

第三章 系統架構設計

3-1 系統機構的建構

在真實的世界中，絕大多數的被控制系統，諸如電機系統、氣液壓系統或其它機械機構等系統，在其相關各變數之間都包含著非線性的關係。對於這些非線性系統的動態方程式的推導，其方法是相當困難的，因為所牽涉的數學形式大多是非常繁複而不容易求出的。自從電子計算機(電腦)發明以來，人們嘗試利用它來解決伺服控制的數學模型的推導與模擬，進而設計實現自動控制，已獲得顯著的成果。加上近年來電腦資訊產業的蓬勃發展，利用電腦解決有關非線性系統的數學模型，已經是現代數位控制研究的主要方法。本研究首先針對可調整擺錘之倒單擺平衡控制與追跡控制系統，先做一番數學模型的推導，再利用現代控制的理論做為設計的方法，進一步設計本研究所要控制器，進行模擬，以達到本研究之實作的預備，以利所要達到的研究目的。

本論文所要研究之可調整擺錘狀態之倒單擺系統，如下圖 3-1 為其系統的機構立體圖，由此可以看出可調整擺錘在擺杆上的位置，並由此可以看出機構的全貌，進而對於本系統機構設計和建造，有了概觀性的了解。

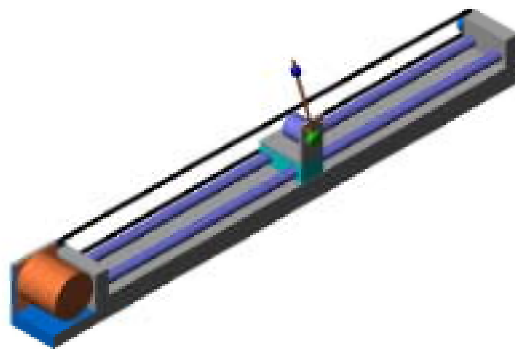


圖 3-1 可調整擺錘狀態之倒單擺系統之機構立體圖

圖 3-1 所示的機構設計立體圖，主要是由兩個部份所組成，一個是帶有擺錘的倒單擺模組，而另一個是一維直線運動的床台模組。分別為下面圖 3-2，圖 3-3 所顯示的外觀。

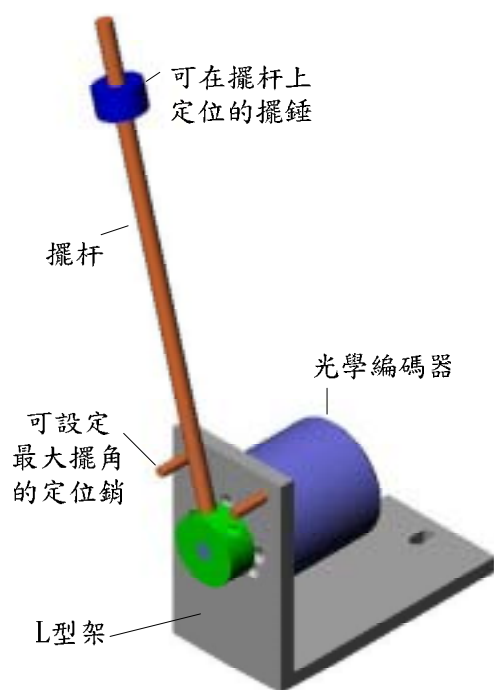


圖 3-2 含擺錘之倒單擺模組

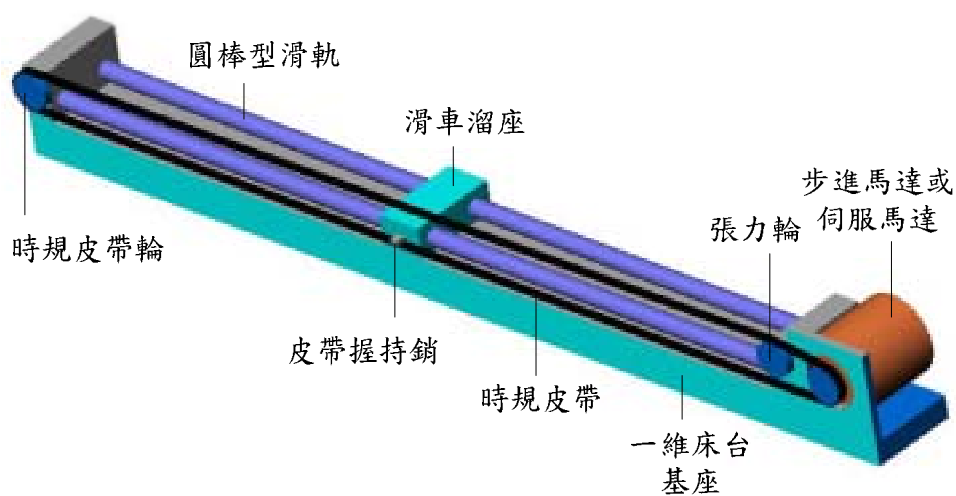


圖 3-3 一維線性運動的床台模組

3-2 開發控制系統的流程

利用電腦輔助設計是一門以電子計算機為工具進行的控制系統設計與分析的技術。大部份科學研究和工程技術人員常常會為如何寫出控制程式的演算法而感到頭痛，主要原因是，當計算牽扯到矩運算或電腦繪圖時，利用 FORTRAN 和 C 語言進程式設計是一件很麻煩的事。不但需要對所利用的演算法有徹底的了解，還需要熟練地掌握程序語言的編輯方式。

由於本研究所運用之控制演算法，將會運用到 ANFIS，而在 MATLAB 中已內建了一些 ANFIS 相關的函數，可以讓控制系統的設計很容易的進行有關 ANFIS 網路的學習與回想等功能。

採用 MATLAB 進行控制系統的輔助設計和模擬一般分為建模、分析、模擬和實現等四個部份，如下圖 3-4 顯示了利用 MATLAB 進行控制開發的不同階段以及相對應的 MATLAB 工具。

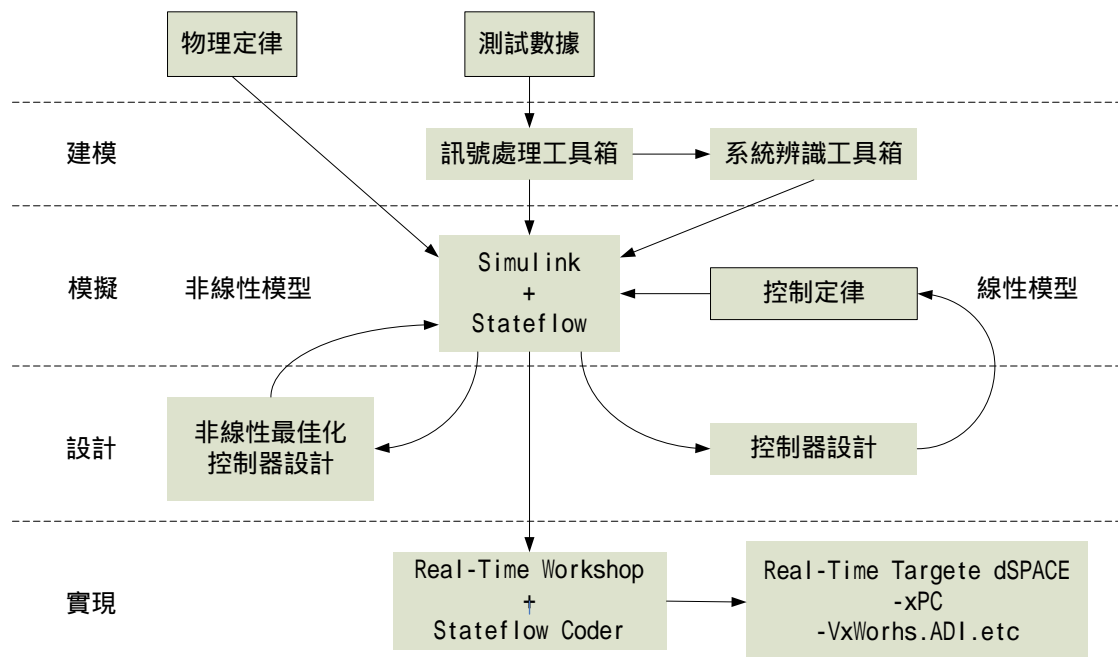


圖 3-4 基於 MATLAB 控制系統設計的開發流程

3-3 可調整擺錘之倒單擺系統的數學模型

本節將說明可調整擺錘狀態之倒單擺系統數學模型的推導過程，其中倒單擺之擺杆上有帶一個可以替換不同質及調整固定位置的擺錘。所要控制的兩個對象是擺杆的擺角及擺錘質心在滑車在水平運動方向上的投影點位置。

