第二章 數學能力相關理論之探究

電子工程問題的數學解題能力模式的建構，需要植基於數學能力的相關之概念與理論。因此本章旨在探究鷹架學習相關之概念、數學問題解決相關之概念與理論、核心能力之內涵理論、數學嵌入電子工程理論應用之評析等，俾作為建構電子工程問題的數學解題能力模式之基礎。

第一節 鷹架學習理論

壹、鷹架學習之概念

一、可能發展區的概念

前蘇聯學者 Vygostky (1896~1934)在發展心理學提到「學習引導發展(learning leads development)」。他認為學習與發展不應該是互為獨立的。而是一種較複雜的組合過程，在這個組合過程當中，學習是引導發展的。教學創造了學習歷程，進而帶動發展歷程。在學習的歷程中，可以不斷引發「可能發展區」(zone of proximal development，簡稱 ZPD)，引導學生不斷向較高層次的心理功能發展。這種觀點近年在西方教育界影響頗大，許多學者將其概念運用到教學活動設計上(陳淑敏，民 84)。

Vygostky 認為在教學上主張教師應採取一個暫時性的支持架構以協助學習者學習能力的發展，此種稱為「鷹架」(scaffolding)，鷹架的兩個重要議題便是「溝通」與「認知」，透過語言的認知功能將有助於促進學習者對問題的解決和反思能力，以達成遷移的效果，並促進學習者自我導向學習能力之培養(張菀珍，民 86)。

教育不只是認知發展的核心，也是精粹的社會性活動。兒童的較高等心理歷程之發展、是透過在社會實作中涵化(enculturation)而成

(鄭明長，民 89)，這種涵化是透過社會科技如：符號與工具獲得，以及各種形式的教育活動來進行，亦即人類社會性與心理性功能是借助於媒介來進行，因此會受到如：自然語言這樣的符號系統所影響。兒童並非自然且必然會理解符號與符號使用間的關係，而是藉著由成人提供的手段，將獲得的外在符號轉變為內在的符號而產生。亦即生活在一特定文化中的兒童，會學習如何從自己的生物性與文化性的社會文化歷史中獲得能力，而在文化中調適其生活(Wertsch & Tulviste，1992)。

後續教育學者延續 Vygostky 觀點，認為在教學情境中影響最大的概念，莫過於可能發展區(ZPD)。Vygostky 認為個人的發展與學習的速度並不一致，因為發展落後學習之後，其間的差距便形成可能發展區(徐椿樑，民 90)。

Vygostky 曾經對學童進行一個實驗：他選擇兩個八歲的兒童參與教學實驗。其中一個學童在沒有任何協助之下，獨自靠自己的心智能力學習，結果經測驗後，它能表現出九歲學童的心智能力；另一位學童經由專家的協助，在相同的實驗教學後，該名學童的心智能力達到十二歲學童的心智能力水準。如果兩人都接受專家的協助之下，則兩人的心智能力都可達到最佳的水準。但是，同樣在專家的協助之下，專家所提的問題如果超越學童的認知能力範圍，結果兩人都停留在原來心智能力水準。他發現此一現象後，經過多次的反覆實驗驗證，得到一個結論：學童在獨自學習的情況下，它的發展能力稱為 ZPD_1 的水準；而另一位在專家協助下學習的學童發展能力為 ZPD_4。但如果專家的協助不當，超出學童的能力範圍，學習並不會發生。這個實驗正好說明了學習的「可能發展區」的主要概念以及學習鷹架(scaffolding)真正意義(徐椿樑，民 90)。

Vygostky 又提到：教學的主要目的在於「教師在教學設計上，

創造學生的最大可能發展區，以有效的教學情境為刺激，引發學生一系列的內在發展歷程」。因此把可能發展區界定為：在兒童之「由獨立的問題解決所決定的實際發展層次」與較高的「透過在成人引導或在與具有更多能力的同儕合作下之問題解決，所決定的潛在發展層次」間的距離。(Vygostky , 1978)。

Lock(2000)對 ZPD 的解釋為：學習者本來就具有天生的學習能力(intra-mental ability)，這種能力可以讓學習者自己學習，但是發展有限。另外一種能力是經由互動中產生的，稱為焠化能力(inter-mental ability)，此種能力發展迅速且無限量，兩者能力之差距稱為 ZPD。為了兒童的自身發展，這兩種能力在學習之中，一定重覆出現兩次，一次是兒童內省的，一次是學習社群的交互作用產生的。但 ZPD 的運作要如何才能達到有效?專家或同儕的協助要在 ZPD 內實施，若超越學習者的能力，會抹煞其學習動機(Lock,2000)。

Berk 對 ZPD 的概念提出他的看法，認為教師在教學前必須衡量學生學習前的發展水平，教學活動必須領先學習者的發展水平，以了解學生的學習需要，來創造出最佳化的 ZPD；對學習者而言，因為教師的協助永遠是在原先學習能力水平之前導引，學生會以比較積極的態度設法使自己追上這個階段的學習差距(learning gap)(Berk,1994)。

Vygostky 理論中所提的「可能發展區」，它包含或統整 Vygostky 主要的理論(Bruner,1987; Moll, 1990)，主要是在探討個體高層次心理功能的發展，來分析「學習」與「發展」之間的關係。此理念的主要觀念在於了解個體過去的發展情況以及未來的潛在能力，以決定目前應有的發展方向。因此，教學者如要了解學生學習能力的發展，必須考慮實際發展層次(the actual development level)與潛在發展層次(the potential development level)。同時 Moll 也認為個人的「可能發展區」

之趨勢係處於一個不斷學習改變的狀態(Moll ,1990)。

綜合上述，可得以下結論：

(一)「學習引導發展」，當發展落後學習時，其間的差距即形成學習「可能發展區」，簡稱 ZPD (zone of proximal development)。

(二) ZPD 的間距，係指由獨立的問題解決所決定之「實際發展層次」與透過引導協助問題解決所決定之「潛在發展層次」間的距離。此間距係處於一個學習不斷改變的狀態。

(三) 老師的引導式學習，必須在學生能力之 ZPD 範圍內實施，若超越學習者能力之 ZPD，會抹煞學習動機。

(四) 教師在教學前必須衡量學生學習前的發展水平，教學活動必須領先學習者的發展水平，配合了解學生的學習需要，來創造出最佳化的 ZPD。

(五) 採用 ZPD 方式引導，必須先了解個體過去的發展情況以及未來的潛在能力，以決定 ZPD 之間距與發展的方向。

二、鷹架(scaffolding)學習的概念

Langer 認為鷹架理論的意義包含兩個層面，即「意義的協商」和「學習責任的遷移」(Langer,1983)。Roger Brown 從功能的觀念認為語言是一種認知社會化的功能，有助於促進問題的解決與反思，因此，鷹架的兩個重要議題為「溝通」與「認知」(Roger Brown ,1988)。

Dyson 認為鷹架的意義應該包含「垂直」與「水平」兩個層次：

(一)垂直鷹架：將學習內容配合學習者的意圖與需求加以結構化處理，並在教學互動中鼓勵學習者認知的複雜化，以培養其應用能力。

(二)水平鷹架：強調教師的支持與學習內容應配合學習者的社會背景和經驗。

此種水平與垂直鷹架理論應尊重學習者的意圖，並可使教師支持

擴大和延伸學習者的學習及思考，更能促進可能發展區的發展(Dyson,1990)。

Gee Michel , &O’Connor 認為鷹架是一種「橋樑」，教師扮演支持、導引和擴展的角色，給於學習者協助和澄清所需的訊息(Gee Michel &O’Connor, 1992) 。

