或子結論。因此，我們將針對區分認識的真值或邏輯的真值設計一種類型的問題(判斷敘述的邏輯次序)：某兩個步驟交換後，證明是否正確？另一方面有些證明步驟的依據是直接引用與前提相關的事實，也有的是引用已知的性質，我們也針對論點的前提設計二種類型的問題：(1)這個證明過程直接引用下列哪些事實？(辨識證明所引用的事實) (2)這個證明過程有沒有應用了下列哪些性質？(辨識證明所引用的性質)。也就是說，我們以判斷敘述的邏輯次序、辨識證明所引用的事實和辨識證明所引用的性質等作為邏輯定位的觀察變項。

在幾何證明閱讀理解的摘要理解是指從證明過程來瞭解證明主要的想法、命題的前提或命題的結論。一般性理解是指判斷不同敘述方式但意義相同的命題和證明過程的正誤，以及瞭解命題與證明間的有效性關係。應用理解是指將數學證明題的結果應用到以文字敘述呈現的相關情境中，應用理解可視為數學證明題的結果和問題情境的連結。所以，本研究以(1)從證明過程中擷取命題的前提或結論；(2)辨識證明過程中的關鍵想法，作為摘要理解的操作型定義。以(1)判斷命題與證明的正誤；(2)判斷證明過程能夠有效化的命題，作為一般性理解的操作型定義。以連結證明文本和應用問題的關係來辨識(1)相同前提下的結論有哪些和(2)不同前提下的結論是什麼，前者是考驗學生能否將數學證明題應用到推論的過程，後者是考驗學生是否注意前提的差異或察覺潛在假設。

綜合上述的分析，本研究以針對**表層、邏輯定位、摘要、一般性和應用等五個面向**，提出細部的測驗目標，形成設計幾何證明閱讀理解的測驗架構，請見表 3-3-4，試題編製也參考前置研究的結果來作調整，請見附錄二(甲式)和附錄三(乙式)。

表 3-3-4：幾何證明閱讀理解表現的架構與題號對照表

理解面向	**理解的對象**	**操作型定義** / **題號**	**理解測驗(甲式)**	**理解測驗(乙式)**
表層	前提或結論的意義	辨識符號在圖形上的意義	(1)	(2)
		說明性質的意義	(2)	
		辨識性質的意義	(3)	(1)(3)
邏輯定位	前提的定位	辨識直接引用的事實	(4)	(4)
	前提和結論的邏輯位置	判斷敘述的邏輯次序	(5)(6)	(5)(6)
	前提到推論間所引用的性質	辨識證明引用的性質	(7)	(7)
摘要	整合論點的始末和關鍵想法	從證明過程中擷取重要步驟、命題的前提或結論	(8-1)(8-2)	(8-1)(8-2)
		辨識證明過程中的關鍵想法	(9-1)(9-2)	(9-1)(9-2)
一般性	命題或證明	判斷命題與證明的正誤	(11)(12)	(11)(12)
	所有論點	判斷證明過程能夠有效化的命題	(10)(13)	(10)(13)
應用	將此命題應用在其他的情境	辨識相同前提下的結論	(14)(15)	(14)(15)
		辨識不同前提下的結論	(16)	(16)

(二)『幾何知識與邏輯推理能力問卷』的設計架構

1. 幾何知識問卷

表 3-3-5：幾何知識問卷的設計架構與題號對照表

知識	概念心像		概念定義或性質		構圖	符號
內容型式	例子	非例子	符號讀法	敘述理由	敘述轉譯成圖形	意義
與甲卷相關的題號	2、6	3、7	1、5	4、8、12	13(a)(b)	11-1、11-2
與乙卷相關的題號	2 、9-1	3、10-1	1	4、9-2、10-2、12	13(c)(d)	11-1、11-2

為了評量涵蓋概念心像和概念定義的先備知識，本研究從敘述性知識、給出正例和非例等內容型式作為測驗目標，為配合在應用理解面向中需要將文字敘述轉譯成圖形的能力，所以在幾何知識問卷增加了構圖的部分，形成知識問卷的設計架構，請見表 3-3-5。表 3-3-5 將依甲卷所需與乙卷所需的知識來呈現概念心像、概念定義或性質、構圖與符號意義所對應的題號，試題編製也參考前置研究的結果來作調整，請見附錄一。

2. 邏輯推理能力問卷

邏輯推理能力問卷的架構基本上保持不變，只是試題的題數與分佈依前置研究測驗成果的建議有所調整，請見表 3-3-6，正式測驗的試題請見附錄一。

表 3-3-6：邏輯推理能力問卷的設計架構與題號對照表

確認性 / 邏輯推理類型 題號	直接確認	等價確認	非限定確認
概念情境的邏輯推理問題			
Disjunction $p.q \vee \bar{p}.q \vee p.\bar{q}$	13、01、08	13	13
Equivalence $p.q \vee \bar{p}.\bar{q}$	09、07		
Incompatibility $\bar{p}.q \vee p.\bar{q} \vee \bar{p}.\bar{q}$	14、10	14、10	14、10
Implication $p.q \vee \bar{p}.q \vee \bar{p}.\bar{q}$	15、02、11	15、11	15、11
Reciprocal implication $p.q \vee p.\bar{q} \vee \bar{p}.\bar{q}$	12、16、3	12、16	12、16
Exclusion $\bar{p}.q \vee p.\bar{q}$	04、05、06		
記號情境的邏輯推理問題			
AC $p \rightarrow q, q$			20
DA $p \rightarrow q, \bar{p}$			21
MP $p \rightarrow q, p$	22		
MT $p \rightarrow q, \bar{q}$		23、25	
SL $p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	24		

(三)『自我評估』的設計架構

本研究將評估瞭解的狀態對應於理解幾何證明的內容後，可區分為評估自己在表層、邏輯定位、摘要、一般性和應用理解等面向的瞭解程度，請見表 3-3-7，試題編製也參考前置研究的結果來作調整，請見附錄二(甲式 1-17 題)和附錄三(乙式 1-18 題)。其中摘要、應用和一般性理解分別以「我瞭解這個證明過程的重點」、「我知道如何應用這個結論或證明解決其他問題」、「我瞭解這個證明過程為什麼可以或不可以證明這個敘述」作為種子題目來發展該面向的其他題目。另外，甲式第 3、4 頁的 18 至 54 題，以及乙式第 3、4 頁的 19 至 55 題，是未來研究想要探討的其他面向的試題，將不列入本研究討論。

表 3-3-7：「評估理解」的設計架構和試題(以一階段幾何證明題為例)

理解面向	試題
表層	我瞭解第 2 列的意思。 我瞭解第 3 列的意思。 我瞭解第 4 列的意思。
邏輯定位	我瞭解第 2 列為什麼是正確的。 我瞭解第 3 列為什麼是正確的。 我瞭解第 4 列為什麼是正確的。 我瞭解第 5 列為什麼是正確的。
摘要	我瞭解這個證明過程證明了什麼。 **我瞭解這個證明過程的重點。** 我瞭解這個證明過程的主要想法。 看完後，我瞭解我有哪些收穫或啟示。
應用	**我知道如何應用這個結論或證明解決其他問題。** 我知道如何改變這個問題的已知條件，而使得結論是錯誤的。 我瞭解從這個問題的已知條件可以推得哪些結果。
一般性	我知道如何以其他的說法來表達這個問題和證明過程的意思。 我知道如何判斷”這個證明過程”是否正確。 **我瞭解這個證明過程為什麼可以或不可以證明這個敘述。**

(四) 試題的信效度分析

參考前置試測結果修改問卷試題，在小樣本施測調整後，即進行大樣本的問卷調查。由於各面向的題數已經減少，所以只就整份閱讀理解問卷進行信效度的分析。

1. 「幾何知識與邏輯推理能力問卷」的信效度分析

在信度考驗方面，假設試題分別源自評量受試者的概念心像、定義或性質、構圖、符號意義，採用內部一致性信度來分析本問卷(表 3-3-8)。就國中生的反應，最低的標準化信度是.741；但就高中生的反應，最低的標準化信度是.602。如果以概念心像、定義和性質、符號意義共同形成一個概念知識的分數，則可採用 Li, Rosenthal & Rubin(1996)提出的多種類分測驗所組合問卷的信度下界公式, 計算這幾個問題來源所組合成的問卷信度，國高中生所得的信度下界分別是.96 和.92。分析邏輯推理問卷的信度結果(表 3-3-9)，國高中生共同分析最低都還高達.808。在效標關聯效度方面，本研究以二個不同學校的國二學生下學期三次段考的數學成績平均分數為效標, 分析和甲式(乙式)相關的概念心像、定義和性質、符號意義共同形成一個概念知識分數的有效性，所得效標關聯效度分別為 0.76(.70)和 0.63(.67)。至於邏輯推理問卷的內容效度主要來自於兩種情境：概念和記號，以及三種邏輯確認：直接、等價和非限定。

表 3-3-8：知識問卷的信度分析

受測對象(樣本數)	國中(444)	高中(766)	合計(1209)
知識問項來源	α 係數 (標準化)		
概念心像(6 題)	.788(.813)	.644(.685)	.764(.799)
概念定義和性質(7 題)	.768(.779)	.606(.602)	.716(.721)
構圖(4 題)	.740(.741)	.633(.632)	.712(.714)
符號意義(2 題)	.850(.850)	.756(.758)	.817(.818)

表 3-3-9：邏輯推理問卷的信度分析

受測對象(樣本數)	國中(443)	高中(766)	合計(1209)
邏輯問項情境	α 係數 (標準化)		
數學概念(第 10-16 題)	.916(.917)	.915(.917)	.921(.922)
記號(第 23、25 題)	.820(.820)	.822(.834)	.808(.808)