要對被控制系統進行計算及模擬，一般必須先要對被控制對象建立數學模型，數學模型是控制系統模擬的基礎。控制系統的數學模型通常是指動態數學模型，自動控制系統最基本最重要的數學模型是動力微分方程式，它反映出機構和系統之間動態運行的規律。應用拉普拉斯轉換求解線性常微分方程式時可引出了一個轉移函數的式子，以及以轉移函數為基礎的控制方塊圖，這些都是所謂的數學模型。

針對倒單擺擺杆附加上可調整擺錘之運動，可做如下之數學分析，此處只考慮滑車直線往覆運動時，擺杆平衡控制的問題。即倒單擺系統只在如同圖 3-5 所建的可調整擺錘狀態之倒單擺系統的物理模型。在圖中，表示位置變數的 x ，為擺錘重心在水平座標的投影位置值，這與以往絕大部份是分析滑車的位置而去推導數學模型的研究不同。

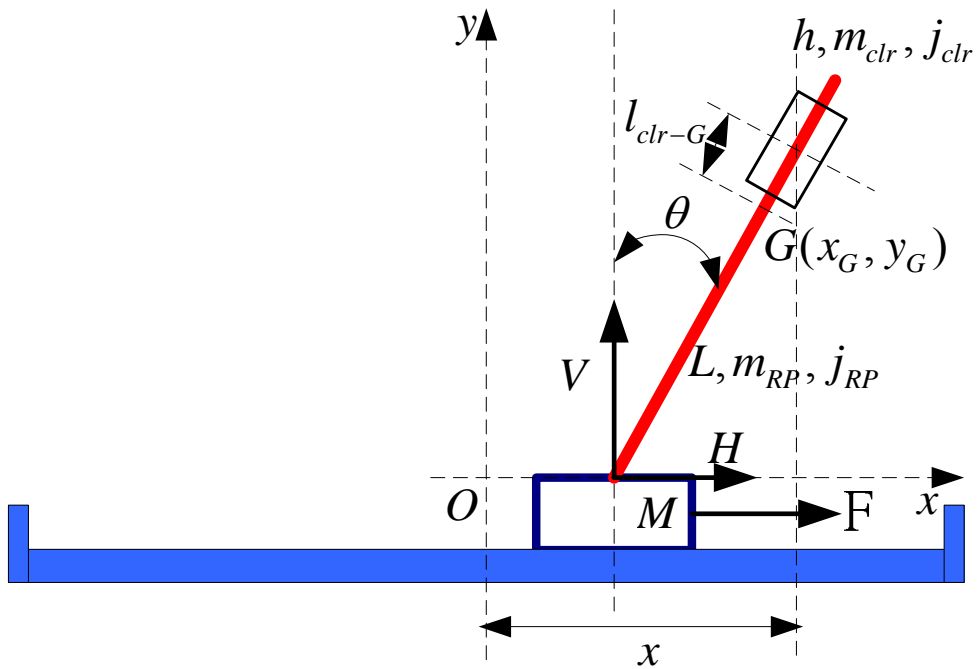


圖 3-5 倒單擺含擺錘的倒立平衡與追蹤控制系統之物理模型

如下 3-1 表為本研究之可調整擺錘之倒單擺系統在本研究的實際物理參數及其代號，

表 3-1 倒單擺滑車系統在本研究的實際物理參數

系統參數	數值	單位
g : 重力加速度	9.8	m/s^2
M : 滑車質量	0.2568	Kg
m : 擺杆質量	0.0668	Kg
j : 擺杆慣性矩	0.000501	$Kg \cdot m^2$
L : 擺杆長	0.3	M
$f_c \dot{x}$: 滑車在軌導上的摩擦力	3.83	$Kg \cdot m^2/s$

$f_p \dot{\theta}$: 擺杆在軸承上的摩擦力	0.00218	Kg-m ² /s
R : 擺錘外徑	0.009	M
r : 擺錘孔徑	0.00303	M
m_{clr} : 擺錘質量	0.017	Kg
h_{clr} : 擺錘柱長	0.00992	M
m_1 : 擺錘質量	0.017	Kg
h_1 : 擺錘柱長	0.00992	M
m_2 : 擺錘質量	0.035	Kg
h_2 : 擺錘柱長	0.02004	M
m_3 : 擺錘質量	0.0706	Kg
h_3 : 擺錘柱長	0.04006	M

本系統的數學模型，可以利用工程力學的靜力學和動力學常用的自由體分析法而建立出來。所以在推導系統的數學模型之前，首先要對被控制系統的擺杆和擺錘求解其個別的慣性矩做出如下分析研究。如下圖 3-6，為圓柱體示意圖，根據靜力學推導，其對 x 軸與 y 軸的慣性矩(二次矩)，同為

$$\frac{1}{12} m_{cylinder} (3R^2 + h^2) , \text{ 即}$$

$$j_{yy} = j_{zz} = \frac{1}{12} m_{cylinder} (3R^2 + h^2) \quad (3-1)$$

式中 $m_{cylinder}$ 為圓柱體質量。而對 x 軸而言，其慣性矩為 $\frac{1}{2} m_{cylinder} R^2$ ，即

$$j_{xx} = \frac{1}{2} m_{cylinder} R^2 \quad (3-2)$$

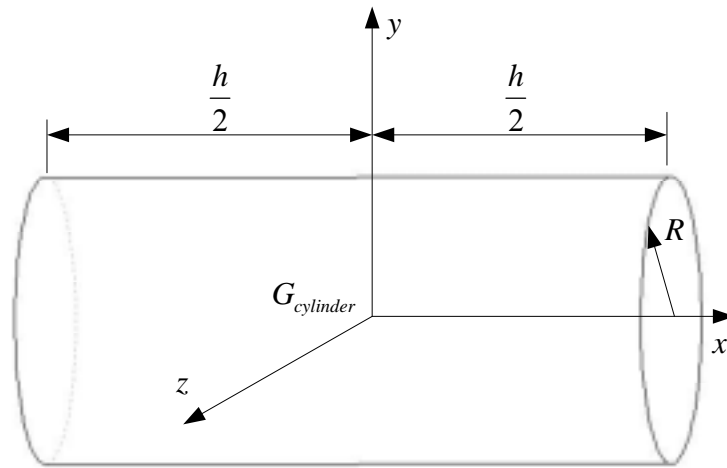


圖 3-6 圓柱體

在上述兩式中，以(3-1)式可為倒單擺帶擺錘的數學模型分析所用。如下圖 3-7 為擺錘示意圖。擺錘軸心有一為半徑為 r 的孔洞，用來圈套固定在倒單擺擺杆之上，其孔徑與倒單擺擺杆的半徑相同。擺錘的慣性矩可利用前述求圓柱體慣性矩公式來推求，根據靜力學有關複合體之合成慣性矩的求法，可推求擺錘慣性矩為

$$\begin{aligned} j_{ctr} = j_{yy} = j_{zz} &= \frac{1}{12} m_{ctr} (3R^2 + h^2) - \frac{1}{12} m_{ctr} (3r^2 + h^2) \\ &= \frac{1}{4} m_{ctr} (R^2 - r^2) \end{aligned} \quad (3-3)$$