學習鷹架的提供是由垂直與水平雙軸向的建構，成就學習者的認知面向。教師的責任要透過協調與溝通來尋找學生的可能發展區。鷹架的提供有其即時性與遞減性，使學習個體能於學習終了時，具備獨自能解決原先需要合作才能完成的工作為目的(徐椿樑，民 90)。

綜合上述，可得下列結論：

(一)鷹架的兩個重要議題為「溝通」與「認知」。

(二)鷹架的意義應該包含「垂直」與「水平」兩個層次：

1.垂直鷹架：將學習內容配合學習者的意圖與需求加以結構化處理，並鼓勵學習者學習認知的複雜化，以培養其應用能力。

2.水平鷹架：強調教師的支持與學習內容應配合學習者的社會背景和經驗。

(三)鷹架是一種「橋樑」，教師扮演支持、導引和擴展的角色，給於學習者協助和澄清所需的訊息。

(四)教師的責任要透過協調與溝通來尋找學生的可能發展區。

(五)鷹架的提供有其即時性與遞減性，使學習個體能於學習終了時，具備獨自能解決原先需要協助才能完成的工作為目的。

三、鷹架學習所建立之 ZPD 與同化、調適之間的關係

Vygostky 學習「可能發展區」的發展理論，延伸出如何尋找與建構學習者的鷹架，亦即是學習者對於一個新的訊息之藉入究竟是採取同化(assimilation)、調適(accommodation)或是完全拒絕接受(rejection)，這三者之間有很大的關係。如果教師設計的學習內容遠

遠超出學生的 ZPD，無論給予什麼樣的鷹架，學生都沒有機會學到這樣的訊息，因為新的訊息被學習者拒絕了。同樣的，如果教師設計了一個學習內容，是在學習者的較高之 ZPD 範圍且沒有提供學習者所需要的學習鷹架，結果新訊息仍然被拒絕。另外，如果教師設計的學習內容是處於學生較低的 ZPD 狀態，則學生因已擁有處理相關資訊的認知基模(schema)，故新的訊息會被舊的認知基模同化(assimilation)，學習同樣是無效的。因此，為了能使學習者認知基模增生(expansion)或引發認知基模的調適(accommodation)，教師在設計學習內容時，一定要定位在學習者最恰當且足以挑戰學習者的 ZPD 範圍內。從上面有效的鷹架建構，要教師真正了解學生的學習可能發展區。

Rogoff.＆Wertsch.提到 ZPD 是一種結構脈絡，學習者在期間幾乎能----但不是完成----自己操作某個作業。透過 ZPD 正確的指導與多元互動的結果，學習者能引導認知基模的調適，並將所學習的結果加以調適、內化而完成作業。又提到使用 ZPD 方式的測試者給孩子超出其實際發展層次兩歲之多的測驗項目，並以提出主導式問題、舉例和示範等來引導孩子引發認知基模的調適、內化中回答這些題目，由此來發現孩子目前的 ZPD(Rogoff.＆Wertsch,1984；黃慧真譯，民 87)。

綜合上述可知：引導者要引導學生學習時，常需藉著外來的鷹架學習與支持，提供垂直與水平雙軸所建構之鷹架，並透過引導、語言溝通、評量等媒介來為學習者尋找定位，在學習者最恰當且足以挑戰學習者的 ZPD 範圍內，使學習者更能貼近個人最佳化的可能發展區而學習。

四、語言的中介與內化作用

Vygostky 強調學習者可藉由引導者協助學習的論點，不同於皮亞傑的個體認知基模的調適、內化的自我建構理論。但學習的有效達

成，就必須經由引導者與情境之間的心理學工具(psychological tools)來學習，例如：邏輯、符號轉換、概念、符號、數字與文字等。這是人類用來建立他們對世界見解之工具，其中，語言即是最重要的心理工具。(張惠博，民 84)。

Vygostky 認為人類的心智發展就是憑藉這些符號與工具的中介作用。他也認為習得符號與工具對成功的社會中介而言是必要的條件，而成功的社會中介反過來也能教給人們更複雜的社會性符號或工具(Doolittle,1998)。

最典型的心理工具即是語言。人類可藉著它來進行思考。將外在行動轉化為語言符號所表徵的實體概念，在心智中做抽象的運作(楊順南，民 86)。Vygostky 相信語言的主要作用是溝通、與社會接觸，而且思考的發展是由社會而至個人。換言之，概念通常是經由社會互動中獲得，然後才內化(internalization)成為個人認知系統的一部分(Vygostky ,1978)。

Vygostky 從孩童的對話中，發現人類的對話有與生俱來的內在對話(inner speech)，這種內在的對話是本能的，它也是形成人類心智的基本能力，這種能力不假外求，我們稱它為邊緣心智能力(intra-mental ability)；另外的一種對話是人類對外的對話(outer speech)，它是經由與人或媒介的對話中所形成的心智能力，我們稱它為焠化心智能力(inter-mental ability)。從邊緣心智能力要發展至焠化心智能力，需要有第三種聲音(the third voice)或媒介的激化。這個成為激化酵素的第三種聲音或媒介，必須對孩童而言是權威性的(authorized)、值得信賴的(trust-worthy)，否則激化作用不會產生。這意味著孩童的心智能力發展應由較低的邊緣心智能力發展至較高的焠化心智能力，是需要借助外來的激化動力(Vygostky ,1978)。

綜合上述，可得以下結論：

(一) 學習的有效達成，必須經由引導的媒介與情境之間的邏輯、符號轉換、概念、符號、數字與文字等心理學工具(psychological tools)來學習。

(二) 從邊緣心智能力要發展至焠化心智能力，需要有第三種聲音或媒介的激化。這個成為激化酵素的第三種聲音或媒介，必須對學習者而言是權威性的、值得信賴的，否則激化作用不會產生。

(三) 學習者的心智能力發展應由較低的邊緣心智能力發展至較高的焠化心智能力，是需要借助外來的激化動力。

貳、文獻探討後對本研究的啟示

一、學習者 ZPD 的建立範圍

學習者的學習能力是要由有經驗的引導者來設計與導引。學習並非將學習者的 ZPD 定位在過去，而是要將學習者的 ZPD 朝向未來最佳化的學習能力之發展為目標。亦即是一個學習活動或評量的最佳化 ZPD 的上限與下限都不能超出學習者的能力範圍，否則若訂的太低，會讓學習者的 ZPD 停留在原地，導致學習沒效果；若訂的太高，會讓學習者的學習鈍化，導致放棄。

二、ZPD 的間距必須考量學習者之學前能力與學習目標之潛在能力

採用 ZPD 方式引導，必須先了解學習者過去的學習與經驗背景以及學習目標的潛在能力，以決定 ZPD 之間距與發展的方向。

三、學習鷹架的設計應包含垂直鷹架與水平鷹架兩個層次

在垂直鷹架方面，應將學習內容配合學習者的意圖、目標與需求，加以結構化設計，依學習者的學前能力及 ZPD 的間距，可逐漸將認知的學習複雜化，以培養其應用能力。在水平鷹架方面，引導者在教學或評量活動設計時，其學習內容應配合學習者的學前能力與經驗。

四、ZPD 需要有第三種聲音或媒介作為激化酵素的動力

學習者的心智能力發展應由較低的邊緣心智能力發展至較高的焠化心智能力，需要藉助外來的靠媒介作為激化酵素的動力，此媒介即為教材或評量中之邏輯、符號轉換、概念、符號、數字與文字等心理學工具。對學習者而言，是權威性的、值得信賴的，否則激化動力不會產生。