2. 「幾何證明的閱讀理解表現和自我評估問卷(甲和乙式)」的信效度分析

在信度考驗方面，假設試題分別源自評量受試者的證明理解，採用內部一致性信度來分析本問卷(表 3-3-10)。就國中生的反應，最低的標準化信度是.738；但就高中生的反應，最低的標準化信度是.619；如果國高中生的反應一起計算，合計的最低標準化信度是.725。基本上，α 係數在.7 以上都算是一份相當好的測驗試題。在專家效度方面，本研究和三位數學教育專家和二位有編著國中教科書經驗的數學教師討論各問項的面向若有不一致的意見時，則修改問題或各面向的細部解釋來達到共識。

表 3-3-10：理解問卷的信度分析

受測對象(樣本數)	國中(443)	高中(766)	合計(1209)
理解問卷	α 係數 (標準化)		
一階段(甲卷)	.827(.836)	.678(.692)	.787(.798)
二階段(乙卷)	.729(.734)	.595(.619)	.701(.725)

受試者做完證明理解測驗後，接著評估個人在表層、邏輯定位、摘要、應用和一般性等面向的理解程度。在信度考驗方面，本研究採用內部一致性信度(表 3-3-11)。並在各構念中再計算逐題刪除的內部一致性，如刪除某題後的內部一致性大於此構念所有題目間的內部一致性，則此題目不納入分析學生自我評估理解的程度或讀不懂時的態

度反應。結果發現，被刪除的評估理解程度題目有摘要構念的「*看完後，我瞭解我有哪些收穫或啟示。*」，應用構念的「*我知道如何改變這個問題的已知條件，而使得結論是錯誤的。*」，以及一般性構念的「*我知道如何以其他的說法來表達這個問題和證明過程的意思。*」。為了確定這五個面向題目的效度，發展試題時主要以一題作為各面向的核心題目，才藉由題目間的內部一致信來佐證各面向的效度。

表 3-3-11：評估各面向理解程度的內部一致性係數

問卷	構念		題號	α 係數 (有效樣本)
一階段 幾何證明 (甲卷)	評估理解	表層 邏輯定位 摘要 應用 一般性	1-3 4-7 8-10 12、14 16、17	.765 (585) .814 (577) .844 (577) .759 (577) .763 (567)
二階段 幾何證明 (乙卷)	評估理解	表層 邏輯定位 摘要 應用 一般性	1-4 5-8 9-11 13、15 17、18	.831 (590) .793 (568) .851 (571) .752 (584) .764 (568)

三、前置研究的訪談

(一) 前置研究的訪談目的與設計

訪談 5 位高一學生，探討他們在建構證明、推理過程、證明概念、證明的閱讀理解上的心智特徵，除了對於學生的閱讀理解形成更具體的臆測，也作為主要研究中設計訪談架構的依據。表 3-3-12 和表 3-3-13 分別是前置訪談的問題，主要先讓學生自己證明命題，作為確認學生腦中至少有哪些相關的既有概念知識。接著，再讓學生看該命題正確的證明過程，想要瞭解學生是否從證明過程和訪談者的提問中又獲得其他的想法。希望藉由這樣的訪談過程，初步探討學生閱讀證明的互動模式，並建立分析主要研究訪談結果的基本雛型。

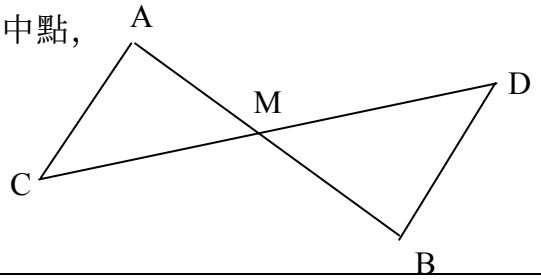
表 3-3-12：前置訪談問題一

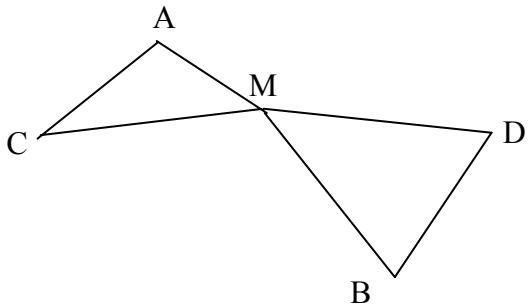
題目情境一

命題：如果 M 是 $\overline{AB}$ 中點，也是 $\overline{CD}$ 中點；則 $\overline{AC}//\overline{DB}$。

證明過程：

如圖，因為 M 是 $\overline{AB}$ 中點，也是 $\overline{CD}$ 中點，
所以 $\overline{AM}=\overline{BM}$ 且 $\overline{CM}=\overline{DM}$。
又因為∠AMC =∠BMD,
所以△AMC≅△BMD (SAS)。
所以∠MAC =∠MBD (內錯角),
如此推得 $\overline{AC}//\overline{DB}$。



步驟	訪談者的動作	訪談者的敘述
1		你知道什麼是平行嗎？
2	聽或看學生的回答	
3		關於平行的性質有哪些呢？
4	聽或看學生的回答	
5	讓學生看命題	
6		這個敘述在說些什麼？
7	讓學生看命題	
8		請你證明這個敘述是對或錯？
9	聽或看學生的回答	
(先猜測學生無法證明的困難，再決定是否與如何介入；例如：原敘述轉換成數學敘述)		
10	讓學生看證明過程	
11		你認為這段敘述在說些什麼？
12		請盡量把你想到或看到的說出來或寫下來
13	聽或看學生的回答	
14		你認為這個證明是正確的嗎？
15	聽或看學生的回答	
16		如果把圖形畫成這樣，這個敘述還是對的嗎？請說明你的理由。 
17	把文本資料收起來	

18	一邊看 一邊問 一邊聽	請你回憶一下，你剛剛看到或做了些什麼事情？
		這個證明告訴你什麼？(四邊形的對角線互相平分，則這個四邊形是平行四邊形)
		從你看到的或做的過程中，你有沒有聯想到什麼？

表 3-3-13：前置訪談問題二

題目情境二

命題：若有一直線與一圓相交，則至多只有兩個交點。

證明過程：

假設某一直線與一圓不只兩個交點,
令 A, B, C 是其中三個相異交點,
則 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線都會過圓心,
但是 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線應該平行而不相交,
得到一個矛盾情形,
所以一直線與一圓至多只有兩個交點。

步驟	訪談者的動作	訪談者的敘述
1		請你將例 3 的命題念一次
2	聽學生的回答	
3		這個敘述在說什麼？
4	聽學生的回答	
5		請你證明例 3
6	看或聽學生的回答	
7	讓學生看例 3 的證明過程	
8		這是例 3 的證明過程
9		你認為這段敘述在說些什麼？
10		請盡量把你想到或看到的說出來或寫下來
11	聽或看學生的回答	
12		這個證明引用了什麼性質？
13	聽或看學生的回答	
14		這個證明用了什麼技巧或證明方法？
15	聽或看學生的回答	
16		你從這些敘述中得到關於三相異點的哪些性質？
17	聽或看學生的回答	

18	一邊看 一邊問 一邊聽	請你回憶一下，你剛剛看到或做了些什麼事情？
		從你看到的或做的過程中，你有沒有聯想到什麼？

(二) 前置研究的訪談分析結果

1. 數學證明閱讀理解的互動模式

數學證明的文本帶有兩種面向的意義，一種是文本本身所具有的意義，它的意義已經無須讀者與作者的認可，而是由數學社群成員公認的意義；而另一種是與讀者的背景知識相關，文本的意義也是來自於讀者的瞭解與延拓，不同的讀者讀相同的文本可能產生不同的意義。當個體企圖瞭解文本的意義時，個體的認知基模是如何運作來幫助自己從不瞭解到瞭解，從瞭解到更深入的瞭解呢？透過少數個案的分析形成三種閱讀數學證明的互動模式：重現型、重組型、建構型(表3-3-14)，依此互動模式作為切入與溝通數學證明閱讀理解之探討的窗口。研究者擬從受訪者的反應中，來描述每一種互動模式的心智特徵，之後整合出一個一般性的閱讀歷程架構，再形成主要研究的訪談目的與架構。

表 3-3-14：閱讀數學證明的互動模式類型

互動模式類型	建構證明	讀證明 (自我評估)	讀證明(他人評估)
重現型	完整	讀懂了	懂了
重組型	完整或 不完備	讀懂了	透過外來的事前預見從表層到深層的懂
建構型	➢ 不完備或有誤 ➢ 完整或不完備	讀不懂 或 讀懂了	➢ 配合外來的事前預見和自我的事後認識才從表層到深層的懂(協助式建構) ➢ 配合自我的事後認識和事前預見從深層到新層次的創造(自助式建構)

上述三種閱讀證明的互動模式是就個案在自己建構證明、讀證明的反應中，逐步分類和檢驗所發展出來的。如果個案在自己建構的證明和即將閱讀的證明過程是一樣的，而且在訪談者提出「推得了什麼」、「解釋其中的道理」等問題或目標的檢測下，如果受訪者都可明確回答這些問題或完成要求，則當下的閱讀理解心智活動被歸屬在重現型(圖 3-3-3)。但是在範例中(表 3-3-15)，最後受訪者把「平行的話內錯角相等」視為「求得內錯角相等後則得到平行」的理由，由於訪談者並未進一步檢驗受訪者**是否真的不瞭解充要條件的邏輯關係**，在閱讀理解的問卷工具中則會包含這類型的問題。

如果個案在自己建構的證明和即將閱讀的證明是一樣的或有些不完備之處，雖然無法正確回答訪談者所提問的問題，但在「這個敘述的前提(或結論)是什麼」、「現在證明的目標是什麼」、「它引用了什麼是已知沒有明確提出的」、「如果把結論和已知的條件互換，你想怎麼證」等介入性問題下，個案可以漸漸澄清錯誤思考的部分，則當下的閱讀心智活動被歸屬在重組型(圖 3-3-4)。範例中(表 3-3-16)，受訪者受到如圖的影響，以附圖來判斷命題的對錯；即使將如圖刪除後，受訪者還是以圖形為主而判斷命題是錯的。接著訪談者**改變目標**，讓受訪者自己畫出符合敘述的圖形。受訪者在構圖過程中，發現命題所隱藏的潛在假設，而察覺自己的錯誤並修正此錯誤。