式中 m_{ctr} 為擺錘的質量。

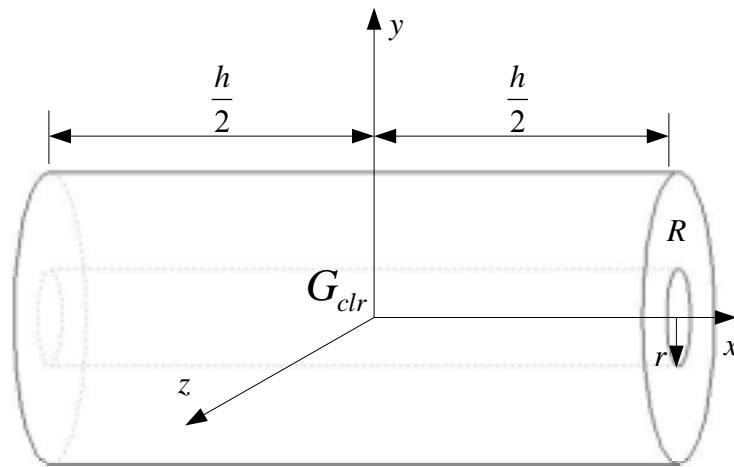


圖 3-7 擺錘立體圖

當擺錘圈套固定在倒單擺擺杆上，要求其對通過含擺錘之倒單擺擺杆的重心且平行角度編碼器軸心方向(z 軸方向)的慣性矩，其求法有兩個問題要先了解，一是在整個倒單擺擺杆(含擺錘)的重心座標位置(合成重心)為何？尤其是距擺杆底瑞距離為何？是另一是要如何求出倒單擺擺杆與擺錘，個別對通過所求出的合成重心，在 z 軸方向的慣性矩及此兩個個別慣性矩的合成是多少？

如下分析，首先考慮重心對擺杆底瑞距離的求法。如下圖 3-8 所示，根據靜力學的推算，重心 G 對擺杆底瑞的距離 l_G 為

$$l_G = \frac{ml + m_{clr}l_{clr}}{m + m_{clr}} \quad (3-4)$$

式中 l_{clr} 為擺錘重心 G_{clr} 至擺杆底瑞(如圖示的原點 O)的距離。

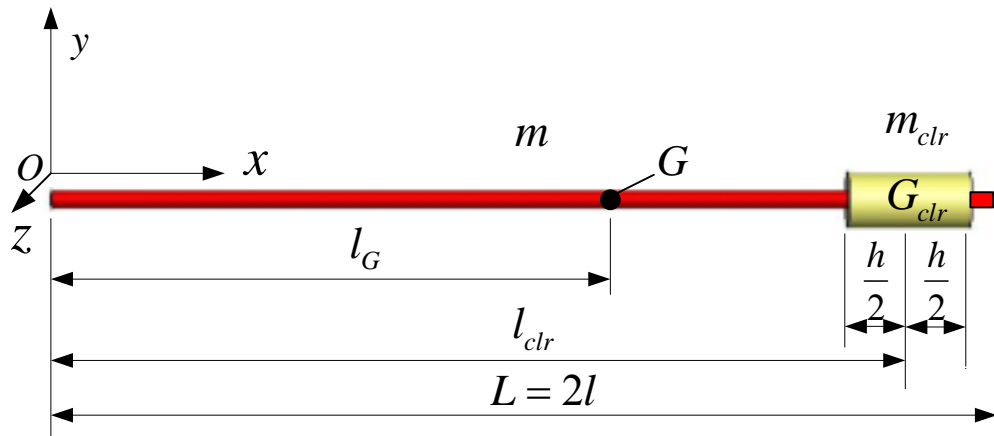


圖 3-8 含擺錘之倒單擺的重心位置示意圖

由(3-5)式之推算，吾人可得知擺錘重心至整個倒單擺擺杆含擺錘的合成重心的距離為，

$$l_{clr-G} = l_{clr} - l_G \quad (3-5)$$

以下討論如何求得單擺擺杆與擺錘，各別對通過所求出的重心且平行 \$z\$ 軸方向的慣性矩及各別慣性矩的合成。首先，先了解在靜力學中，所謂的質量平行軸定理，以本研究所述之含擺錘的倒單擺擺杆為例，擺錘質量對通過整體的重心 \$G\$ 在 \$z\$ 軸方向的慣性矩可為下式所求得

$$j_{clr-G} = \frac{1}{4} m_{clr} (R^2 - r^2) + m_{clr} (l_{clr-G})^2 \quad (3-6)$$

其中 \$\frac{1}{4} m_{clr} (R^2 - r^2)\$ 為式(3-6)所求出得來的，對通過擺錘自身重心在 \$z\$ 軸方向上的慣性矩。

此外，對於倒單擺擺杆而言，由於其為細長棒(長寬比超過 1 比 20)，所以擺杆對於通過無擺錘擺杆重心(與杆端的距離為 \$l\$)在 \$z\$ 軸方向的慣性矩為，

$$j_p = \frac{1}{12} m_p l^2 \quad (3-7)$$

而其對整體的重心在 z 軸方向的慣性矩，可為下式所求得，

$$j_{P-G} = \frac{1}{12} m_{clr} l^2 + m_{clr} (l_G - l)^2 \quad (3-8)$$

故倒單擺擺杆含擺錘整體對通過重心在 z 軸方向的慣性矩為

$$J_{RP} = J_{P-G} + J_{clr-G} \quad (3-9)$$

式中 j_{RP} 為整體含擺錘之倒單擺，對通過所求整體重心在 z 軸方向上的合成慣性矩(Resultant of Inertial)。

擺杆與擺錘的總質量(Resultant of Mass)為

$$m_{RP} = m_p + m_{clr} \quad (3-10)$$

式中 m_p 為擺杆質量， m_{clr} 為擺錘質量。

以下對本研究機構系統的自由體圖進行數學模型的推導，圖 3-5 中各符號所代表之實際意義分列於表 3-1 中，可調整擺錘狀態之倒單擺平衡控制系統的數學模型即依照表中所述的物理參數，以其物理特性與關係進行推導。假設擺杆偏離垂直線的角度為 θ ，同時假設倒單擺合成重心的坐標為 $G(x_G, y_G)$ ，則有：