第二節 數學問題解決的相關理論

壹、問題解決的意涵與流程

OECD(Organisation for Economic Cooperation and Development)在2003 年提出「問題解決」的定義：這是一種個人的能力，運用認知過程去面對和解決實際跨領域的情境，在此情境內解決的方法不是立即明顯的，此讀寫能力所包含合適課程的領域並不是單一的數學、科學或閱讀(OECD，2003)。所謂「問題解決」（problem solving）即是運用個人先前舊有的經驗、知識、技巧和瞭解去滿足未能解決情境的要求與過程（吳德邦，吳順治，民 78）。

在 1910 年，John Deway 在他的一本書「How We Think」中，提到「問題解決」的五個步驟（Deway John，1910）：

一、瞭解一個問題的存在。

二、辨別問題－澄清問題和定義問題。

三、利用先前的經驗－概念和問題解決的觀念。

四、持續性的思考，進行提出假設或可能的解答。

六、評估解答，並在解題過程中劃定出一個結論。

在 1945 年，Polya George 在其所著「How To Solve It」中，即特別強調解題的重要性，並以啓發方式歸納出下列數學解題過程的步驟(Polya George，1945)：

一、必須瞭解問題。

二、找出已知數與未知數之間的關係，如果找不到，就只得考慮輔助問題，想辦法擬定一個解題的計畫。

三、實行解題計畫。

四、檢核所得的解答。

問題解決是將舊有的知識應用到新的情境、不熟悉的情境中，除了解

決教科書所列實際生活的問題之外，學生亦應有能力面對非教科書的問題及包括日常生活問題在內。問題解決的策略包括提出問題、分析條件、轉述結果、例證結果、圖表繪製及運用嘗試錯誤。在解決問題過程中，學生必須能應用邏輯的定律，以得到合理的結論（吳德邦，吳順治，民 78）。

以啓發式的角度切入，問題解決的流程，可分爲下列五個步驟（吳德邦，吳順治，78）：

一、閱讀問題：辨別事實真相、辨別題目的種類、瞭解字彙與生字。

二、探索問題：資料之合理性、組織和發展資料、運算的概念。

三、選擇策略：依閱讀問題和探究問題的程度而定，提供找尋答案的方向。

四、解決問題：利用各種運算的技巧去解決數學問題。

五、驗證解答：尋求解答的合理性。

綜合上述，問題解決是一種個人的能力，是將舊有的知識應用到新的情境中，以解決實際生活的問題。此問題解決的流程包含：閱讀問題、找出已知數與未知數之間的關係、選擇策略、解決問題、驗證解答等五個步驟。

貳、數學問題解決的流程

Polya George 在 1945 年所提 How To Solve It.中，將數學問題解決的流程分為四個步驟(Polya George,1945)：

一、了解問題：由問題所給予之提示，來了解已知與未知的關係，並根據學前所具備的知識與概念，進行尋找未知的關係。

二、擬定計畫：包含判斷解題所需的公式、輔助工具的應用、思考老師上課有無類似例題講解。

三、實行計畫：根據先前所擬定的計畫，進行策略執行。

四、回顧解答。

Mayer 在 1987 年針對應用題所提的四種數學解題策略的過程：

一、問題轉譯：將欲解問題語意化。

二、問題整合：透過基模知識探討問題類型關係。

三、解題計畫與監控：判斷、歸納問題性質及內容，決定使用策略。

四、解題執行：進行運算。

根據 PISA 專案的方案，建模能力是數學素養的關鍵因素。解決應用類問題的整個過程就是一種建模過程。茲將這個過程分解爲以下幾個步驟：數學化，加工處理，解釋，合法化(PISA..2000；鍾啓泉、徐斌耙；2003)。

一、數學化

這裏的模型是：以公式和等式架構所提出的定理或推論，來完成一個解答過程的草案。這一步驟的困難在於從一開始即不能馬上確定那個模型是比較適合的情境。

$$\boxed{\text{情　境}} \xrightarrow{\text{數學化}} \boxed{\text{模　型}}$$

二、加工處理

數學內部的解答過程。根據問題的提出以及模型選擇演算法過程或者選擇概念性運作過程。

$$\boxed{\text{模　型}} \xrightarrow{\text{加工處理}} \boxed{\text{數學解答}}$$

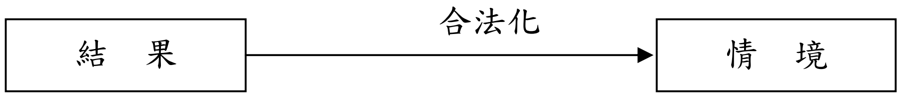
三、解釋

根據模型獲得的命題以及得到的結果，必須以所給予的應用性問題相一致。

$$\boxed{\text{數學解答}} \xrightarrow{\text{解釋}} \boxed{\text{結　果}}$$

四、合法化

所得到的結果是否完整的解決了初始問題。



從數學在現代工程技術和理論研究中的應用而言，大致上可將上述歸納爲下面的模式，此只是一個簡化的模式，從其實際應用而言，往往包含有多次的反復與改進，如圖 2-1 所示(鄭毓信，2004)。

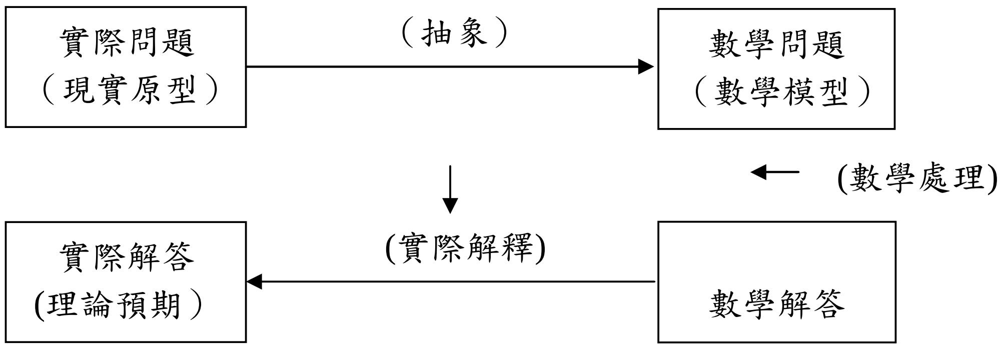


圖 2-1 數學問題解決簡化模式圖
資料來源：鄭毓信(2004)，頁 181

這一模型中所包括的由”實際問題”到”數學問題”的抽象，主要是一個應用數學語言重新進行建構的過程，也即如何用數學的概念、符號等去表現事物物件及其關係—這也就是通常所謂的”數學化” (鄭毓信，2004)。荷蘭的現實數學教育強調數學學習就是進行數學化的過程(Hart,K.,1981)。

數學建模的一般過程大致可以分爲現實問題數學化、模型求解、數學模型解答、現實問題解答驗證等四個階段。這四個階段實際上是完成從現實問題到數學模型，再從數學模型回到現實問題的不斷循序、不斷完善的過程，如圖 2-2 所示(鍾啓泉、徐斌耙，2003)，茲簡述如下：