最後的建構型(圖 3-3-5)，又先分成協助式建構和自助式建構。協助式建構是除了訪談者的介入也需要相關資訊和思考方式的講解，個案才可能部分或完全理解原本不理解的地方。自助式建構是指除了個案完全瞭解所看到的證明，也能主動提出新的問題、改善敘述或證明的想法等創新的思維。但就這幾個個案中，尚未出現自助式建構型的互動歷程。以反證法為例(表 3-3-17)，受訪者無法主動察覺證明過程

中的**潛在假設**(如果三點在圓上、如果三點在同一條直線上)，在訪談者直接介入後，除了看懂證明過程也知道「證明三點時發生矛盾情形，則表示四點以上都不成立」。

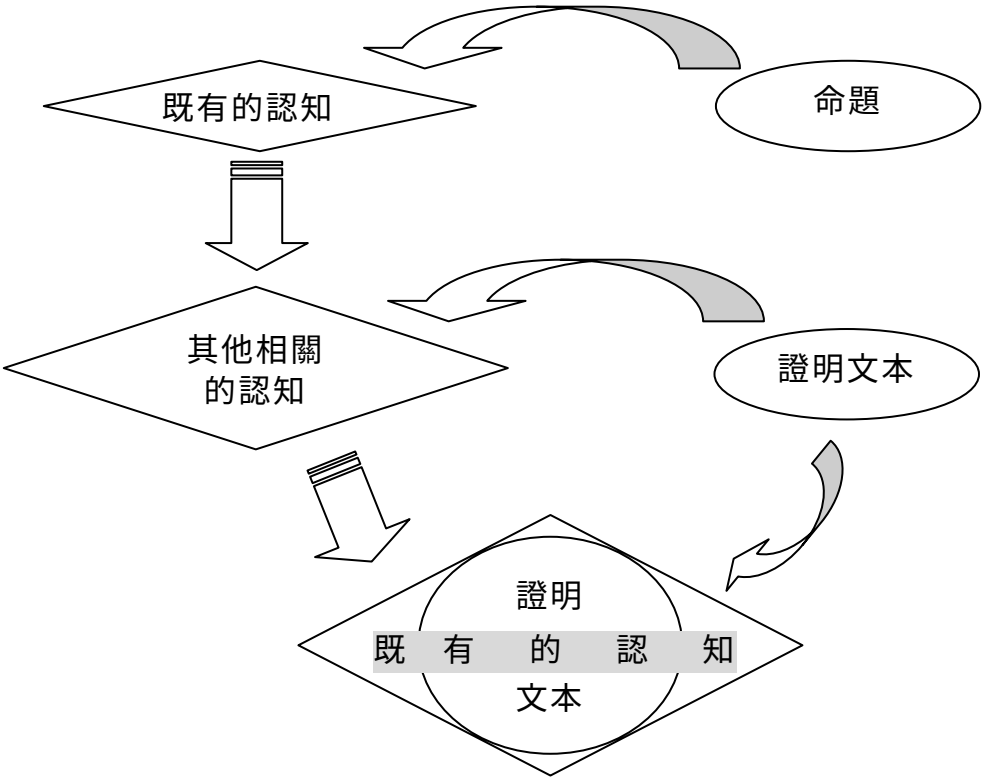
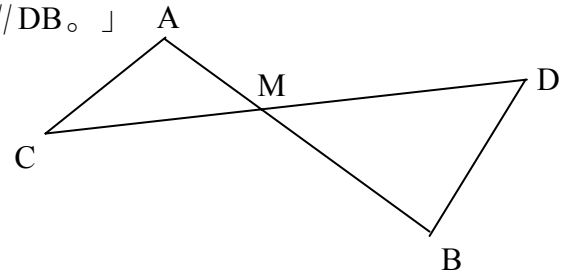


圖 3-3-3：重現型的互動模式

表 3-3-15：重現型的範例說明

互動模式的元素	元素的內容說明	
命題	「如圖，如果 M 是 $\overline{AB}$ 中點，也是 $\overline{CD}$ 中點；則 $\overline{AC}//\overline{DB}$。」 	
既有的認知	**訪談者**	**受訪者**
	請你將命題念一次	(照念)
	請你證明	這應該是用相似形吧！

	相似形可以保證等長嗎？	ㄟ，我想想看…，應該，不不不，應該是全等啦！
	嗯！為什麼你會想到全等？	因為它給兩個邊又給兩個角，它們又共用一個，那就很好證
其他相關的認知 證明既有的認知文本	請你把證明過程寫下來	(寫下完整的證明)
	證明文本 (提供證明過程) 這是證明過程	跟我的想法一樣嘛！
	你從三角形全等得到什麼呢?	我得到了這個角(∠B)就等於∠A 所以這兩條是平行的。
	為什麼這樣就平行？	**因為一個平行線，你畫一條線，畫內錯角一定是相等的！**

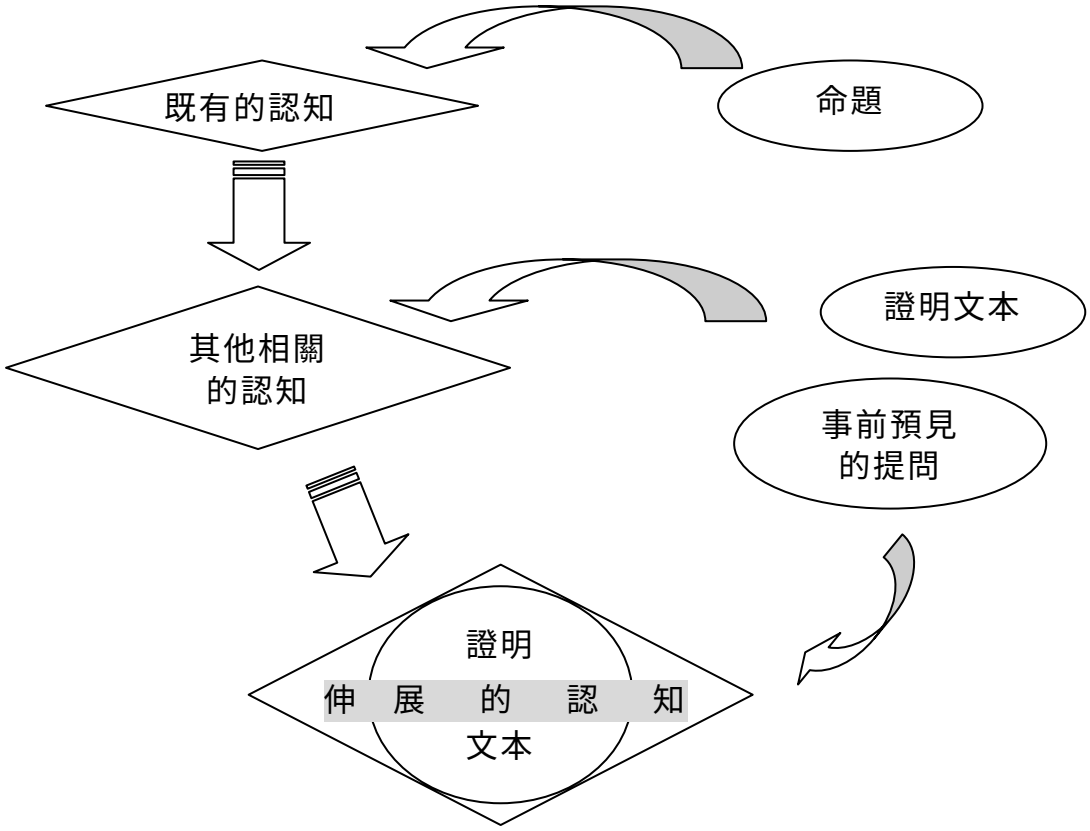
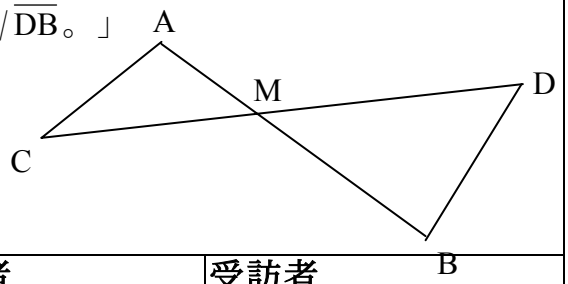
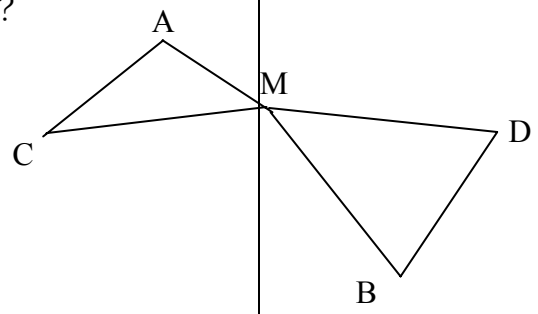


圖 3-3-4：重組型的互動模式

表 3-3-16：重組型的範例說明

互動模式的元素	元素的內容說明	
命題	「如圖，如果 M 是 $\overline{AB}$ 中點，也是 $\overline{CD}$ 中點；則 $\overline{AC}//\overline{DB}$。」  	
既有的認知	**訪談者**	**受訪者**
	請你將命題念一次	(照念)
	請你證明	(寫下完整的證明)
命題相關的認知 事前預見的提問	證明文本 (提供證明過程) 這是證明過程	
	對於這個證明你有什麼問題嗎	(搖頭)
	如果把圖形畫成這樣，這樣的話，這兩個($\overline{AC}$、$\overline{DB}$)有平行嗎？  	比如說，哪個角相等嗎？
	現在不是說 M 是 AB 的中點嗎？然後 M 也是 CD 的中點嘛！可是，你看像我這樣畫，AC、DB 有平行嗎？	可是，如圖啊！如圖，就沒有啊！
	好，那這個如圖畫掉呢？	畫掉嘛！那就要重新思考了。
	那請你想一想，這問題出在哪裡？	問題喔！因為，就有沒有在一個直線上啊？