$$x_G = x - l_{clr-G} \sin \theta \quad (3-11)$$

$$y_G = l_G \cos \theta \quad (3-12)$$

並且繪出包含擺錘之擺杆與滑車的自由體(Free Body)如下圖 3-9 和圖 3-10 所示，其中 $H = u - f_C \dot{x}$ 。

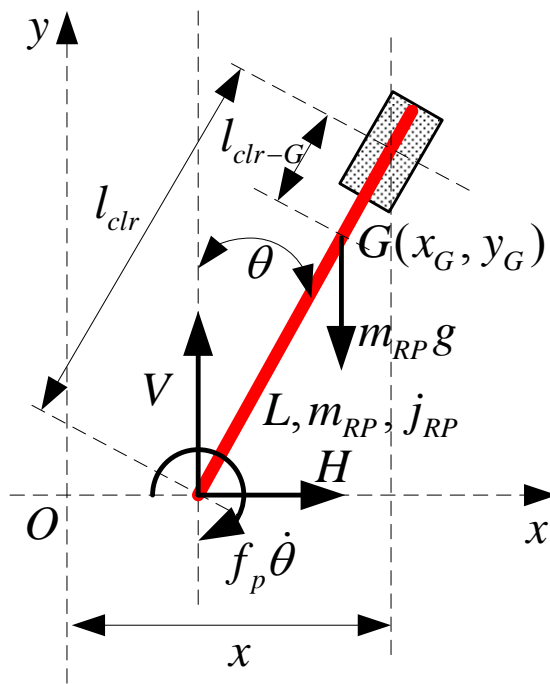


圖 3-9 含擺錘之倒單擺擺杆的自由體

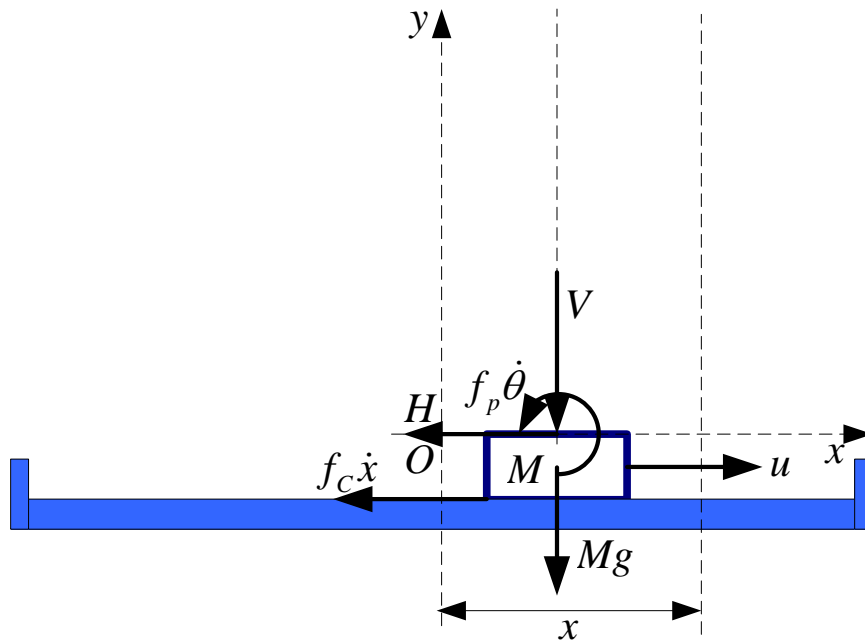


圖 3-10 可調整擺錘狀態倒單擺系統的滑車和床軌自由體

根據牛頓的運動力學定律，可建立含擺錘的擺杆在水平方向和垂直方向的運動狀態方程。擺杆與擺錘圍繞其合成重心的轉動運動，可利力矩方程式來描述：

$$j_{RP}\ddot{\theta} = Vl_G \sin \theta - Hl_G \cos \theta + f_p \dot{\theta} \quad (3-13)$$

式中， j_{RP} 為倒單擺擺杆含擺杆繞其整體重心的轉動慣量。而 $H = u - f_c \dot{x}$ 。

倒單擺擺杆含擺錘的重心的水平運動由下式描述：

$$m_{RP} \frac{d^2}{dt^2} (x - l_{clr-G} \sin \theta) = H \quad (3-14)$$

其中 $H = u - f_c \dot{x}$

倒單擺的合成重心的垂直運動由下式描述：

$$m_{RP} \frac{d^2}{dt^2} (l_G \cos \theta) = V - m_{RP} g \quad (3-15)$$

式中 $m_{RP} = m_p + m_{clr}$ 。

依圖 3-10 擺錘質心在滑車運動方向投影的自由體，滑車的水平運動由下式描述：

$$M \frac{d^2}{dt^2} (x - l_{clr} \sin \theta) = u - f_c \dot{x} - H \quad (3-16)$$

而由於滑軌的限制，故滑車的垂直運動和轉矩為零，故不列出平衡式。

由式(3-13)、式(3-14)、式(3-15)和式(3-16)，做出如下化簡成為式(3-17)、式(3-18)、式(3-19)和式(3-20)，

$$j_{RP}\ddot{\theta} = Vl_G \sin \theta - Hl_G \cos \theta + f_p \dot{\theta} \quad (3-17)$$

$$\begin{aligned}
m_{RP} \frac{d^2}{dt^2} (x - l_{clr-G} \sin \theta) &= H \\
\Rightarrow m_{RP} \left(\ddot{x} - \frac{d}{dt} (l_{clr-G} \cos \theta \dot{\theta}) \right) &= H \\
\Rightarrow m_{RP} \left(\ddot{x} - (l_{clr-G} \cos \theta \ddot{\theta} - l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2) \right) &= H \quad (3-18) \\
\Rightarrow m_{RP} (\ddot{x} - l_{clr-G} \cos \theta \ddot{\theta} + l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2) &= H \\
\Rightarrow m_{RP} \ddot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta \ddot{\theta} + m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 &= H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{RP} \frac{d^2}{dt^2} (l_G \cos \theta) &= V - m_{RP} g \\
\Rightarrow -m_{RP} \frac{d}{dt} (l_G \sin \theta \dot{\theta}) &= V - m_{RP} g \quad (3-19) \\
\Rightarrow -m_{RP} (l_G \sin \theta \ddot{\theta} + l_G \cos \theta \dot{\theta}^2) &= V - m_{RP} g \\
\Rightarrow m_{RP} g - m_{RP} l_G \sin \theta \ddot{\theta} - m_{RP} l_G \cos \theta \dot{\theta}^2 &= V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M \frac{d^2}{dt^2} (x - l_{clr} \sin \theta) &= u - f_C \dot{x} - H \\
\Rightarrow M \frac{d}{dt} (\dot{x} - l_{clr} \cos \theta \dot{\theta}) &= u - f_C \dot{x} - H \\
\Rightarrow M \left(\ddot{x} - \frac{d}{dt} (l_{clr} \cos \theta \dot{\theta}) \right) &= u - f_C \dot{x} - H \quad (3-20) \\
\Rightarrow M (\ddot{x} - (-l_{clr} \sin \theta \dot{\theta}^2 + l_{clr} \cos \theta \ddot{\theta})) &= u - f_C \dot{x} - H \\
\Rightarrow M (\ddot{x} + l_{clr} \sin \theta \dot{\theta}^2 - l_{clr} \cos \theta \ddot{\theta}) &= u - f_C \dot{x} - H \\
\Rightarrow M \ddot{x} + M l_{clr} \sin \theta \dot{\theta}^2 - M l_{clr} \cos \theta \ddot{\theta} &= u - f_C \dot{x} - H
\end{aligned}$$

由式(3-18)和(3-20)經如下推導，而得出式(3-21)，

$$\begin{aligned}
M \ddot{x} + M l_{clr} \sin \theta \dot{\theta}^2 - M l_{clr} \cos \theta \ddot{\theta} &= u - f_C \dot{x} - (m_{RP} \ddot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta \ddot{\theta} + m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2) \\
\Rightarrow M \ddot{x} + M l_{clr} \sin \theta \dot{\theta}^2 - M l_{clr} \cos \theta \ddot{\theta} + m_{RP} \ddot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta \ddot{\theta} &= u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \\
\Rightarrow (-M l_{clr} \cos \theta - m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta) \ddot{\theta} + (M + m_{RP}) \ddot{x} &= u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \\
\Rightarrow -(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta) \ddot{\theta} + (M + m_{RP}) \ddot{x} &= u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2
\end{aligned}$$

(3-21)

由式(3-17) , (3-18)和(3-19)經如下推導 , 而得出式(3-22) ,

$$\begin{cases} m_{RP}g - m_{RP}l_G \sin \theta \ddot{\theta} - m_{RP}l_G \cos \theta \dot{\theta}^2 = V \\ m_{RP}\ddot{x} - m_{RP}l_{clr-G} \cos \theta \ddot{\theta} + m_{RP}l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 = H \\ j_{RP}\ddot{\theta} = Vl_G \sin \theta - Hl_G \cos \theta + f_p \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow j_{RP}\ddot{\theta} =$$

$$\begin{aligned} & (m_{RP}g - m_{RP}l_G \sin \theta \ddot{\theta} - m_{RP}l_G \cos \theta \dot{\theta}^2)l_G \sin \theta \\ & - (m_{RP}\ddot{x} - m_{RP}l_{clr-G} \cos \theta \ddot{\theta} + m_{RP}l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2)l_G \cos \theta \\ & + f_p \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow j_{RP}\ddot{\theta} =$$

$$\begin{aligned} & (m_{RP}gl_G \sin \theta - m_{RP}l_G \sin \theta \ddot{\theta}l_G \sin \theta - m_{RP}l_G \cos \theta \dot{\theta}^2l_G \sin \theta) \\ & - (m_{RP}\ddot{x}l_G \cos \theta - m_{RP}l_{clr-G} \cos \theta \ddot{\theta}l_G \cos \theta + m_{RP}l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2l_G \cos \theta) \\ & + f_p \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow j_{RP}\ddot{\theta} =$$

$$\begin{aligned} & (m_{RP}gl_G \sin \theta - m_{RP}l_G^2 \sin^2 \theta \ddot{\theta} - m_{RP}l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ & - (m_{RP}\ddot{x}l_G \cos \theta - m_{RP}l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta \ddot{\theta} + m_{RP}l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ & + f_p \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow j_{RP}\ddot{\theta} - m_{RP}l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta \ddot{\theta} + m_{RP}l_G^2 \sin^2 \theta \ddot{\theta} + m_{RP}\ddot{x}l_G \cos \theta =$$

$$(m_{RP}gl_G \sin \theta - m_{RP}l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

$$- (m_{RP}l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

$$+ f_p \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow (j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP}l_G^2 \sin^2 \theta)\ddot{\theta} + m_{RP}l_G \cos \theta \ddot{x} = \\ & m_{RP}gl_G \sin \theta - m_{RP}l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_{RP}l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta + f_p \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3-22)$$