數學化是指根據數學建模的目的和所具備的資料、圖表、過程、現象等各種訊息，將現實問題翻譯轉化爲數學問題，並用數學語言將其準確的表述出來。

求解是指利用已有的數學知識，選擇適當的數學方法和數學解題策略，求出數學模型的解答。

解釋是把用數學語言表述的解答翻譯轉化到現實問題，給予實際問題的解答。

驗證是用現實問題的各種訊息檢驗所得到實際問題的解答，以確保解答的正確性和數學模型的準確性。

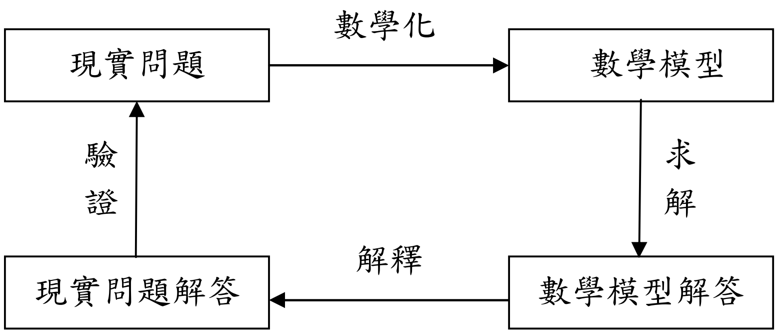


圖 2-2 數學建模的一般流程圖

資料來源：鍾啓泉、徐斌耙(2003)，頁 30

圖 2-2 首先揭示了現實問題和數學模型之間的關係，即數學模型是將現實問題的訊息加以數學化的產物。它用精確的數學語言揭示了現實問題的內在特性。數學模型經過求解，得到數學形式的解答，在經過一次轉化回到現實問題，給予現實問題的決策、預報、分析等結果，最後這些結果還要經過實際的檢驗，完成由實踐到理論再到實踐這樣一個不斷迴圈、不斷完善的過程。如果檢驗結果基本正確或者與實際情況的凝合度非常高，就可以用來當作本問題的解。反之，則應重復上述過程重新建立模型或者修正模型。

“數學化”就是現代技術、特別是計算器技術發展的必然產物。這就正如美國國家科學理事會在 1984 年發表的報告“進一步繁榮美國數學”中所指出的：“高科技的出現把我們的社會推進到數學工程技術的新時代”，“高科技本質上是一種數學技術”。“由於計算器的影響，使用者比以往更加需

要，而且將愈來愈需要真正懂得數學，吸收它的概念。”，對上述要求顯得最爲迫切的即是對急劇的技術變化之影響特別敏感的工程師(查有梁、李果民，2003)。

圖 2-3 揭示了數學建模的方法流程，即將現實問題經審題分析、改造轉換成現實模型，再將現實模型透過抽象概括化變成數學模型，並選擇適當數學策略與數學方法，求出數學模式的解，得到數學形式的解答，說明解答且還原成現實模型的解，最後以驗證方式判斷是否符合實際現實問題(查有梁、李果民，2003)。

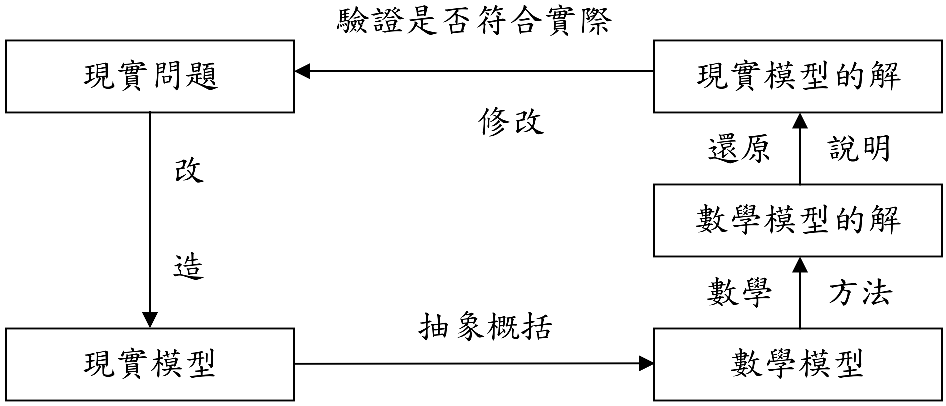


圖 2-3 數學建模的方法流程圖
資料來源：查有梁、李果民(2003)，頁 173

數學領域中，尤以「數學連結」最具解題的代表性，數學內部的連結著重解題能力的培養。數學外部的連結則強調生活與其他領域中的察覺、轉化、解題、溝通、評析諸能力的培養(何仕仁等，民 94)。

綜合上述，可得下列結論：

一、高科技本質上是與數學技術相關，高科技的出現把我們的社會推進到數學工程技術的新時代。因此以數學問題解決工程問題，在高科技領域中之工程師是最迫切需要的。

二、數學問題解決的流程，包含實際工程問題、形成數學問題、數學問

題解答、工程問題解答等四個步驟。此四個步驟有賴四種要素去迴圈運作，如圖 2-4 所示。其中與數學能力有關的有數學化、求解與詮釋，至於驗證必須要有電子工程之先備知識才能檢視。

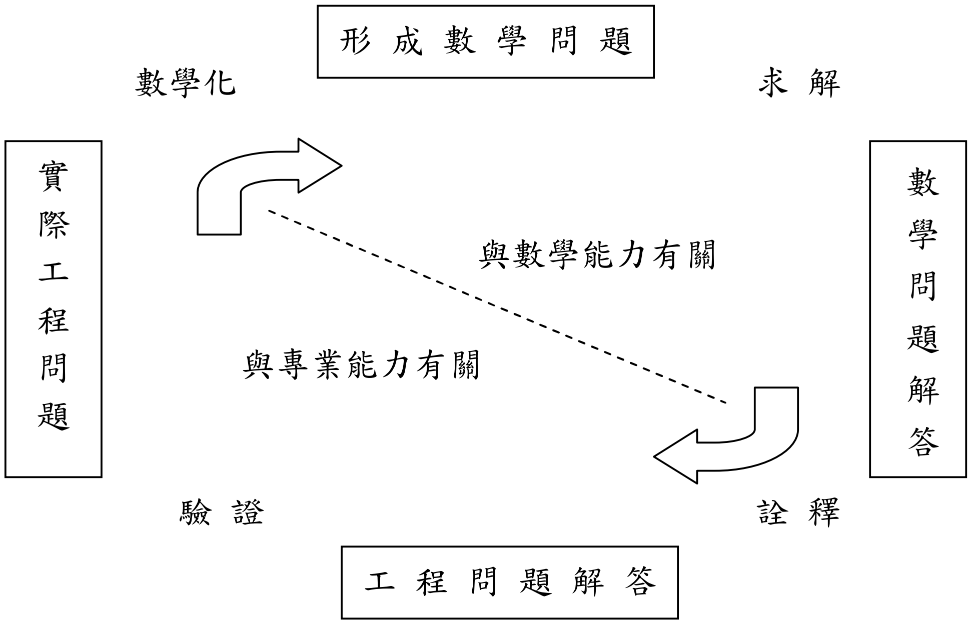


圖 2-4 數學問題解決的流程圖
資料來源：修改自鍾啓泉、徐斌艳(2003)，頁 30

(一)數學化是工程人員面臨實際工程問題時，從現實世界中具體的實際問題抽象出量化物件，亦將現實問題的訊息加以數學化的產物。需要運用數學的方法(數學的概念、符號)分析研究各種具體現象，以精確的數學語言轉化了現實問題的內在特性，並將其準確的表述出來，形成了數學問題。換句話說，陳述性知識向程序性知識的轉化過程必須將命題的知識轉化爲一種產生式(如果－那麼)，這樣才能有效的解決問題。而策略性知識若能和具體的問題情境相結合，便會產生具體領域的策略性知識，從而有助於轉化過程的完成(高民，1998)。