	你從哪裡看出來的，什麼叫一直線上？	這是彎的啊！
	就它所給的條件的話，	它沒有講。
	它沒有講嗎？	有啊！平行。
	它的條件是什麼？	平行。
	這是要求的，還是已知的？	這是要求的。
	那已知的是什麼？	就是 M 是這兩條線的中點。
	這兩條是什麼？你把它念一次。	如果 M 是 AB 線段的中點，也是 CD 線段的中點，
	那如果我圖畫這樣，問題出在哪裡	**沒錯，圖沒錯。**
	那這個(命題)有沒有錯？	(命題)**當然錯。**
	這個錯？	如果這樣的話(用手把如圖遮住)，這(命題)應該不成立吧！
	所以如果把這兩個字遮掉，這一句話就錯。	對啊！我這樣覺得啦！
	現在問題在哪裡？	我知道，我知道。反正，題目如果這樣出，嗯……怎麼講啊！它這樣說是沒錯，這樣講的話如果它(原命題)是放在這邊(訪談者提出的圖)，**如圖**，那我們就說這個敘述是錯的。
	那我現在把這個圖遮掉，把如圖也遮掉，那你怎麼畫？	怎麼畫…，它們還是要平行嗎？這個就不確定了。
	對這個敘述來講，你怎麼畫？	還是有很多種畫法。
	好，你就畫一種你想的。	(類似原圖)
	好，你再畫一種和它不一樣的。你說有很多種嘛！	(類似新圖)

證明 伸展的認知 文本	你是根據這句話，去畫出這兩個圖嗎？	前面這兩個。因為這兩個是條件嘛！這是我們要的結果，就是這還不確定。
	在這個條件，這個符號($\overline{AB}$)代表什麼意思？	符號喔！AB 線段，對喔！那這樣就不對了。
	那我的題目如果這樣的話，那還會有很多種圖嗎？	應該不會不會，喔…！我現在瞭解了，
	你瞭解了什麼？	瞭解之前被被唬弄了。
	哪裡出了問題？	**就是 AB 線段一定是直線。**就像老師講了錯的解法，大家就會往錯的地方去想，然後他就說其實這根本不是解答的方式，同學大家都被騙了。

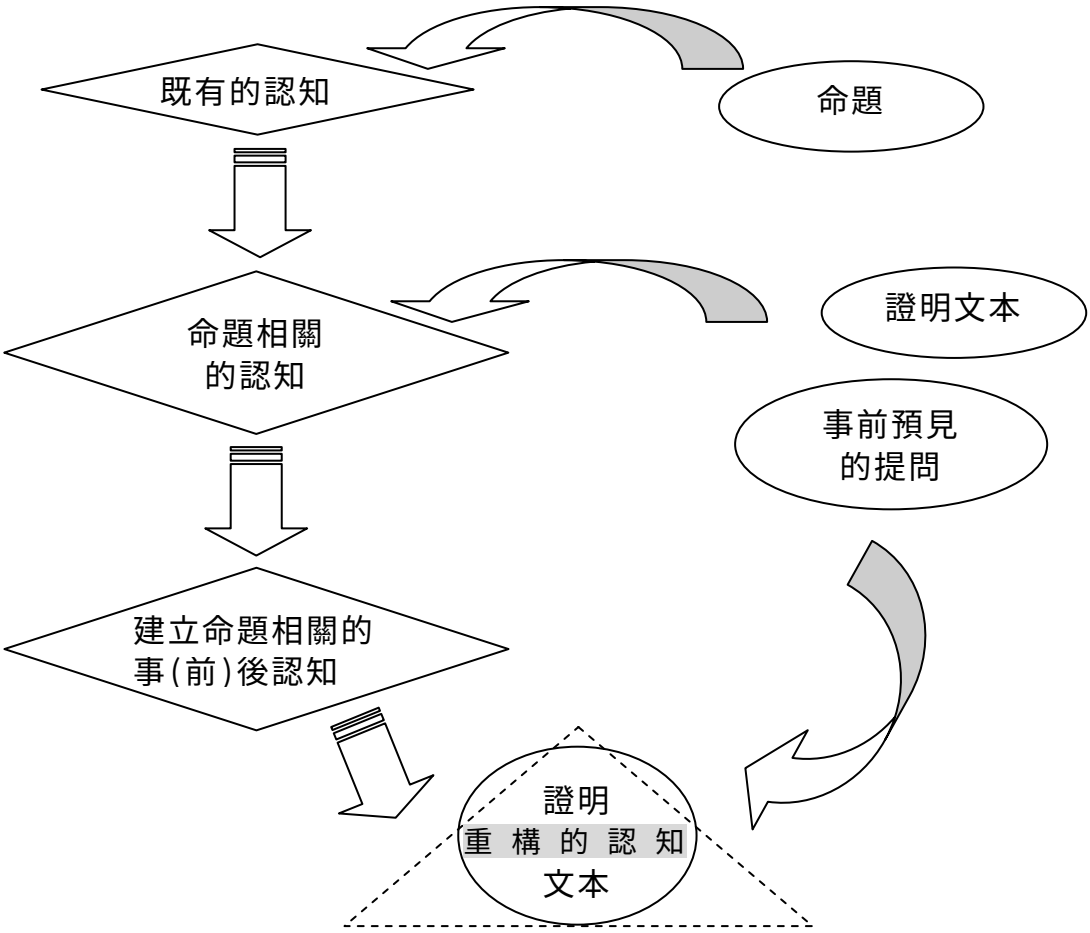


圖 3-3-5：建構型的互動模式

表 3-3-17：建構型的範例說明

互動模式的元素	元素的內容說明	
命題	若有一直線與一圓相交，則至多只有兩個交點。	
既有的認知	**訪談者**	**受訪者**
	請你念一次	(照念)
		這樣，我看看證明至多，那就畫線…
	請你證明看看	一樣最好的話，就是你一邊想一邊講，你想到什麼就把它講出來。
		反正一個圓，它頂多就是…切線就是一個交點，有碰到跟經過圓心…就三種情況，一種是沒有碰到，一種是切…就是變切線，另一種是我忘記那是什麼線。反正就是分三個來討論，一個是切沒有，一個是切一點，一個是切兩點。最多不可能切到三點，因為你通過之後，這是最長的距離(指著過圓心的割線)，應該是這樣吧！我已不知道。
事前預見的提問	證明文本 好，那我們再來看看它的證明。	嗯……
	你看得懂嗎？	它說 A、B、C 是三個相異交點，則 AB、BC 的中垂線都會通過圓心，……。它是說令它有三個交點……大概瞭解。
	那你要不要把它大概在說些什麼，講一次給我聽	就是這三個相異點，它會產生兩個線段，AB、BC(同一直線)……，(1 分鐘)。嗯！我對它的敘述好像不太瞭解。

	好，那我們一起來看一下。它說假設有三個交點在圓上，所以我就先隨便畫 3 個，對不對？	喔！
	接下來你能畫給我看嗎？	它說這兩點(線)不會相交，但照理講它會相交。
	哪幾點是 A、B、C？	隨便
	你定一下。	
	接下來這句話($\overline{AB}$與$\overline{BC}$的中垂線都會過圓心)在說什麼？	因為無論哪一個中垂線都會通過圓心嘛！然後…
	然後這一句話($\overline{AB}$與$\overline{BC}$的中垂線應該平行而不相交)在講什麼？	因為中點…中垂線應該會平行而不會相交。
	為什麼？	……(24 秒)
建立命題相關的事(前)後認知	當你遇到你不瞭解的時候，你要不要回來看看它整個前提是什麼？	一條直線與一圓相交，現在就這樣兩條直線…
	那這三點，我們假想中它應該怎樣	要再多畫一條
	我們假設一條直線和一個圓現在有幾個交點？	不只兩個
建立命題相關的事(前)後認知	不只兩個，那我們現在用三個來看，這三點又要怎樣？滿足兩件事情，第一件就是我們剛剛講的在什麼上	圓…
	對嘛！我們剛剛講的圓跟直線嘛！然後第二件事情是什麼？	至多，一條…這樣就會出現兩條直線。

	也對，可是我們不能只靠視覺判斷嗎？那我們現在假設 A、B、C 又要在同一條直線上，那它們的中垂線會怎麼樣？	照理講，它應該平行。
	那假設這三點又要在什麼上？	圓
	當它在圓上的時候，它的中垂線一定要怎麼樣？	通過圓心
	所以它說什麼？	矛盾
事前預見的提問	矛盾指的是什麼？	它們會中垂線平行，可是它們會因為後來…，就是題目，就是先設三個交點，然後就會有出現相交的情況，所以矛盾。
	為什麼矛盾之後，你就可以說它至多兩個交點？	
證明 重構的認知 文本		就是代表之後，它們還會相交，就是越來越多點。就是兩個點以上的話，就是三個點之後，就是會跟之前情況不符合，還是要在一條直線，所以還是至多會只有兩個交點吧！

2. 數學證明閱讀理解的循環歷程

每個人依照不同的目標與背景知識，閱讀的歷程都有所不同。有的人看不懂敘述就停止閱讀，有的人可能開始思考哪裡不懂。但如果是從文本與個體的解讀來探究不斷改善理解的過程，則不難發現一個簡化的模式可供探討閱讀數學證明的心智活動。從上述三種互動模式中，研究者即以文本和個體整合出一個讀證明的循環歷程，請見圖

3-3-6。個體帶著既有的認知來瞭解證明文本(p2)，證明文本的表層結構也啟動了個體某些部分的認知(p1)，當個體在自我評估或外在介入下，覺察到瞭解的不足或不協調，則試著透過事後認識和事前預見的機制，再伸展或重構既有的認知(p3)，藉由伸展或重構的認知才有可能或有必要再次經歷瞭解該文本的過程(p4)。本研究依此循環歷程，來設計主要研究中的訪談目的與訪談架構。