由式(3-24)和式(3-25) , 解聯立方程組 , 可得倒單擺的運動方程式 :

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{\begin{vmatrix} u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 & (M + m_{RP}) \\ (m_{RP} g l_G \sin \theta - m_{RP} l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_{RP} l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta + f_P \dot{\theta}) & m_{RP} l_G \cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta) & (M + m_{RP}) \\ j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta & m_{RP} l_G \cos \theta \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(M + m_{RP})(m_{RP} g l_G \sin \theta - m_{RP} l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_{RP} l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta + f_P \dot{\theta})}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta) + (m_{RP} l_G \cos \theta)(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)} \\
&+ \frac{-(m_{RP} l_G \cos \theta)(u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta) + (m_{RP} l_G \cos \theta)(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)} \\
&\hspace{15em} (3-23)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{\begin{vmatrix} -(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta) & u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ (j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta) & (m_{RP} g l_G \sin \theta - m_{RP} l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_{RP} l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta + f_P \dot{\theta}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta) & (M + m_{RP}) \\ j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta & m_{RP} l_G \cos \theta \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta)(u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta) + (m_{RP} l_G \cos \theta)(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)} \\
&+ \frac{(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)(m_{RP} g l_G \sin \theta - m_{RP} l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_{RP} l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta + f_P \dot{\theta})}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta) + (m_{RP} l_G \cos \theta)(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)} \\
&\hspace{15em} (3-24)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP} g l_G \sin \theta - m_{RP} l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_{RP} l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta + f_P \dot{\theta})}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta) + (m_{RP} l_G \cos \theta)(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)} \\
+ \frac{-(m_{RP} l_G \cos \theta)(u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta) + (m_{RP} l_G \cos \theta)(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)} \\
\dot{x}_3 = x_4 \\
\dot{x}_4 = \frac{(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta)(u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta) + (m_{RP} l_G \cos \theta)(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)} \\
+ \frac{(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)(m_{RP} g l_G \sin \theta - m_{RP} l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_{RP} l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta + f_P \dot{\theta})}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta) + (m_{RP} l_G \cos \theta)(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)}
\end{cases} \hspace{15em} (3-25)$$

式中， l_G 為整個倒單擺擺杆含擺錘的合成重心到擺杆底端的距離長。

實際工程中，理想的線性系統是不存在的，絕大多數系統是非線性的，就如同上面所求出的兩個動力微分方程式。若上述的式子，需要以線性化之受控系統模型來進行設計，則將式子之非線性動力微分方程式從操作點 (x_0, u_0) 附近線性化。所謂非線性系統的線性化就是對一個非線性系統的模式找出其穩定的操作點(平衡點)，如果在工作過程中，數學模型屬性的各物理量只是該操作點附近產生微小的變化，非線性模型就能夠以此操作點為基礎，表示成一個線性模型。有關於線性系統的控制理論都能適用於該模型，便是自動控制理論裡關於小偏差線性化方法或增量線性化方法的概念。

但是將非線性系統表示成一個線性系統，首先涉及到控制系統在工作過程中各狀態物理量是否只在該平衡點附近產生微小變化；其次還會牽涉到很多複雜的數學理論，比如非線性量是否只在平衡點附近是否連續、可微分和可否求解偏微分等問題。

若上述的式子，需要以線性化之受控體模型來進行設計，故將推導之非線性狀態方程式從操作點 (x_0, u_0) 附近線性化。令倒單擺系統之平衡點為 $\theta = \dot{\theta} = x = \dot{x} = 0$ ，並假設 θ 很小，則 $\sin \theta \approx \theta$ ， $\cos \theta \approx 1$ ，以及忽略狀態變數的二次項；並且依照非線性受控系統之數學模型的線性化定義，則所推導動力微分方程式(3-25)之狀態變數做如下的定義：

合成倒單擺擺杆與中鉛垂線之間的擺角為 $\theta = x_1$

擺杆的角加速度為 $\dot{\theta} = x_2$

滑車之位置為 $x = x_3$

滑車的速度為 $\dot{x} = x_4$

以得到可調整擺錘狀態倒單擺系統於操作點之線性化系統狀態方程式，其推導如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP}gl_G \sin x_1 - m_{RP}l_G^2 \cos x_1 x_2^2 \sin x_1 - m_{RP}l_G l_{clr-G} \sin x_1 x_2^2 \cos x_1 + f_P x_2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} \cos^2 x_1 + m_{RP}l_G^2 \sin^2 x_1) + (m_{RP}l_G \cos x_1)(Ml_{clr} \cos x_1 + m_{RP}l_{clr-G} \cos x_1)} \\ \quad + \frac{-(m_{RP}l_G \cos x_1)(u - f_C x_4 - m_{RP}l_{clr-G} \sin x_1 x_2^2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} \cos^2 x_1 + m_{RP}l_G^2 \sin^2 x_1) + (m_{RP}l_G \cos x_1)(Ml_{clr} \cos x_1 + m_{RP}l_{clr-G} \cos x_1)} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} \cos^2 x_1 + m_{RP}l_G^2 \sin^2 x_1)(u - f_C x_4 - m_{RP}l_{clr-G} \sin x_1 x_2^2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} \cos^2 x_1 + m_{RP}l_G^2 \sin^2 x_1) + (m_{RP}l_G \cos x_1)(Ml_{clr} \cos x_1 + m_{RP}l_{clr-G} \cos x_1)} \\ \quad + \frac{(Ml_{clr} \cos x_1 + m_{RP}l_{clr-G} \cos x_1)(m_{RP}gl_G \sin x_1 - m_{RP}l_G^2 \cos x_1 x_2^2 \sin x_1 - m_{RP}l_G l_{clr-G} \sin x_1 x_2^2 \cos x_1 + f_P x_2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} \cos^2 x_1 + m_{RP}l_G^2 \sin^2 x_1) + (m_{RP}l_G \cos x_1)(Ml_{clr} \cos x_1 + m_{RP}l_{clr-G} \cos x_1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP}gl_G x_1 - m_{RP}l_G^2 x_2^2 x_1 - m_{RP}l_G l_{clr-G} x_1 x_2^2 + f_P x_2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} + m_{RP}l_G^2 x_1^2) + (m_{RP}l_G)(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})} \\ \quad + \frac{-(m_{RP}l_G)(u - f_C \dot{x} - m_{RP}l_{clr-G} x_1 x_2^2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} + m_{RP}l_G^2 x_1^2) + (m_{RP}l_G)(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} + m_{RP}l_G^2 x_1^2)(u - f_C \dot{x} - m_{RP}l_{clr-G} x_1 x_2^2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} + m_{RP}l_G^2 x_1^2) + (m_{RP}l_G)(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})} \\ \quad + \frac{(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(m_{RP}gl_G x_1 - m_{RP}l_G^2 x_2^2 x_1 - m_{RP}l_G l_{clr-G} x_1 x_2^2 + f_P x_2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G} + m_{RP}l_G^2 x_1^2) + (m_{RP}l_G)(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP}gl_G x_1 + f_P x_2) - (m_{RP}l_G)(u - f_C x_4)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G}) + (m_{RP}l_G)(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G})(u - f_C x_4) + (Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(m_{RP}gl_G x_1 + f_P x_2)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G}) + (m_{RP}l_G)(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP}gl_G x_1 + f_P x_2) - (m_{RP}l_G)(u - f_C x_4)}{Mj_{RP} + m_{RP}j_{RP} - Mm_{RP}l_G l_{clr-G} - m_{RP}m_{RP}l_G l_{clr-G} + m_{RP}l_G Ml_{clr} + m_{RP}l_G m_{RP}l_{clr-G}} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G})(u - f_C x_4) + (Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(m_{RP}gl_G x_1 + f_P x_2)}{Mj_{RP} + m_{RP}j_{RP} - Mm_{RP}l_G l_{clr-G} - m_{RP}m_{RP}l_G l_{clr-G} + m_{RP}l_G Ml_{clr} + m_{RP}l_G m_{RP}l_{clr-G}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP}gl_Gx_1 + f_Px_2) - (m_{RP}l_G)(u - f_Cx_4)}{Mj_{RP} + m_{RP}j_{RP} - Mm_{RP}l_Gl_{clr-G} + m_{RP}l_GMl_{clr}} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(j_{RP} - m_{RP}l_Gl_{clr-G})(u - f_Cx_4) + (Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(m_{RP}gl_Gx_1 + f_Px_2)}{Mj_{RP} + m_{RP}j_{RP} - Mm_{RP}l_Gl_{clr-G} + m_{RP}l_GMl_{clr}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP}gl_Gx_1 + f_Px_2) - (m_{RP}l_G)(u - f_Cx_4)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(j_{RP} - m_{RP}l_Gl_{clr-G})(u - f_Cx_4) + (Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(m_{RP}gl_Gx_1 + f_Px_2)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} \end{cases} \quad (3-26)$$