(二)求解是利用已有的數學知識，選擇適當的數學方法與數學解題策

略，並能運用數學工具或使用適當的程式軟體，求出數學模型的解答。

(三)詮釋是根據數學問題獲得的命題及得到的結果，以數學語言表述的解答詮釋到現實問題，給予工程問題的解答。

(四)驗證是用從工程問題的各種訊息檢驗所得到工程問題的解答，以確保解答的正確性和數學問題的準確性。反之，則應重覆上述過程而重新建立或修正數學問題。

參、數學建模的具體程序

依據數學建模的一般過程，可將建立數學模型的具體過程分爲識模、析模、建模、解模和驗模五個步驟(鍾啓泉、徐斌艳，2003)，如下圖所示：

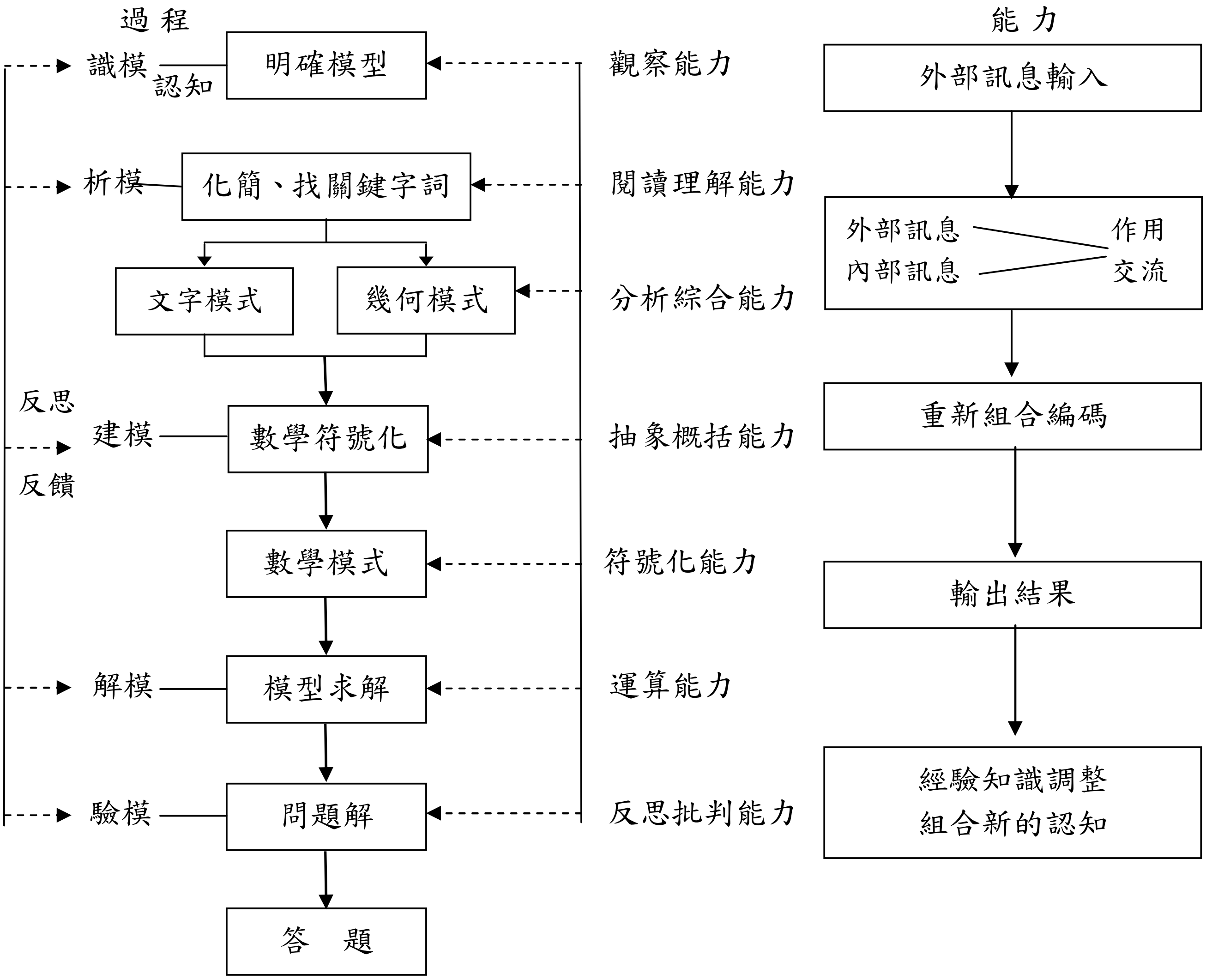


圖 2-5 數學建模的具體過程圖

資料來源：鍾啓泉、徐斌耙(2003)，頁 31

一、識模：學生閱讀問題情境，初步判斷該問題情境要解決什麼、涉及那些相關知識領域，從而確定建模的類型，明確建模的方向。

二、析模：學生需要仔細閱讀、分析思考問題情境，抓住關鍵字句，捨棄不必要的詞句，化簡問題情境，尋找基本數量及其關係，適當地輔以幾何圖或示意圖轉換問題，必要時建立幾何模型或文字模型。這時一定要注意已知量，發現未知量，挖掘問題中的隱含條件。析模是建構的關鍵，也是建構的難點，學生必須具備一定的數學閱讀能力、敏銳的洞察力和綜合分析

能力。

三、建模：學生通過數學符號化這種方式，把幾何模型或文字模型轉化爲數學模型。所謂數學符號化，是祇通過已知量的代入、未知量的設定，把模型轉化成一個用數學語言敘述的數學問題，所建立起的教學模型可能用方程、不等式、數列來表述，也可能用函數、圖表、圖形等關係來表述。新舊知識經驗的重組、建構對問題情境之數學理解的過程，要求學生具備較強的數學化能力和抽象概括能力。

四、解模：學生運用已有的數學知識方法、解題經驗及解題策略，對所建立起的數學模型求解。這一步驟要求學生具備紮實的數學知識、熟練的數學運算能力和嚴密的邏輯推理能力。

五、驗模：由於數學問題情境的複雜性、開放性和學生已有數學知識經驗的局限性、差異性，學生根據自己理解所建立的數學模型往往也存在缺陷，可能會使所建立的數學模型，以及依據模型求出解答脫離了實際情況或沒有實用價值。因此，必須對模型的解進行驗證，如果驗證發現依據模型求出的解答與現實不符或誤差太大，就需要修正模型或重新建立模型，再重新求解、檢驗，直至得到滿意的結果爲止。這個步驟要求學生具有較好的反思批判能力、元認知能力、綜合能力以及通過實踐驗證數學模型的能力。通過驗模這一數學建構活動，學生對問題情境的理解會更加透徹，數學模型的最終建立會使學生的數學知識尤其是數學建模經驗更加豐富，也爲建立類似的問題情境的數學模型奠定了基礎。