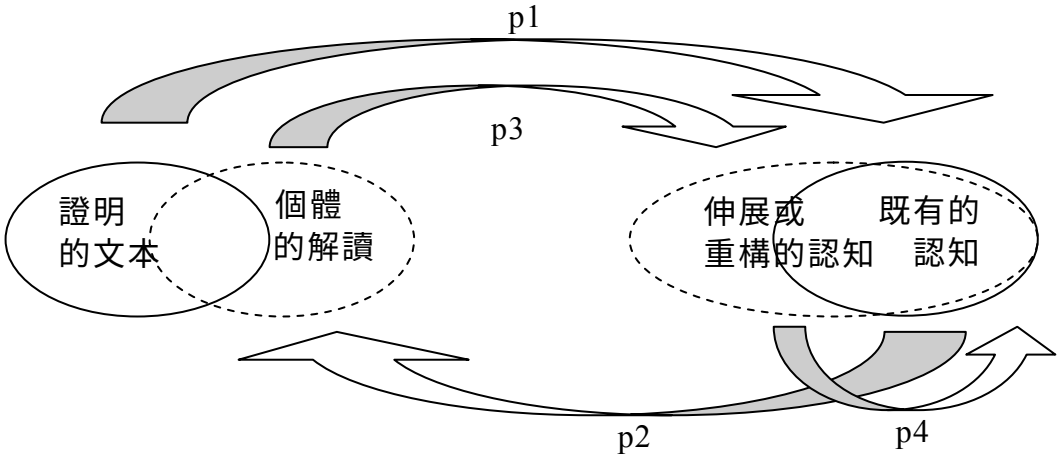


圖 3-3-6：數學證明閱讀理解的循環歷程

這個循環歷程似乎是符合直覺的，但經由探索後的直覺是不同於未探索前的直覺。在探索前，研究者思索著讀者和文本之間的意義協商過程。在探索後，研究者想要聚焦於妨礙意義協調的認知特徵。歸納三種互動過程中訪談者的角色，發現訪談者同時扮演傳導文本意義的媒介之一，以及促進讀者思索的推手。如果沒有訪談者的介入，五個個案在兩題的訪談過程中，可能不會主動表現伸展或重構的認知。但是如果在放淡訪談者介入的角色下，研究者又如何探討學生從閱讀證明的過程中，看到什麼、讀到什麼和讀懂什麼？又如何從學生看到、讀到和讀懂的內容來探討妨礙學生意義協商的認知特徵？這也是主要研究的訪談設計與分析時必須面臨的挑戰。

三、主要研究的訪談

(一) 主要研究的訪談目的

個人閱讀理解的程度和其閱讀過程中所使用的思考和推理習習相關，沒有思考的閱讀自然無法建構資訊的意義，沒有推理的閱讀則失去預測新資訊的可能。當學生在數學學習的過程中需要面對許多的論證時，是什麼樣的因素妨礙了他們不斷更新理解的循環歷程？研究者將以閱讀證明的循環歷程 p2、p3、p4 為主提出相對應的訪談目的，請見表 3-3-14。心智活動的歷程，也是從循環歷程直觀抽取出來的。當讀者受到文本的資訊的刺激，嘗試理解的當下也就展開解釋的心智活動。預測是讀任何書都必然會使用到的技巧，但當個人的預測不同於文本的發展時，讀者是否能透過比較而覺知不同則因人而異。面對不一致或衝突時，讀者或是順利克服而超越原來所理解的，或是退回自覺協調其實矛盾的狀態。希望能透過本研究的訪談設計與分析深入剖析(1)中學生如何評析各種幾何論證的有效性；(3)妨礙中學生精緻化理解的因素是什麼。

表 3-3-14：閱讀歷程與訪談目的對照表

<table>
<tr><td>閱讀歷程
訪談目的
心智活動</td><td>既有認知
p1、p2</td><td>事後認識、事前預見
p3</td><td>重構認知
p4</td></tr>
<tr><td>解釋文本的資訊</td><td colspan="2" rowspan="3">➢ 中學生如何評析各種幾何論證的有效性？</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>比較文本與預設的結果</td></tr>
<tr><td>發現不協調或衝突</td></tr>
<tr><td>超越順向的閱讀</td><td colspan="3" rowspan="2">➢ 妨礙中學生精緻化理解的因素是什麼？</td></tr>
<tr><td>精緻化歷程</td></tr>
</table>

(二) 主要研究的訪談設計

1. 訪談的活動內容

當設計問題是用來瞭解學生看到、讀到或讀懂了什麼時，必需考量有些學生不太能主動且清楚表達他們所看到的或所想的。所以，在本研究必需設計一種活動讓學生能有機會在盡量不受訪談者介入的干擾下，又覺得需要把自己的想法說出來。另一方面，當學生自己已經能以符合形式證明的方式論證時，通常已失去再理解此證明的興味。所以，如果能讓學生讀自以為懂但其實是錯誤的證明，應該能蒐集到許多妨礙學生理解的現象。因此，本研究主要設計兩種主題式的訪談活動，**一是數學論證的分類活動，二是數學證明的偵錯活動**。希望讓學生在需要表達自己想法的情境中，既能充分說明自己對文本的理解，又不會受到訪談者干擾而產生特別的反應。

圖中，A 及 B 是直線 L 上的兩個固定點。

P 點可以移動。連 $\overline{PA}$ 和 $\overline{PB}$。

A、B、C、D、E、F 六個人正討論

下面的敘述是否正確：

如圖， $x° + y° = 180° + z°$」

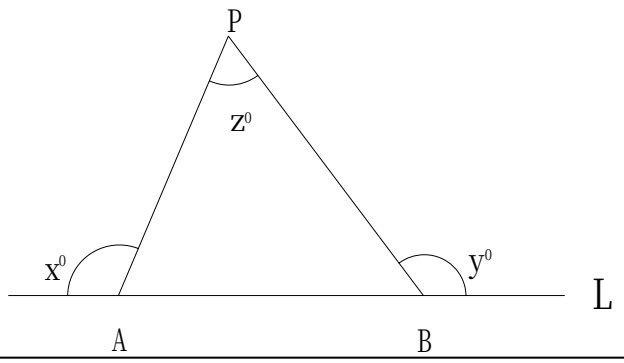
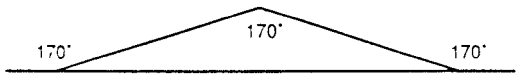


圖 3-3-8：分類活動的幾何問題

分類活動的材料內容是取自於英國 Hoyles 主持 Longitudinal Proof Project 問卷調查中的一題，請見圖 3-3-8 和圖 3-3-9。除了有誤的反例(A)、舉例子(B)、 演繹式證明(C)、測量(E)是源自英國，研究者另外加入 D 和 F 的說法。說法 D 是演算式的證明，說法 F 是解說性的論證，其中 F 並不是去證明 X、Y、Z 之間有個不變性的關係，而是提出他記得 X、Y、Z 真的存在某種關係。

A：

我想到一個圖形，
其中∠x、∠y、∠z 都等於170°

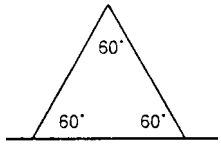


所以在我的圖形中，
x + y 並不等於 180 + z。

所以「$x° + y° = 180° + z°$」是錯的。

B：

我能移動點 P 使全部的角都相等，
而這些角都等於 60°。如下圖：

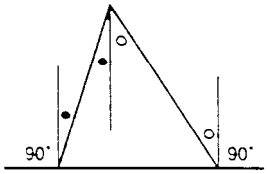


所以∠x 是120°且∠y 是120°，
$120° + 120° = 180° + 60°$

所以「$x° + y° = 180° + z°$」是對的。

C：

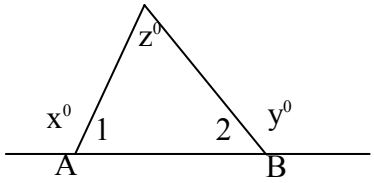
我畫了三條平行線。
兩個標示● 的角是相等的，兩個標示○ 的角是相等的。
∠x 是 90°+●，∠y 是 90°+ ○，
所以 x 加 y 是 180+○+● ，
即等於 180 + z。



所以「$x° + y° = 180° + z°$」是對的。

D：

因為∠1=180°−∠x，∠2=180°−∠y。
所以∠1+∠2 =360°−∠x−∠y，
又因為∠1+∠2+∠z=180°，
所以∠x+∠y=180°+∠z。



所以「$x° + y° = 180° + z°$」是對的。

E：

我測量了圖中各個角，發現
∠x 是 110 °，∠y 是125°，∠z 是 55°。

$110° + 125° = 235°$，

而且$180° + 55° = 235°$

所以「$x° + y° = 180° + z°$」是對的。

F：

我記得∠x、∠y、∠z 中，
任給其中兩個角的度數就可以算出第三個角。

所以「$x° + y° = 180° + z°$」是對的。

圖 3-3-9：分類活動的幾何論證

偵錯活動的題目是取自 Solow 的 How to read and do proofs 中的一題，不同 Solow 是以正確的數學證明為前提，分析在正確的數學證明中所需的數學思考，本研究也採用學生所建構的錯誤證明作為偵錯活動的材料，請見圖 3-3-10。研究者即以學生在分類活動和偵錯活動的反應為基礎，分析學生評析錯誤或不一致的證明時所展現的認知特徵。

問題：如果直角三角形面積為 $\frac{z^2}{4}$，則此直角三角形也是等腰三角形嗎？

他人的證明方法(一)

$\because$ 直角三角形面積為 $\frac{xy}{2}$ 且已知面積為 $\frac{z^2}{4}$，所以 $\frac{xy}{2}=\frac{z^2}{4}$ …… 步驟一

又因為為直角三角形所以 $x^2+y^2=z^2$ …… 步驟二

代入步驟一可得 $\frac{xy}{2}=\frac{x^2+y^2}{4}$ …… 步驟三

由步驟三得到 $(x-y)^2=0$，所以 $x=y$ …… 步驟四

所以可得其兩股等長

他人的證明方法(二)