由上述式可知，由於線性化時須考慮機構之對稱性質，故訂定操作點

$x_3 = 0$ 且 $u_0 = 0$ ，且為了易於符號辨識，代回之前定義，

合成倒單擺擺杆與鉛垂線之間的擺角為 $\theta = x_1$

擺杆的角加速度為 $\ddot{\theta} = x_2$

滑車之位置為 $x = x_3$

滑車的速度為 $\dot{x} = x_4$

可求得倒單擺受控系統之線性化動力微分方程式表示為

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP}gl_G)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} \theta + \frac{(M + m_{RP})(f_P)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} \dot{\theta}$$

$$+ \frac{-(m_{RP}l_G)(f_C)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} \dot{x} + \frac{-(m_{RP}l_G)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} u$$

(3-27)

$$\ddot{x} = \frac{(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(m_{RP}gl_G)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} \theta + \frac{(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(f_P)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} \dot{\theta} \\ + \frac{-(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G})(f_C)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} \dot{x} + \frac{(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G})}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} u \quad (3-28)$$

若令 $x = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]^T$ ，則式(3-27)和式 (3-28)可表示為狀態空間方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3-29)$$

依據(3-26)式，使用 Runge-Kutta 法(2-49)，所得之狀態耦合矩陣及輸入耦合向量中各元素的形式為下述各式：

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} = 1 ; \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right|_{x_0, u_0} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \right|_{x_0, u_0} = 0 ;$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP}gl_G)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} ;$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} = \frac{(M + m_{RP})(f_P)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} ;$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right|_{x_0, u_0} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \right|_{x_0, u_0} = \frac{-(m_{RP}l_G)(f_C)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} ;$$

$$\left. \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right|_{x_0, u_0} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \right|_{x_0, u_0} = 1 ;$$

$$\left. \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} = \frac{(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(m_{RP}gl_G)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G}) + (m_{RP}l_G)(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})} ;$$

$$\left. \frac{\partial f_4}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} = \frac{(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(f_P)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G}) + (m_{RP}l_G)(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})} ;$$

$$\left. \frac{\partial f_4}{\partial x_3} \right|_{x_0, u_0} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \right|_{x_0, u_0} = \frac{-(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G})(f_C)}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G}) + (m_{RP}l_G)(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})} ;$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = \frac{-(m_{RP}l_G)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})}$$

$$\left. \frac{\partial f_3}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial f_4}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = \frac{(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G})}{(M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G}) + (m_{RP}l_G)(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})} ;$$

式中， $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_1 & t_5 & 0 & t_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ t_2 & t_6 & 0 & t_8 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 0 \\ t_3 \\ 0 \\ t_4 \end{bmatrix}$ ，

$$t_1 = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP}gl_G)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} , \quad t_5 = \frac{(M + m_{RP})(f_P)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} ,$$

$$t_7 = \frac{-(m_{RP}l_G)(f_C)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} ,$$

$$t_2 = \frac{(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(m_{RP}gl_G)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} , \quad t_6 = \frac{(Ml_{clr} + m_{RP}l_{clr-G})(f_P)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} ,$$

$$t_8 = \frac{-(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G})(f_C)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} , \quad t_3 = \frac{-(m_{RP}l_G)}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} ,$$

$$t_4 = \frac{(j_{RP} - m_{RP}l_G l_{clr-G})}{(M + m_{RP})j_{RP} + Mm_{RP}l_G(l_{clr} - l_{clr-G})} .$$

系統的輸出為 θ 和 x ，因此輸出方程式為：

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (3-30)$$

式(3-29)和(3-30)一起構成可調整擺錘狀態之倒單擺系統的線性化狀態空間方程式。

3-4 可調整擺錘狀態之倒單擺的平衡定位控制模擬(極點配置設計法)

極點配置設計主要的技巧是以轉移函數為系統模型表示式，再利用狀態變數經過固定增益後回授，來配置閉迴路的極點到所希望的位置。此亦稱為狀態回授設計(State Feedback Design)。

極點配置設計(Pole Placement Design)的方法如下，參考圖 3-11，考慮線性非時變系統

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \\ y(t) &= CX(t)\end{aligned}\tag{3-32}$$

狀態回授制力 $u(t)$ 為

$$u(t) = r(t) - KX(t)\tag{3-33}$$

其中增益 K 為 $1 \times n$ 階列向量(Row Vector)， r 為參考輸入命令， y 為輸出。將上式(3-33)代入(3-32)，此時閉迴路動態方程式為：

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \\ &= AX(t) + B(r(t) - KX(t)) \\ &= (A - BK)X(t) + Br(t) \\ y(t) &= CX(t)\end{aligned}\tag{3-34}$$

由式(3-34)可知，經過了狀態回授增益 K 後，系統的系統矩陣 A 變成了 $A - BK$ ，適當地選擇回授增益矩陣 K 值，可以改變系統的特徵方程式，也就是改變系統極點的位置。

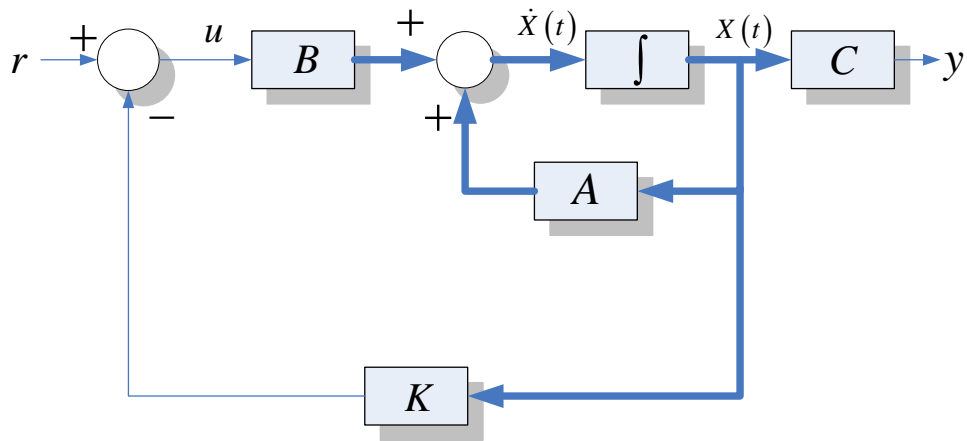


圖 3-11 狀態回授設計

3-5 可調整擺錘之倒單擺的追蹤控制模擬(ANFIS 設計法)

在本章前面所提到的可調整擺錘狀態之倒單擺系統的數學模型，所推導的非線性動力微分方程式(3-5)式，可表示為如下兩個式子：

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m_{RP})(m_{RP}g l_G \sin \theta - m_{RP} l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_{RP} l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta + f_P \dot{\theta})}{\Delta} + \frac{-(m_{RP} l_G \cos \theta)(u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2)}{\Delta} \quad (3-34)$$

及

$$\ddot{x} = \frac{(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta)(u - f_C \dot{x} - m_{RP} l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2)}{\Delta} + \frac{(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)(m_{RP} g l_G \sin \theta - m_{RP} l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_{RP} l_G l_{clr-G} \sin \theta \dot{\theta}^2 \cos \theta + f_P \dot{\theta})}{\Delta} \quad (3-34)$$