從工程的角度來看，數學是技術，是將純數學與應用數學的知識體系應用於實際問題上，亦即是一種定量思維的過程(畢恩材，2002)。從圖 2-6 顯示定量化的思維方式：

一、推斷：從現實世界問題中的資料、圖形等原始資料推理判斷。

二、邏輯分析：尋求前提中所蘊含著的各種量，即能解釋所出現之現象的基本原理。

三、抽象化：從各種現象中抽取共有性質進行研究。

四、符號化：採用表示抽象概念的數學符號。

通過以上四方面之思維建構模式，構造出符合於原始問題的各種量的數學模式；對模式的研究，尋求最優的數學解；最後還原爲現實世界問題的解。

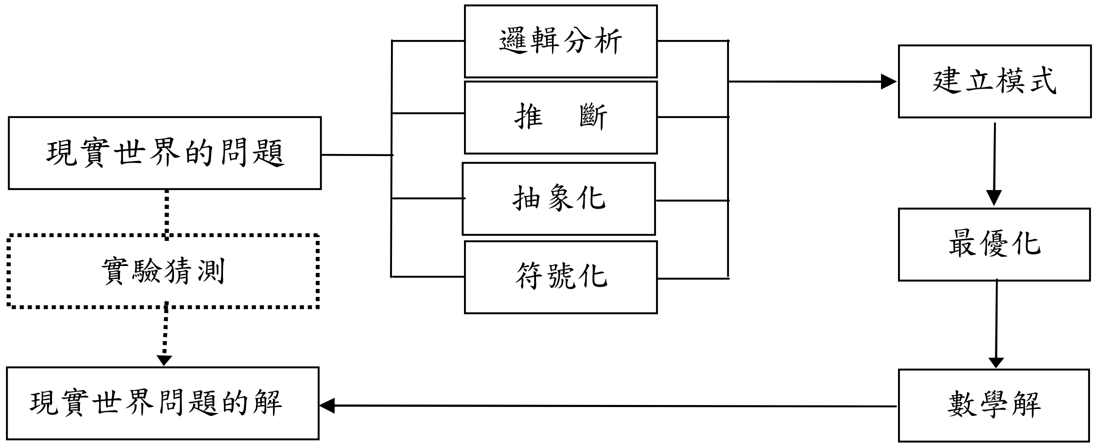


圖 2-6 數學定量思維的過程圖

資料來源：畢恩材(2003)，頁 19

就數學與現實世界的連繫而言，總是從現實世界中具體的實際問題抽象出量化物件，再用數學的研究方法（運算、推理等）解決實際問題。換句話說，從具體的實際問題直接抽象的“量化物件“，由於其依賴於特定的具體事物或現象，爲了使這種量化物件真正進入數學領域，必須將它們再抽象。

在數學模型解決問題方面，有兩位學者針對數學建模的步驟，提出了他們解題程序：

一、用數學模型解決問題之一般過程的五個步驟(Mark M.M，1999)：

第一步驟：提出問題

首先在應用數學形式提出問題之前，要先定義一些術語。其次

（一）列出整個問題涉及的變量，包括恰當的單位。

（二）注意不要混淆了變量和常量。

（三）列出對變量所做的全部假設，列出已知的或假設的這些變量之間的關係。包括：等式和不等式。

（四）檢查變量的單位，從而保證你的假設有意義。

（五）用準確的數學運算式給出問題的目標。

第二步驟：選擇建模方法

（一）選擇解決問題一般的求解方法。

（二）此求解方法的成功與否需要經驗、技巧和對相關文獻有一定的熟悉度。

第三步驟：推導模型的公式

（一）將第一步驟中所得到的問題，重新表達成第二步驟選定之建模方法所需要的形式。

（二)將第一步驟中的一些變數名稱改爲與第二步驟所用的符號與形式一致。

（三）記下任何補充假設，這些假設是爲了使第一步驟中描述的問題與第二步中選定的數學結構相適應而做出的。

第四步驟：求解模型

（一）將第二步驟中所選的方法應用於第三步驟所得到的運算式。

（二)注意你的數學推導並檢查是否有錯誤,所得的解答是否有意義。

第五步驟：回答問題

（一）用非技術性的語言將第四步驟的結果重新表述。

（二）避免使用數學符號和術語。

（三）能理解最初提出問題的人，就應該能理解你給予的解答。

二、數學建模的一般步驟(謝兆鴻等，2003)：

第一步驟：模型準備(分析問題)

首先了解問題的實際背景及其目的，弄清楚對象的特徵，在此基礎上探討解決問題的辦法。

第二步驟：模型假設

根據實際對象的特徵及目的，對於研究對象有關聯的多種因素進行分析，找出主要因素與次要因素，本質與非本質因素，並用精確語言進行假設。

第三步驟：模型建立

根據所做的假設，根據問題的特徵及目的，利用適當的數學工具來描述各變量之間的關係，建立相對應的數學結構(公式、表格、圖形等)模型。

第四步驟：模型求解

運用適當的數學工具對模型求解，它包括：數值解、解析解、圖解、邏輯推理等，其中可借助計算機來完成。

第五步驟：模型檢驗

用實際結果對模型的合理性、適用性、正確性、靈敏性作評價。

綜合了上述，針對數學建模的具體程序，三位專家的看法提出並排比較表，如表 2-1 所示。

表 2-1 三位專家針對數學建模的具體程序提出看法之併排比較表

	鐘啟泉、徐斌耙(2003)	Mark M.M(1999)	謝兆鴻等(2003)
識模	明確模型	提出問題	模型準備(分析問題)
析模	化簡、找關鍵字詞		
	文字模式、幾何模式		模型假設
建模	數學符號化	選擇建模方法	模型建立
	數學模式		
解模	模型求解	推導模型的公式	模型求解
驗模	問題解	回答問題	模型檢驗
	答題		

綜合上述，可得下列結論

一、從圖 2-6 數學定量思維的過程圖中發現，在現實世界問題與現實世界問題的解之間，影射了「實驗猜測」這個機制，顯示出在數學定量思維的過程中，會有數據的觀察、臆測、驗證等思維動作。

二、從表 2-1 之三位專家對數學建模的具體程序看法之併排比較表發現：識模與析模較傾向於「數學化」的過程；建模與解模較傾向於「求解」的過程；驗模較傾向於「詮釋」與「驗證」的過程。

肆、數學建模的能力培養

一、數學建模的能力方面

在數學建模的能力培養方面，有兩位學者針對數學建模的能力提出了他們的看法：

(一)數學建模處理實際問題的能力(謝兆鴻等，2003)

數學建模除要用到數學知識及專業知識外，還要有駕馭這些知識及應用這些知識來處理實際問題的能力。因此，數學建模技術的學習和應用，培養了學習和實踐者以下的能力：

1.洞察能力：善於從實際工作所提供的原形中抓住其數學本質。

2.數學語言翻譯能力：能把實際問題用數學的語言表達，又能將數學推導和計算所得到的結果，以大眾化的語言表達。

3.綜合應用能力：能將數學知識和其他學科的知識進行綜合應用。

4.抽象聯想能力：培養他們的抽象思維和觸類旁通的聯想能力。

5.自學和創新能力：在建立數學模型的全部過程中，既學習到各種新知識、新技術，又掌握對新知識和新技術實際應用的能力。

(二)建立數學模型應具備下述五個方面的能力(熊啟才主編，2005)：

1.分析綜合能力

2.抽象概括能力

3.想像洞察能力

4.運用數學工具能力

5.通過實踐驗證數學模型能力

二、數學能力型的分類

數學解題能力型有學習能力型、探究能力型、應用能力型與本研究有關的有解學習能力型問題、解應用能力型問題兩種，茲簡述如下(奚定華等，2004)：

(一)如何解學習能力型問題

1.數學一般能力

數學一般能力是指順利完成各種活動所必備的基本心理能力，主要包括：學習新的數學知識能力、探索數學問題能力、應用數學知識解決實際問題能力和數學創新能力。

(1)學習新的數學知識能力

係指通過閱讀、理解以前沒有學過之新數學知識(包括：新的概念、定理、公式、法則和方法等)，並能運用它們作進一步的運算和推理，來解決有關問題的能力，這是一種學會學習的能力。

(2)探究數學問題能力

探究數學問題能力是指運用學過的數學知識，通過觀察、試驗、聯想、類比、演譯、歸納、分析、綜合、猜想等思維模式，對數學問題提出探索與研究的能力。

(3)應用數學知識解決實際問題能力

係指能正確理解問題的背景，找出它們的數量關係，建立數學模型，從而解決實際問題能力。

但此地要注意的是解能力型問題時不能再用過去只是套題型、套模式的方法，應該通過分析問題，學習解決數學問題的方法，掌握解決數學問題的策略，來提高解決問題的能力。

2.解學習能力型題目的步驟：

(1)閱讀理解

首先通過閱讀理解題意，理解題目中所包含新的概念、定理、公式或方法的本質。這裡又分成兩步：

A.字面理解：要求讀懂其中每一個句子的含義。

B.深層理解：要求深入理解新觀念的本質屬性，分為清新的定理之條件和結論、理解新方法之關鍵詞等。換句話說，首先要求學生具備一定語文和數學的基礎知識，對定義中的詞和句子能有正確的理解，在此基礎之上才能揭示觀念的本質屬性。