(1)如果為等腰三角形，則 $x=y=\frac{z}{\sqrt{2}}$ ……步驟一

所以三角形面積是 $\frac{1}{2}\cdot x\cdot y=\frac{z^2}{4}$ ……步驟二

則等腰成立

(2)如果不是等腰三角形，則三角形斜邊上的高為 $\frac{xy}{z}$ ……步驟三

所以三角形面積是 $\frac{1}{2}\cdot z\cdot\frac{xy}{z}=\frac{xy}{2}$，與 $\frac{z^2}{4}$ 不合 ……步驟四

圖 3-3-10：偵錯活動的幾何問題及兩種證明

2. 半結構式訪談

以大方向的訪談目標：「釐清學生在證明中看到、讀到或讀懂了什麼」為重心，以「學生的想法不清時要確認、學生誤解訪談者的問

題時要拉回、學生的思考很特別時要外推」為訪談的原則。在這兩大前提下，來設計分類活動和偵錯活動的訪談問題，請見表 3-3-15 和 3-3-16。在分類活動中，主要讓學生判斷某人的數學論證是否正確，以及比較各種論證間的異同。在偵錯活動，針對兩種論證搭配各面向的理解問題，讓學生先做各種的辨識與判斷後，再透過深度訪談來瞭解學生的想法。總得來說，訪談流程都是先請學生自己做證明，接下來再看別人的證明，並設計問題來瞭解學生看到了什麼。

表 3-3-15：分類活動的半結構式訪談

訪談流程	**訪談問題**
寫證明	提供問句式命題，請學生證明。
評估單一論證	提供不同的論證，請學生給分並說明給分的理由。
比較不同的評估	請學生比較對不同論證的給分，並說明給分異同的理由。
分類六種論證	請學生依自己的方式分類，並說明分類的理由。
比較六種論證	你認為哪些人的說法可以證明這個敘述是正確的？
綜合回顧	你認為最難懂的部分是什麼？為什麼？ 你如何幫助自己更瞭解一個看不懂的證明？ 你喜歡誰的說法？你的理由是什麼？ 你不喜歡誰的說法？你的理由是什麼？ 你認為老師會給誰最高分？你的理由是什麼？ 在你的想法中，你認為什麼是證明？ 老師曾教導你們如何寫證明嗎？你覺得需要嗎？ 老師曾教導你們如何讀證明嗎？你覺得需要嗎？

表 3-3-16：偵錯活動的半結構式訪談

訪談流程	**訪談問題**
寫證明	提供問句式命題，請學生證明。
回答問卷	請學生回答關於各理解面向的問題，請見附錄四。
針對第一種證明方法	就步驟一(二、三…)，你認為你瞭解了什麼？你不瞭解什麼？ 為什麼你喜歡(或不喜歡)這個證明？ 為什麼你同意(或不同意)”這個證明只證明了某些三角形是正確的”？ 這個證明過程證明了什麼？請描述你思考的過程？

	為什麼你認為步驟一和步驟二交換後是正確(或不正確)的？ 為什麼你認為步驟二和步驟三交換後是正確(或不正確)的？ 對於這個證明過程，你有沒有什麼相關的問題想要提出來的？
針對第二種證明方法	同上
綜合回顧	如果每一個證明的滿分都是 5 分，你會給第一種證明幾分？你會給第二種證明幾分？你給分的標準是什麼？ 哪一個證明方法比較需要多種的思考策略？ 你比較喜歡哪個證明方法？ 你覺得老師比較喜歡哪個證明方法？ 從這些證明中，你學到什麼？ 在這些證明中，還有什麼是你不懂的？ 你喜歡的證明和老師喜歡的證明有何不同？ 你認為有哪些原因可能讓你讀不懂證明？

第四節 研究方法和樣本

一、研究方法

為了探討幾何證明閱讀理解各面向間的關係結構以及形成幾何證明閱讀理解的預測模式，研究者擬以問卷調查法來蒐集資料，再利用統計分析來進行關係結構與預測模式的估計與考驗。至於探討學生讀證明的認知特徵，研究者擬以訪談法來蒐集資料，抱持目的導向的探索來分析不同學生的各種反應，逐步歸納分析重要的向度和範疇。本研究的目的有二，一是探討中學生在幾何證明閱讀理解認知面向上的特徵，二是探討中學生的知識和邏輯推理對其幾何證明閱讀理解的影響。這兩個研究目的的本質主要不在於解決或改進某一教育問題(應用性研究)，也不在於由實際行動中發掘問題並探討解決問題的行動歷程(行動研究)；而是朝向能深入瞭解中學生幾何證明閱讀理解的潛在規律與特徵，以建立關於幾何證明閱讀理解的模式或局部理論，

所以根據研究目的將本研究定位於「基礎性研究」。綜合研究目的與量化和質性的研究方法後，可將本研究設定為描述性研究，主要在描述、分析與解釋中學生幾何證明閱讀理解的表現與認知面向上的特徵。以下就量化資料和質性資料的分析方法作更詳細的介紹。

(一) 量化資料的分析

1. 分析內容

每位學生的量化資料來自於知識、邏輯推理、一階段或二階段幾何證明閱讀理解的實際表現與自我評估等四份子測驗。在回答研究問題「中學生在各面向幾何證明閱讀理解實際表現之間或自我評估之間的關係結構」時，是以學生在各面向的得分作為分析的資料。在回答研究問題「以知識、邏輯推理對幾何證明閱讀理解實際表現或自我評估的預測模式」時，是以學生在各面向的得分總和作為學生在幾何證明閱讀理解的表現。

2. 編碼與給分

如果是勾選的則以選項順序編碼(1、2、3、4、5)，如果是開放式的問題，則以完整、太少無誤、太多無誤、其他錯誤等四種類別作為第一階段編碼的架構，然後以五個國三班級的學生反應來調整編碼。調整的過程除了一方面蒐集各類別的實例，一方面經由分析比較各實例所呈現想法的優劣，作為往後給分的依據。接著，再以另一個國三班級的學生反應來檢驗編碼的一般性，當發現無需增加新的編碼即可將學生的反應編入既有的類別時，即形成所有問卷編碼的標準。

給分方式採部分給分或二元分數(0、1)。原則上，完整的給 2 分，太少或太多無誤給 1 分，其餘 0 分。詳細的編碼及給分的方式請見附

錄五。在資料校正的部分則先檢查是否出現非定版編碼的編碼，並挑出知識問卷中敘述和心像分數相差 4 分者作為二次確認編碼的對象。最後分析資料時，先刪除不完整的受試者。也就是說，只做知識與邏輯推理問卷或是只做甲／乙式問卷的受試者資料則不納入分析。

3. 統計方法

以獨立樣本 t 考驗比較不同群學生在某觀察變項上的平均值差異，以相依樣本 t 考驗比較同一群學生在兩個不同觀察變項上的平均值差異。採用內部一致性信度來分析問卷信度，以因子分析法來呈現各個評估理解面向內的試題對該理解面向總變異數的解釋程度。由於多元尺度法是沒有模式的假設，比因子分析更合適也更容易用來解釋在各理解面向間的關係，所以以多元尺度法來分析學生在實際表現與自我評估各理解面向間的關係結構。在預測模式的估計和檢驗上，則採用複迴歸分析法來完成知識、邏輯推理對幾何證明閱讀理解實際表現或自我評估的預測模式。

(二) 質性資料的分析

1. 分析內容

當學生在數學學習的過程中需要面對許多的論證時，他們如何評估不一致或不同方式的論證？如何處理自己的理解或不理解呢？是什麼樣的因素妨礙了他們更新自己的理解？沒有思考的閱讀自然無法建構資訊的意義，沒有推理的閱讀則失去預測未知資訊的可能。而探討這些問題，即為了瞭解阻礙中學生評析幾何論證之有效性的認知特徵。在此先不明確定出何謂認知特徵，主要是為了避免事先的設定影響研究者理解原案資料的偏差，希望能從跨原案的分析中形成一些

有意義的組型，再歸納出中學生評析幾何論證之有效性的認知特徵。

2. 分析的階段

研究者依照 Denzin (1989) 所提出解釋的五個階段：解構(deconstruction)、捕捉(capture)、括號起來(bracketing)或還原(reduction)、建構(construction)、脈絡化(contextualization)來描述本研究分析的階段。在解構的階段，即進行前置研究的探索來獲得主要研究中得以聚焦的問題。在捕捉的階段，研究者藉由訪談設計來蒐集學生反應的事例。在括號起來或還原的階段，研究者以不同的理解面向來整理感受學生的反應，也以不同學生對不同論證的評估來形成特殊反應的組型。在建構的階段，重新整合不同的組型以形成更具結構性的結果。在脈絡化的階段，即透過和文獻上的理論對話來找到本研究結果的貢獻。

3. 信效度的處理

考量資料來源的信效度，採用兩種訪談活動和半結構式訪談的問題設計，以期能有效探討學生解讀證明文本的認知特徵以及妨礙學生和證明文本持續意義協商的因素；採用學生回答不同面向的問題作為資料的三角測定，以期能增加資料的可信度。考量資料分析的信效度，透過研究者與指導教授或研究社群的討論，來完成不同研究者的三角測定。透過應用理論上的語言來描述研究結果以及和相關理論的對話，來評估本研究分析結果的有效性。

總之，在透過前置研究所形成的架構和臆測後，先確保資料來源的信效度。再藉由不同研究者的討論和與理論對話的方式，讓本研究探索和歸納的結果能有效地瞭解中學生在幾何證明閱讀理解認知面

向上的特徵，且讓此結果經由論文發表也得到其他研究社群的認同。

二、研究樣本

將以不同的研究階段分為前置和主要，以不同的研究方法分為問卷調查和訪談，共形成四種不同情形來描述本研究的研究樣本。

(一) 前置研究問卷調查的樣本

在前置研究中，一方面評估問卷試題的合適性，另一方面也顧及主要研究所需受試年級的範圍：國三至高二的學生，而選擇台北市某明星高中二年級的學生以及台北縣市常態偏班的國二學生各一班。各問卷詳細的取樣及有效人數，請見表 3-4-1。