其中

$$\Delta = (M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP} l_G l_{clr-G} \cos^2 \theta + m_{RP} l_G^2 \sin^2 \theta) + (m_{RP} l_G \cos \theta)(M l_{clr} \cos \theta + m_{RP} l_{clr-G} \cos \theta)$$

這個動態系統在時間 t 的狀態可以由以下四個狀態變量所確定：

$\theta(t)$ ：擺杆與垂直假想中線向上的夾角，順針方向為正；

$\dot{\theta}(t)$ ：擺杆的角速度；

$x(t)$ ：擺杆質心在滑車運動方向的投影位置

$\dot{x}(t)$ ：擺錘質心在滑車運動方向的投影點速度。

此類型的可調整擺錘狀態之倒單擺系統為非線性不穩定系統。為了可運用線性系統理論和模糊控制中的 Sugeno 模型進行控制器的分析設計，可以考慮將其先進行局部線性化，使之化分成為若干個子系統，再將這些若干個子系統進行模糊化推論。其物理意義是將整個四維狀態變量空間分割為 n 個模糊子空間集合，對每個模糊子空間，系統的動力學特性可用一個局部線性狀態方程式來描述。整個系統動力學特性則是這些局部線性模型的加權和。該模糊建模方法的本質在於將一個整體非線性的動力學數學模型用多個局部線性模型進行模糊逼近收斂。

3-5-1 可調整擺錘之倒單擺系統的模型

在前面已提到可調整擺錘狀態之倒單擺系統的模型在狀態空間不同點處進行線性化，然後對這些線性系統模型設計出各個空間位置的線性控制器，最後通過模糊邏輯來將這些線性控制器組合起來，以實現可調整擺錘狀態之倒單擺系統的平衡追蹤控制控制的模擬。

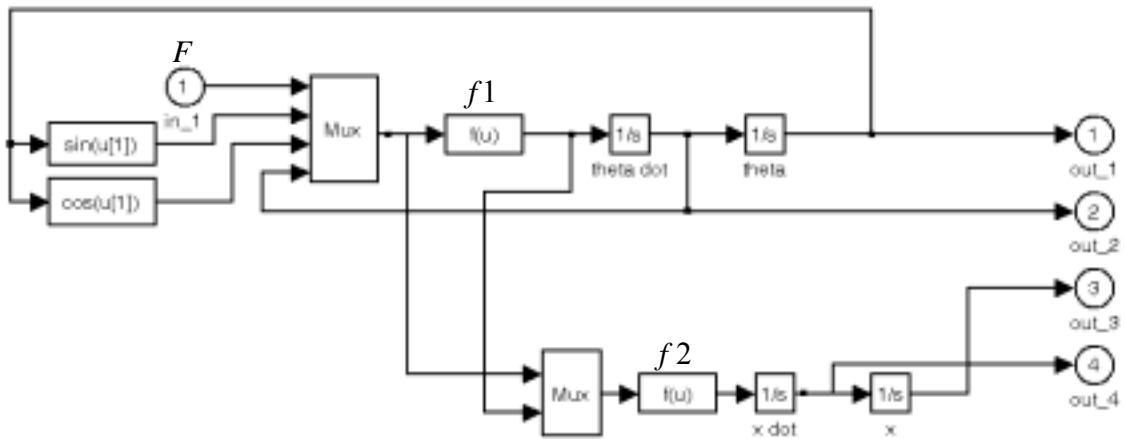


圖 3-12 可調整擺錘狀態之倒單擺的動力學模型模擬方塊圖

圖 3-12 中,輸入為 F ,輸出為 $X = [\theta(t), \dot{\theta}(t), x(t), \dot{x}(t)]$, out_1 , out_2 , out_3 , out_4 , 分為對應狀態方程中的 $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ 。其中函數 $f1$ 和 $f2$ 分別為

$$\dot{x}_2 = \frac{(M+m_{RP})(m_{RP}g \cos u(2) - m_{RP}l_G u(3)u(4)u(2) - m_{RP}l_G \cos u(2)u(4)u(3) + F_p u(4))}{\Delta}$$

$$\frac{(m_{RP}l_G u(3))(u - F_c \dot{x} - m_{RP}l_G u(2)u(4)u(4))}{\Delta} \quad (3-36)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(j_{RP} - m_{RP}l_G \cos u(3)u(3) + m_{RP}l_G u(2)u(2))(u - F_c \dot{x} - m_{RP}l_G u(2)u(4)u(4))}{\Delta}$$

$$+ \frac{(M \cos u(3) + m_{RP}l_G u(3))}{\Delta}$$

$$\times \frac{(m_{RP}g \cos u(2) - m_{RP}l_G u(3)u(4)u(2) - m_{RP}l_G \cos u(2)u(4)u(3) + F_p u(4))}{\Delta} \quad (3-37)$$

式中 $u(1) = F$, $u(2) = \sin \theta$, $u(3) = \cos \theta$, $u(4) = \dot{\theta}$, $u(5) = \ddot{\theta}$, 至於 Δ 為下式

$$\Delta = (M + m_{RP})(j_{RP} - m_{RP}l_G \cos u(3)u(3) + m_{RP}l_G u(2)u(2))$$

$$+ (m_{RP}l_G u(3))(M \cos u(3) + m_{RP}l_G u(3)) \quad (3-39)$$

3-5-2 被控制對象模型線性化

除了在推導系統數學模型時，可先行進行線性化以方便運用極點配置方法設計，進行平衡定位控制的模擬。但在此為了精確描繪所研究的倒單擺系統的平衡追蹤控制的模擬，所以將系統所推導的非線性動力微分方程式，讀入前面所述之圖 3-13 可調整擺錘之倒單擺的動力學模型模擬方塊圖。為了對所研究的可調整擺錘狀態之倒單擺系統進行分析，可以將可調整擺錘狀態之倒單擺的動力學模型模擬方塊圖。用 Create Subsystem 命令產生一個子系統，再用 Mask Subsystem 命令進行封裝，如下圖 3-13 所示。

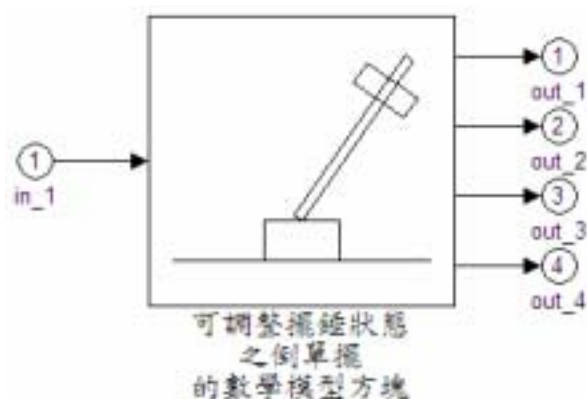


圖 3-13 封裝後的可調整擺錘之倒單擺模型子系統

在此子系統的初始化項中加入初始狀態設定和系統參數的設定：初始狀態設置為 $[0, 0, 0, 0]$ (即平衡位置)，並設定擺杆質量，擺杆的長度，重力加速度。模擬模型的特性應儘量與真實系統特性接近，所以在此模擬模型中採用完全的非線性的模型。但是在設計系統的控制器時，上述完全的非線性模型雖然精確，但由於過於複雜，非常不利於設計簡單、實用的系統控制器。因為當在設計系統控制器時，可以利用一些不那麼精確卻簡單的系統模型，在此採用線性系統模型，需要把非線性模型轉化為線性模型。通常的做法是將非線性模型在系統的某个工作狀態下，例如 $[\theta = 0, \dot{\theta} = 0, x = 0, \dot{x} = 0]$ ，進

行線性化。在這此時，可以用 MATLAB 的命令 `linmod` 將系統線性化。其運用格式為

$$[A,B,C,D]=\text{linmod}('cp1.mdl',[0,0,0,0],0)$$

系統的模擬模型，可如前述圖 3-11 轉存的文件，得到的系統線性模型如下：

$$\text{系統狀態變量為 } x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \text{ 系統輸入為控制力 } u = F, \text{ 系統輸出為 } y = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$\text{系統狀態方程式為 } \dot{x} = Ax + Bu$$

$$\text{系統輸出方程式為 } \dot{y} = Cx + Du$$

如此就得到了系統的一個線性化模型。這種線性模型，可用線性系統理論很容易就能夠設計出最佳化的控制器。此最佳化的設計，是運用將狀態空間方程式的輸入矩陣與狀態矩陣，產生 LQR 最佳化的輸出矩陣。而這裡使用線性系統理論的原因是因為線性系統理論設計出來的控制器往往具有線性函數的性質，可與 Sugeno 型模糊推理系統的結構做很好的搭配。