(2)運用數學的方法與策略

在理解新的概念、定理、公式或方法的基礎之上，運用他們來解決有關的問題。

3.如何提高解學習能力型問題的能力

(1)重視提高閱讀理解能力

在閱讀題目的基礎之上，要具備一定語文和數學的基礎知識，對定義中的詞或句子能有正確的理解，在此基礎上才能揭示概念的本質屬性。

(2)平時學習時要注意培養獨立學習的能力。

學習能力型包含新的概念、定理、公式或方法，在解題時即要求通過自己獨立學習，來理解這些概念、定理、公式或方法，在此基礎之上，要能順利的解決這類應用問題，應儘量通過自己獨立學習掌握新的知識，而不能全依賴教師的講解。

(二)如何解應用能力型問題

應用能力是指能正確理解問題的背景，會分析出有關的訊息並能進行提煉、加工，找出它們的數量關係，來建立數學模型，並

運用所學的數學知識和數學方法找到解決數學問題的途徑，得到符合實際問題的結論。即應用數學知識作出分析、合理的判斷，來考查學生應用數學知識分析問題和解決問題的能力(奚定華等，2004)。

1.應用能力型問題一般有以下幾種情況：

(1)數學知識和方法的直接應用。

(2)運用熟悉的數學模型對問題進行定量分析。

(3)根據實際問題所提供的訊息，建立較簡單的數學模型。

(4)對具有較複雜背景的實際問題所提供的訊息進行分析和加工，以建立較複雜的數學模型。

2.應用能力型問題的特點

在 ABET(2003)八大能力的說明上，提到學習能力型題目一定要考量到下列現象：

(1)有一定的實際背景

許多應用問題都有各自的實際背景，要解決這些問題，必需熟悉有關的實際背景，了解有關的知識，在此基礎上才能理解問題的含意，使問題得到解決，否則在解決問題過程中就會產生一定的困難。

(2)訊息量大，閱讀要求高

由於應用題涉及許多實際的內容，有些還有很多數據、表格和圖形，因此往往題目冗長，字數很多，訊息量大。而且還有許多新的專業術語，都要求要理解它們的意義，閱讀要求也比較高，加上應用題的條件與結論之間的關係也比較複雜，比較隱蔽。

(3)涉及知識點多，綜合性強

在一般的情況下，應用題涉及知識點會比較多，如果有

某一個知識點沒有掌握好，那麼整個問題就沒有辦法掌控。

3.解應用能力型問題的步驟

(1)審題

首先理解題意，分清楚條件和結論，其次是找出其數量關係。

(2)將應用問題轉化成數學問題

通過抽象，把應用題中的生活語言轉換成數學語言，使應用問題轉化成數學問題。

(3)建立數學模型

根據數學問題中的條件和結論，通過分析、猜測、試驗、演繹、歸納和類比等手段，來建立適當的數學模型。

(4)進行數學運算和推理

對數學模型進行數學運算和推理，求得問題的結果。

(5)檢驗

檢驗所得到的結果是否符合實際情況，亦即是否符合題意。

(6)寫出答案

在檢驗的基礎上寫出答案。

4.如何提高解應用能力型問題的能力

(1)要了解問題的專業實際背景

解應用問題首先遇到一個障礙就是題目看不懂，不理解題意，主要原因即是不熟悉專業實際的背景，不知道有關專業術語的含義，以致無法理解題目中語句所包含的意思，不能把握住題目中所提供的全部訊息。唯有了解題目中的專業背景，才能充分理解提題意，進而解決問題。

(2)提高語言轉換能力

要把日常生活語言轉換成數學語言，這裡需要語言轉換能力，要用數學語言把問題的內容清晰、簡捷的表達出來。此處涉及到幾種狀況：一種為術語，它既有專業方面的意義，又有數學方面的意義。另一種是顯現出其數量的關係，如：增加、減少、超過、不足、上升、下降等，它們可以轉化為「＋」、「－」、「＞」、「＜」等數學語言。還有一些比較隱蔽，需要仔細分析和提會日常語言的含義，才能把它轉換為數學語言。故要培養較強的語言轉換能力，必須通過解一個個應用問題逐步培養出來的。

(3)培養建立數學模型的能力

係指通過分析題目中的數量關係，利用日常生活與專業知識的經驗與規律，建立描述問題的框架結構(包括：公式、方程式、不等式、表格和圖形等)，這是解決應用問題的關鍵性步驟。但建立數學模型是一個很複雜的過程，不同的問題有不同的數學模型，建立數學模型也沒有固定的格式和標準，必須具體問題具體分析，只有在解決問題的過程中，通過觀察、分析、綜合、抽象、概括、演繹、歸納，才能提高建立數學模型的能力。

綜合上述，可得下列結論

一、培養數學建模之能力，應重視洞察能力、分析綜合能力、數學語言轉換能力、抽象概括能力、綜合應用能力、連結能力、運用數學工具能力、通過實踐驗證數學模型能力。

二、解應用能力型問題之能力，應重視閱讀理解能力、語言轉換的能力、提高數學建模能力(觀察、分析、綜合、抽象、概括、演譯、歸納)。

三、解應用能力型問題的步驟：

(一)審題：理解題意、找出數量關係。

(二)將應用問題轉化成數學問題：即把生活語言轉換成數學語言。

(三)建立描述問題的框架結構：通過分析題目中的數量關係，利用日常生活與專業知識的經驗與規律，建立描述問題的公式、方程式、不等式、表格和圖形等目標函數。

伍、文獻探討後對本研究的啟示

一、解決實際工程問題必須考量的因素

(一)有一定的專業背景

必需了解有關的工程背景與知識，在此基礎上才能理解問題的含意，使問題得到解決。

(二)訊息量大，閱讀要求高

由於工程問題涉及的內容，有些會利用數據、表格和圖形，還夾雜一些專業術語，故閱讀的要求會比較高。

(三)涉及的專業知識與數學知識的概念點多，綜合性強

工程問題涉及的知識點較多，如果有某一個知識點沒有掌握好，那麼整個問題就沒有辦法掌控。

二、問題解決的流程

問題解決的流程包含：閱讀問題、找出已知數與未知數之間的關係、選擇策略、解決問題、驗證解答等五個步驟。

三、數學問題解決的流程

數學問題解決的流程，包含實際工程問題、形成數學問題、數學問題解答、工程問題解答等四個步驟。此四個步驟有賴四種要素去迴圈運作，如圖 2-4 所示。其中與數學能力有關的有數學化、求解與詮釋，至於驗證必須要有電子工程之先備知識才能檢視。

1.數學化：從現實世界中將具體的實際問題抽象出量化物件，並將現實問題的訊息加以數學化的產物，形成了數學問題。

2.求解：利用已有的數學知識，選擇適當的數學方法與數學解題策略，並能運用數學運算、推理、計算器或使用適當的程式軟體等工具，求出數學模型的解答。

3.詮釋：根據數學問題獲得的命題及得到的結果，以數學語言表述的解答詮釋到現實問題，給予工程問題的解答。

4.驗證：從工程問題的各種訊息檢驗所得到工程問題的解答，以確保解答的正確性和數學問題的準確性。

四、在數學定量思維的運作過程應重視觀察、臆測、驗證等思維的動作

在現實世界問題與現實世界問題的解之間，影射了「實驗猜測」這個機制，顯示出在數學定量思維的過程中，會有數據的觀察、臆測、驗證等思維的動作。

五、數學建模的具體程序

數學建模的具體程序包括：識模與析模較傾向於「數學化」的過程；建模與解模較傾向於「求解」的過程；驗模較傾向於「詮釋」與「驗證」的過程。

六、解應用能力型問題應具備之能力

解應用能力型問題之能力，應重視閱讀理解能力、語言轉換的能力、洞察能力、分析綜合能力、抽象概括能力、綜合應用能力、連結能力、運用數學工具能力、通過實踐驗證數學模型能力。