表 3-4-1：前置研究取樣人數及有效樣本

	樣本來源	取樣人數		有效樣本	
幾何知識與邏輯推理能力問卷	台北市國二	43	90	31	75
	台北市高二	47		44	
自我評估與閱讀策略問卷	台北縣國二	41	88	40	79
	台北市高二	47		39	
幾何證明閱讀理解問卷			47		34
	台北市高二	47		34	

(二) 主要研究問卷調查的樣本

由於幾何證明的學習被安排在國三上學期的課程，以及邏輯單元被安排在高一上學期的課程，為了比較國三和高中這兩群受試者在幾何證明閱讀理解的表現有哪些共通性，所以受試對象必須遍及國三、高一、高二的學生。在實際情況中，以全國學生為母體的隨機抽樣程序來選擇樣本，並非研究者個人所能勝認，所以本研究主要以方便抽

樣來選擇樣本。雖然抽樣方式採方便取樣，希望藉由多個不同縣市以及不同學校的散佈性，以達平衡地域性差異與城鄉差距，同時彌補無法隨機抽樣的限制。主要研究的取樣範圍請見表 3-4-2。另一方面考慮到國三生即將面臨基本能力測驗的學習壓力，為避免干擾教師的教學進度同時顧及學生在一節課內完成測驗所需的認知負荷，本研究將施測工具分成一階段演繹式幾何證明(甲式)和二階段演繹式幾何證明(乙式)，由數學教師將班級學生均分成能力相當的兩群，一群填寫甲式另一群填寫乙式，正式施測的題本，請見附錄二(甲式 1 至 2 頁)和附錄三(乙式 1 至 2 頁)。

表 3-4-2：主要研究的取樣範圍

地域	縣市		學校數		班級數	
	國中	高中	國中	高中	國三	高一、高二
北	台北市、台北縣、桃園縣	台北市、台北縣、桃園縣	6	6	7	10
中	彰化縣、南投縣、嘉義縣	台中縣	4	1	4	2
南	台南縣	台南縣、高雄市、屏東縣	2	4	3	8
總計	7	7	12	11	14 (共 443 人)	20 (共 766 人)

(三) 前置研究訪談的學生

前置研究訪談的對象以 5 位高一學生為主，此 5 位學生都已學過邏輯推理單元和反證法的證明。訪談的目標是針對數學證明閱讀理解的現象探討和形成主要研究中聚焦的訪談問題。

(四) 主要研究訪談的學生

主要研究訪談的對象包含國中學生 5 位和高職一年級學生 21

位，訪談的問題以「分類活動」以及本研究所發展的幾何證明閱讀理解問卷為主。另外 5 位訪談的對象是北市前三志願某高中二年級的學生，訪談的問題以「偵錯活動」為主。

第五節　研究過程

本研究希望藉由幾何證明閱讀理解中各相關因素間的探討，希望發展一個能合理解釋與預測幾何證明閱讀理解的模式。本著模式產出的取向，研究過程主要分為五個部份：(1)前置準備階段，(2)前置研究階段，(3)前置階段的分析，前三部份著重於瞭解現象和評估目的與方法，(4)主要研究階段，(5)資料分析及論文撰寫階段，以下則詳細說明各部份主要進行的工作：

一、 前置準備階段

(一) 閱讀相關文獻

從 89 年參與林福來教授主持的「青少年數學論證發展」研究計畫時，開始接觸關於數學論證的學習與教學，其間也曾針對學生下定義的活動作深入的探討。漸漸地，累積不少關於數學論證教育研究的背景知識，得知數學論證的研究觀點包含格式觀、活動觀、認知系統觀、寫作溝通觀、應用工具觀、探究觀等等(Balacheff, 2002)，但似乎還少了什麼？由於數學論證和外語的學習都不是在日常的生活環境自然接觸得到，而且也分別受到非形式演繹和母語的干擾，所以將數學論證的學習類比為一種外語的學習，則在數學論證上也可推出閱讀理解的學習活動。依據閱讀理解的觀點出發，發現相關的研究文獻並

不多，所以主要以數學證明的瞭解和閱讀理解理論充實本研究的背景知識。

(二) 現象探討

經由檢討教材結構和內容、請教數學家的看法、初步瞭解學生閱讀數學證明的特徵，作為研究者對於數學證明的閱讀理解親自體驗此現象的開端，也有助於研究者對於什麼是幾何證明的閱讀理解以及哪些心智因素影響學生讀證明的表現等問題產生感覺和想像的依據。

(三) 編製問卷

根據所閱讀之文獻、學校教材以及訪談數學家形成問卷工具的設計架構，再參考 3 位高中生的訪談資料來充實問卷的內容。

二、前置研究階段

(一) 問卷施測的準備和聯繫

由於前置研究包括評估三份問卷的試題，每份問卷施測時間至少需要一節課的時間，而且 SARS 疫情尚未穩定加上 6 月份又是學期即將結束的時間，學校課程和既定活動的安排都已受到影響，所以只有高二學生完成三份問卷，其餘樣本則分別完成三份問卷中的一份。

(二) 問卷施測

研究工具中的問卷一、問卷二、問卷三均商借數學課的時間進行施測，三份問卷的測驗時間預計為 45-50 分鐘，可依學生的作答情形調整作答時間，原則上是讓每個學生都有充分的作答時間。施測時由合作的數學教師監考，指導學生完成整個問卷作答流程，並請合作的

數學教師在測驗過程中，將學生所提出關於本測驗題目的疑問記錄下來。

(三) 個案訪談

訪談 5 位高一學生，探討他們在建構證明、推理過程、證明概念、證明的閱讀理解上的心智特徵，除了對於學生的閱讀理解形成更具體的臆測，也作為主要研究中設計訪談架構的依據。

三、前置階段的分析

(一) 量的資料整理與分析

依據幾何知識問卷和幾何證明閱讀理解問卷的評分標準，由兩位數學系學生對於回收問卷進行批閱和給分，並依試題編號將受試者的作答結果或分數一一建入檔案，再由研究者校定一次，其一致性係數均在 95%以上。在資料處理方面，研究者採用 EXCEL 和 SPSS 統計套裝軟體進行分析的工作。

(二) 質的資料蒐集與分析

首先由研究者擬定訪談目標和訪談問題，並和參與訪談的數學教師溝通討論後，透過合作的數學教師對於任教的班級學生進行訪談。研究者以 Toulmin 論證分析的架構來整理學生理解證明時所擷取的證據和理由，呈現第一次訪談內容的不足和需要確認的部分，再請合作的數學教師或透過 e-mail 的方式補充有待釐清的資料。

(三) 撰寫研究計畫

先整合分析前置研究的結果，讓研究者有機會再回顧原始的文獻

與搜尋新的文獻、評估和調整所發展的研究架構和工具，同時也替主要研究建立理論的和現實的基礎。透過研究計畫的書面和口頭報告，讓指導教授和其他專家提供寶貴的意見，以補救研究者思考不周之處。

四、主要研究階段

(一) 問卷的調整和施測

參考前置研究分析的結果和專家的意見，修改和調整原始的測驗工具。本研究工具在民國 92 年 9 月份定稿，接著和各縣市聯絡認識的或他人介紹的教師，並溝通問卷施測的細節與回收問卷的方式與時間，希望以 92 學年上學期(10 至 11 月)作為施測的時間。

(二) 資料處理與選樣訪談

量的資料處理方式與過程大致上和前置研究相同，只是再以 SPSS 統計裝軟體進行模式的參數估計和考驗。施測後，也從鄰近學校選取樣本由研究者進行半結構訪談。質的資料則先轉錄為文字稿，以利於後續研究的詮釋與驗證。

五、資料分析及論文撰寫階段

本階段針對上述過程中所蒐集量和質的資料進行統整，最後除了描述中學生幾何證明閱讀理解的現象和各面向間的關係性結構，並建構中學生幾何證明閱讀理解模式。本論文以之前撰寫的研究計畫為藍圖，將前置研究與主要研究的成果融入其中。圖 3-5-1 表示本研究之研究流程圖，主要包含確立研究方向、擬定計畫和現象探討、執行研究、初步與深度研究分析、撰寫論文。