3-5-3 Sugeno 型自適應類神經網路控制器設計

用 Sugeno 模型設計的模糊控制器，對應於其用 also 連接的每一條模糊規則。可以將該模糊控制器視為一個線性控制器，而整體的控制器由多條模糊推論規則處理，經過模糊綜合、清晰化的過程後，逼近一個非線性的控制器。它的物理意義是：將一個非線性系統在不同的若干狀態下進行線性化，然後分別設計控制器，將分別設計的線性控制器用模糊控制的理論進行整合，使之成為一個非線性的控制器。可以看出，如果選擇了恰當的線性化狀

態、模糊空間劃分、模糊歸屬度函數、局部線性控制器，其最終得到的控制系統將優於一般的線性理論所得到的控制器。

控制器模型可以直接使用 Simulink 中的模糊控制器模組來實現，控制器的參數和類型只需對 fuzzy controller 模塊的參數 Fismatrix 進行讀入來實現，如下圖 3-14 所示。

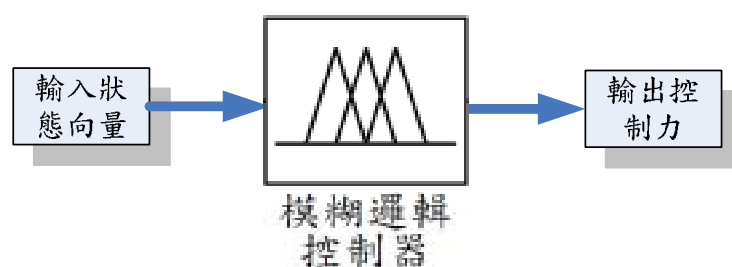


圖 3-14 模糊邏輯控制器方塊圖

Sugeno 型模糊控制器的設計要訣，是在於如何得到輸入的模糊集合歸屬函數以及輸入—輸出規則。可以根據個人經驗和判斷來決定輸入的模糊集合及歸屬函數，而模糊規則可以在相應的模糊集合歸屬度函數的最大值來設計。Sugeno 型控制器的輸入—輸出規則為線性函數，在此可以設計為該點處的最佳化控制或是用極點配置等方法獲得線性控制器。

在本論文所研究的可調整擺錘狀態之倒單擺系統，將採用結合最佳化控制結合自適應網路模糊推論系統的 Sugeno 型模糊控制器的設計方法。其控制的閉迴路控制模擬方塊圖，如下圖 3-15 所示。

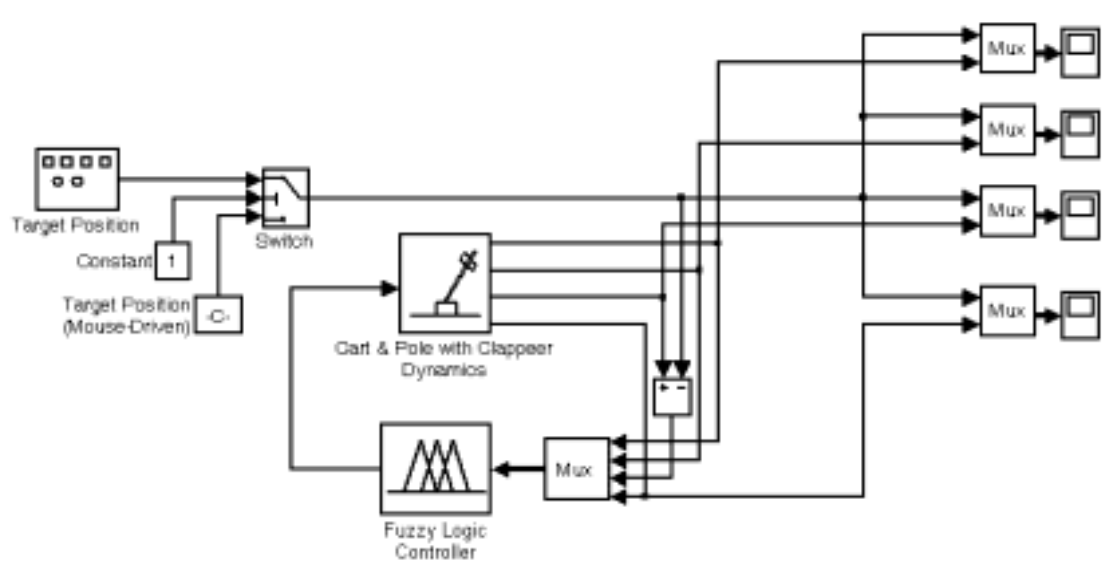


圖 3-15 可調整擺錘之倒單擺閉迴路控制模擬方塊圖

3-5-4 決定輸入變量空間

根據實際控制的要求，可以大致確定狀態變量和控制變量的範圍如下：

1. 設定擺杆平衡指標為 $\theta \in [-0.3, 0.3]$, $\dot{\theta} \in [-1, 1]$ ；
2. 追蹤目標指標為 $x_d(t) \in [-1.5, 1.5]$ ；
3. 控制位置偏差指標為 $\bar{x} \in [-3, 3]$ ；
4. 跟蹤速度指標為 $\dot{x} \in [-3, 3]$ ；
5. 控制力限制為 $F \in [-10, 10]$ 。

3-5-5 決定模糊輸入空間數據點的選取

根據前面所設定的範圍分析，可以劃分出狀態空間。這裡將 $[\theta, \dot{\theta}, \bar{x}, \dot{x}]$ 在

每一個方向上均勻取出若干點 n_1 、 n_2 、 n_3 、 n_4 ，然後互相組合而成 $[\theta_{n_1}, \dot{\theta}_{n_2}, \bar{x}_{n_3}, \dot{x}_{n_4}]$ 狀態空間的點。用這些離散的點來劃分模糊 BOX 空間。

3-5-6 模糊空間數據點輸出計算

對於上述劃分的模糊 BOX 空間，用上述的每一個離散狀態空間分割點 X_1, X_2, \dots, X_n 來分段線性化可調整擺錘倒之單擺系統模型，運用並選擇適合的 LQR 控制參數 Q 、 R 、 N ，設計出線性最佳化控制器 K_1, K_2, \dots, K_n 。其中 Q 、 R 、 N 可以取為相同，也可以按需要選擇不同的值。

在模擬軟體 MATLAB 中，亦提供函數 $[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R, N)$ 來針對每個空間輸入點來設計最佳控制器 K_L ，這裡的 A, B 是之前述線性化狀態空間方程式所得到的。而對應於此狀態空間的控制力

$$F_i = K_i * X_i = [k_1, k_2, k_3, k_4] \times \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

同樣的方法，也可以用極配置的方法來計算，只要定義好極點 P ，就可以用 MATLAB 的函數 $K = place(A, B, P)$ 來求解上述的控制器 K 。但是，要獲得比較好的控制效果，極點也應當按照線性系統的相應理論來適當選擇。

3-5-7 訓練 ANFIS 生成模糊推論系統

當獲得了足夠的學習數據，就可以用 ANFIS 來模糊化這些離散的和並且模糊整合那些線性控制器 K_1, K_2, \dots, K_n ，即訓練產生模糊規則和歸屬

度函數。

3-5-8 模型追蹤模擬

根據上述的可調整擺錘之倒單擺系統模型分析和線性化理論,用 ANFIS 來訓練產生模糊控制規則,再用本研究所設計的 MATLAB 程式來產生控制參數矩陣,此離線生成的模糊參數矩陣可存檔為 fis 副檔名的檔案,例如存為 ipen.fis。以後再利用 readfis 指令將 fis 副檔名的檔案 ipen.fis,讀入可調整擺錘狀態倒單擺回授控制系統的模糊邏輯控制器中,再進行模擬。