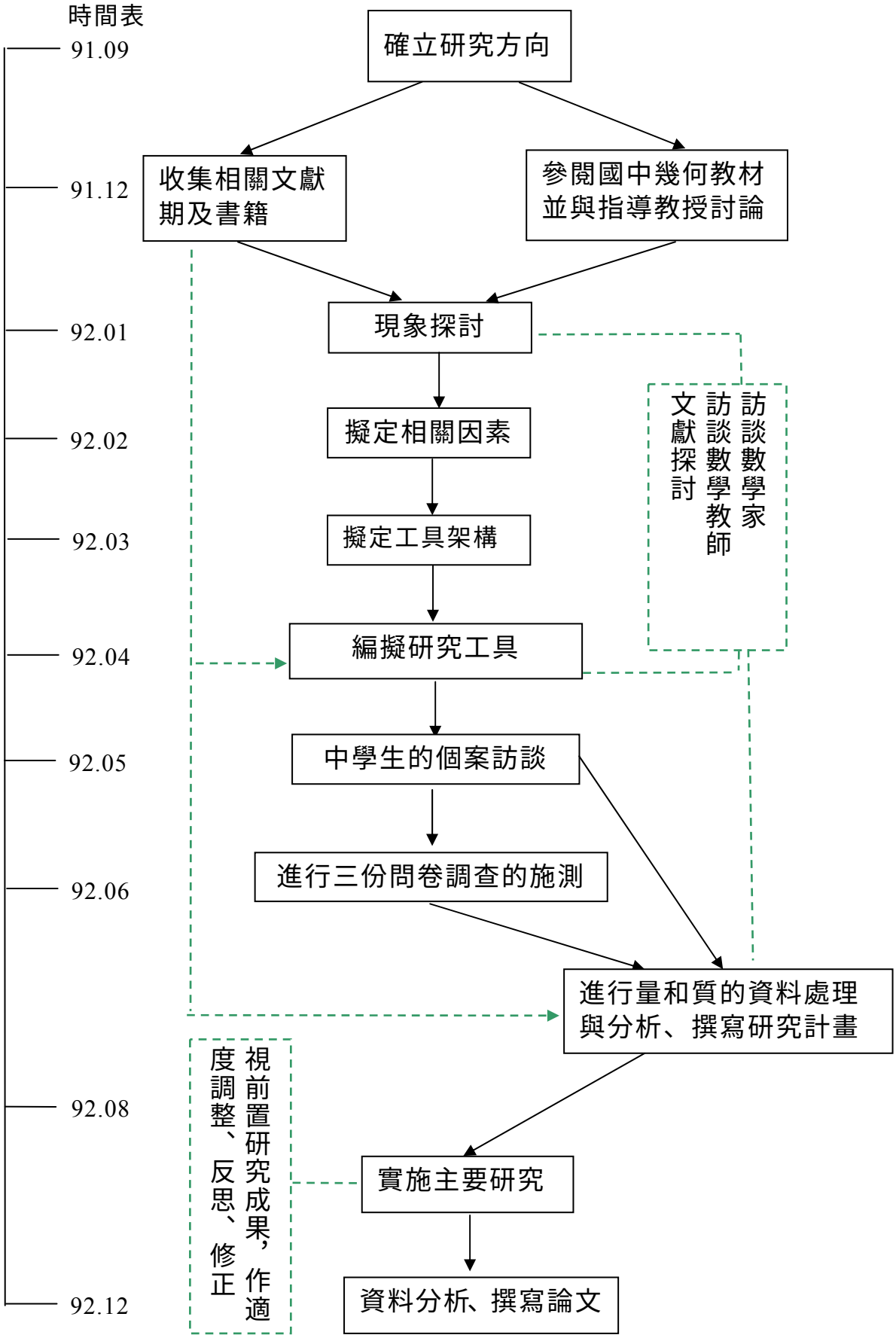

時間表
91.09
91.12
92.01
92.02
92.03
92.04
92.05
92.06
92.08
92.12
確立研究方向
收集相關文獻期及書籍
參閱國中幾何教材並與指導教授討論
現象探討
擬定相關因素
擬定工具架構
編擬研究工具
中學生的個案訪談
進行三份問卷調查的施測
進行量和質的資料處理與分析、撰寫研究計畫
實施主要研究
資料分析、撰寫論文
訪談數學家
訪談數學教師
文獻探討
視前置研究成果，作適度調整、反思、修正

圖 3-5-1:研究流程圖

第六節　預期研究成果的貢獻

一、本研究在理論上可能的貢獻

(一) 認知

做證明不只是數學家的活動也是數學教育努力探討的重要議題之一，從分析學生做證明的能力、對於什麼是證明所抱持的觀點、臆測與檢驗的方法，都突顯學生不僅在做證明時面臨許多的困難，也看到數學教育者主要以學生在臆測的敘述或已知的定理所做的解釋來探討學生做證明時的思考特徵、或是以學生對於不同媒介所做的解釋來探討論證教學的策略。但本研究提出新的研究觀點來分析學生理解證明的認知特徵，透過閱讀理解的角度來探討學生讀證明的表現與認知特徵，所提出幾何證明閱讀理解模式，一方面作為解釋學生理解閱讀證明表現的基本模式，另一方面用來討論知識、邏輯推理和幾何證明閱讀理解間的認知關係，同時也是往後預測閱讀「有誤」證明的無效性或局部有效性的理論基礎。

(二) 學習

分析學生在表層、邏輯定位、摘要、一般性、應用等理解面向的關係結構，深入瞭解學生在學習幾何證明前的理解程度與困難，除了檢視學生在學過幾何證明後閱讀理解的特徵，也透過此成果瞭解既有的論證教學是否也提昇了學生讀證明的表現。此外，本研究也初步形成這幾個面向間的假設性學習路徑，先用來探討路徑中相鄰兩站間的認知需求差異，再透過此差異來設想幾何證明閱讀理解教學的具體策略。

(三) 研究方法

評析一個證明是否有效是一件複雜的認知工作，許多時候這種工作的過程通常是不自覺的。所以對研究者來說，探討學生如何讀證明自然是比探討學生如何做證明呈現更多的研究限制與挑戰。而且在文獻上也發現大學生說自己是如何閱讀證明和真正在執行時的表現是有所差異的(Selden & Selden, 2003)。本研究的對象包含尚未正式學過幾何證明的學生和學完後的高中生，如何探討這些學生「讀到的證明是什麼」以及「讀懂了什麼」更是一項棘手的任務。本研究的貢獻之一即設法克服這個障礙，設計「分類活動」和「偵錯活動」的主題式訪談問題，希望在盡量不受訪談者的引導介入之下啟動學生表達自己的理解。

另外，Duval (2002)提出在幾何論證中學生可能面臨認識上的困難是，辨識敘述在證明過程中真值(認識的真值、邏輯演繹的真值)與敘述地位(前提、引用的定理、結論)的改變。但 Duval 也同時提出一個待解的問題：如何才能知道學生真正理解數學證明的功能而不只有表層的數學證明成果仍是一個開放性問題？但此問題的前置問題是學生理解了證明過程中的什麼？知道學生所理解的證明才能進一步知道學生是否真正理解數學證明的功能。而本研究所設計的測驗工具和訪談工具即先解決重新擬定的前置問題，將來也可對照寫證明的問題類型，進一步探討讀和寫之間的關係。

二、本研究在實務上可能的貢獻

(一) 教材

學習數學的最大障礙之一是數學證明，數學證明所依循的基本規則即是邏輯。至於基本邏輯的教學安排，仍有不同的看法。有些人贊

同透過各單元的數學論證即可學習各種基本邏輯，有些人則認為學習高中數學之前應該先學習此規則。在上一版的高中數學內容並沒有獨立基本邏輯的單元，而這一版高中數學則列入基本邏輯的單元，而且新版的課程綱要似乎又要將此單元改在附錄當中。如果我們已經把數學證明作為高中數學的教學目標之一，又認為邏輯推理能力和數學證明有密不可分的關聯，那麼就中學生而言，數學證明和邏輯推理能力的發展是否呈現對等的交互支撐？高中的邏輯教材是否需要修改或刪減？本研究的成果將可以就這些問題提出若干建議。

(二) 教學

一般論證的教學主要著重在教導學生如何做證明，或是受到基本學力測驗題型只有選擇題的影響，大部分也只著重在微觀和局部的推理上，而忽略了整體證明的組織結構。本研究提出理解證明的五個面向，既可符合現在測驗題型的需求又能兼顧微觀、局部和整體的推理組織。如此，除了具體擴展論證教學的領域，也真正滿足實際教學的需求。

(三) 評量

可以將本研究從閱讀的觀點來探討學生的證明理解應用到數學證明的評量上，讓題目格式維持在選擇題的情形下，也能擴充評量的內涵。本研究依照表層、邏輯定位、摘要、一般性和應用等五個理解面向，已具體實踐在一階段和兩階段幾何證明的測驗設計。往後設計代數論證時，也可先參考這五個理解面向再作調整和比較。

第七節　研究限制

本研究雖在各方面考量力求周延，但因研究者之能力所限，仍無法避免抽樣上之限制，主要為立意取樣；另外研究樣本之情意因素以及資料詮釋過程之主觀看法，亦是研究者無法掌握之主要限制，茲將本研究之研究限制說明如下。

一、研究方法之限制

(一) 抽樣之限制

本研究中的樣本班級雖然遍及各縣市，但礙於現實因素的考量，仍無法採用隨機抽樣的方法。可是，如果表現情形通過常態分佈的考驗，應可適度相信本研究樣本足以代表中學生母體。就個案訪談而言，礙於研究者時間及能力所及，只能以方便原則就近訪談台北縣市的學生。

(二) 研究樣本受訪意願之限制

由於研究中欲探討中學生幾何論證之閱讀理解，因此必須透過較長時間的訪談才能瞭解其思考歷程，另一方面大部分訪談時間是利用午休時間，學生的精神狀態不見得可以一直保持清醒或表現得和平常一樣，其作答態度及思考方式在這個期間是否穩定，也是研究者難以掌握的。

(三) 詮釋資料主觀性之限制

由於本研究質的資料採用詮釋性研究方法，以少數研究樣本回答之內容進行較深入的分析，難免因個人詮釋角度不同以及主觀觀點，

而造成不同的推論。但研究者仍儘量根據文字所述並與指導教授進行討論，以呈現較客觀之研究結果。

(四) 詮釋資料理論依據之限制

有不同的模式或理論可以探討閱讀數學論證的現象，但本研究主要從數學理解和認知運作來描述解讀數學論證的心智活動與特徵。所描述的現象難免受限於理論的假設與焦點，因此還有許多閱讀文本的特徵是被忽略的，例如：記憶容量，記憶類型，異詞同義的比較，…等等。

二、研究工具之限制

(一) 問卷工具量化資料之限制

本研究在測量閱讀理解的監控和閱讀策略的執行兩方面的問卷上，均採用了 Likert 五點量表的形式，如果配合各變項的偏態在 ± 1 以內時，以 Pearson 相關進行因素分析之偏誤相當小。但閱讀理解表現的各面向分數有些不足 5 分而且選擇題的猜測作答也是研究者無法控制，以 Pearson 相關進行因素分析之偏誤可能也較大。

(二) 問卷內容之限制

研究工具中各以一題證明題分別是 3 個論點和 5 個論點的證明過程，來代表一階段和二階段演繹式幾何證明，所涉及的幾何知識內容主要在於平行、SAS 全等性質、中垂線、等腰三角形和平行四邊形，尚有其他如長方形、正方形、菱形、圓形等內容。雖然研究所得的結果未必可一般化到所有的國中幾何證明題，但不同內容對於各因素間的關係之影響，已經比對於單一因素上的表現之影響來得少。