七、解應用能力型問題具備的步驟

解應用能力型問題的步驟：

（一）審題：理解題意、找出數量關係。

（二）將應用問題轉化成數學問題：即把生活語言轉換成數學語言。

（三）建立描述問題的框架結構：通過分析題目中的數量關係，利用日常生活與專業知識的經驗與規律，建立描述問題的公式、方程式、不等式、表格和圖形等目標函數。

八、電子工程問題的數學解題能力的理論程序與機制

本研究針對上述的重點啟示，將其理論的程序與機制歸類如下：

(一)在數學化部份之程序

1.審題：理解題意、理解專業術語。

2.分析問題：找出已知數與未知數之數量關係。

3.提出目標：把工程語言轉換成數學語言，並提出目標函數。

(二)在求解部份之程序

1.選擇解題策略與運算方法、公式：選擇建模方法、推導的公式。

2.運算處理：進行數學運算和推理。

3.求出解答：求得問題的數學結果。

(三)在詮釋部份之程序

1.解讀解答：回答問題的數學結果。

2.詮釋問題：依問題的數學結果來詮釋其結果。

(四)在驗證部份之程序

1.驗證數字：檢驗數字的正確性

2.評估結果：評估結果是否符合題意及實際情況。

第三節 核心能力內涵理論

壹、能力的意涵

能力(competence)概念最早是由美國哈佛大學心理學家McClelland(1973)所提出。能力在英文系統中有兩個字「competence 及「competency」，此兩字之解釋在運用上極爲類似，一般在英國及歐洲多用 competence，在美國則較多用 competency。有關此兩字之差異曾有學者做過比較很類似(楊琪，民 93；Wood＆Payne,1998；Alan Trotter＆Linda Ellison,1997)。Weiner(1999)認爲能力是指「在執行任務或從事某一工作時，所需具備的知識情境與技能等實際表現的行爲」。能力是直接影響活動效果，使活動能順利完成的個性心理特徵，個體身上經常的、穩定的表現出來之心理特點既有共同性和差異性。換句話說，能力是在活動中形成、體現和發展的，它的強弱會影響個體掌握某種活動的快慢、難易和鞏固程度(田萬海，2001)。能力是指一個人能迅速成功的完成某種活動之個性特徵，此個性特徵係指一個人所具有各種重要的和持久的心理特點。如：觀察力、表達能力、理解能力、接受能力、思考能力、自學能力、操作能力、應用能力…等(馬忠林，2003)。

能力可分爲一般能力和特殊能力。一般能力是在許多基本活動中表現出來，而且是各種活動都必須具備的能力。如：注意力、觀察力、記憶力、思維力和想象力都屬於一般能力。特殊能力是在某種專業活動中表現出來的能力。如：數學能力就是一種特殊能力，它是指在數學學習和數學發明創造中表現出來的能力(田萬海，2001)。

有關能力的研究可分爲因素說和結構說。因素說是研究能力構成要素的學說，具有代表性的是桑代克(E・L・Thorndike)的特殊因素理論，他認爲智力是由許多特殊能力組成的，其中包括 C(填句)、A(算術推理)、V(詞)、D(領會指示)。Spearman(1927)提出了二因素論(two-factor theory)，

認爲智力是由兩種性質不同的因素所組成的。其中一個因素僅包含著一個普通因素(general factor)，簡稱 g 因素(g factor)；除了 g 因素外，另一種因素包含著多種不同的特殊因素(specific factor)，即 s 因素，它是與特定情境中之特定能力有關的因素。諸如：肢體運動、數學計算等能力。在凱勒(T.L.Kelly)和瑟斯頓(L.L.Thurstone)分別提出了“多因素說”。凱勒提出數、形、語言、記憶、推理等五種因素；瑟斯頓提出數位因素、詞的流暢、詞的理解、推理因素、記憶因素、空間知覺、知覺速度等七種因素。從以上各種學說可以看出，其中多數都包括了與數學有關的能力因素。

結構說強調能力是一種結構，即強調成份和成份之間的相互關係和相互作用。比較有代表性的是吉爾福特(J.P.Guilford)的三維結構模式，認爲智力是由操作、內容、結果三個維度空間中 120 種因素所構成的。英國心理學家阜南(P.E.Vernon)在 1960 年提出了智力的層次結構理論，認爲智力是一個多層次的心理結構，最高層次是一般因素，第二層次包括言語和教育、操作和機械兩大因素群，第三層次之每個大因素群又分爲幾個小因素群，第四層次是各種特殊能力。美國心理學家希來辛格(I.M.Schlesinger)和格德曼(L.Guttman)在 1969 年提出二維結構模型，第一維是言語、數和形(空間)的能力，第二維是規則應用能力、規則推理能力和學校各種學業測驗成績。以上各種有關智力和能力的觀點各有其特色、也各有側重，爲我們進一步的研究有借鑒意義的參考。

綜合上述可知：關於智力和能力，在國內外心理學界，對智力和能力的理解很不一致，對智力和能力這兩個概念的關係也存在著分歧。我們同意這樣的觀點，智力與能力是從屬關係，能力的範圍比智力大。能力可分爲一般心理能力和特殊心理能力，一般心理能力是指順利完成各種活動所必備的基本心理能力，如：注意力、觀察力、記憶力、想象力、思維力等。智力就是這些在認識活動中表現出來的一般心理能力之一種綜合的整體結構，就是在由它所引起並與它相互作用的意識性之心理活動中的協調反

應。思維力構成了智力的核心。特殊心理能力是順利完成某種特殊活動所必備的心理能力，如：數學能力就是一種特殊的心理能力，它是順利完成數學活動所必備的心理能力。

貳、數學能力的意義

數學能力是順利完成數學活動所必備且直接影響其活動效率的一種個性心理特徵，它是在數學活動過程中形成和發展起來的(馬忠林，2003)。

Krutetskii(1976)認爲數學能力包含創造性能力(creative ability)、學校能力(school ability)。

一、創造性能力

其表現在科學的數學活動上，這種能力能產生對人類有意義的新成果和新成就，對社會做出有價值的貢獻。

二、學校能力

此能力表現在對學校數學課程的成功學習上，具此能力的學習者，可以迅速而順利地掌握適當的知識和技能的能力。

所謂「數學能力」，是指對數學掌握的綜合性能力以及對數學有整體性的感覺。在學習數學時，一般重視的是觀念和演算，但學生的數學經驗（或數學感覺）的培養與其都是同等重要。要確保學生能學好新數學題材的要素之一，旨在如何引導並利用學生的前置經驗（或感覺），這種數學的經驗或感覺就是數學的直覺或直觀。即數學能力須藉由舊有的數學經驗來統合成新的直覺或邏輯經驗。

數學教學的目的與數學能力的培養，其中心內容有兩個層面：數學的實用功力層面和數學的思維訓練層面。荷蘭有"現實數學"的提法，強調數學的實用價值(張奠宙等，2003)。

綜合上述可知：「數學能力」係指對數學掌握的綜合性能力以及對數學有整體性的感覺。它需藉由舊有之數學習得的經驗來統合成新的直覺或邏輯經驗。

參、數學能力的結構分析

數學能力常包括學習數學的能力和初步的創造能力，其數學學習與數學能力的關係如圖 2-7 所示(馬忠林，2003)。

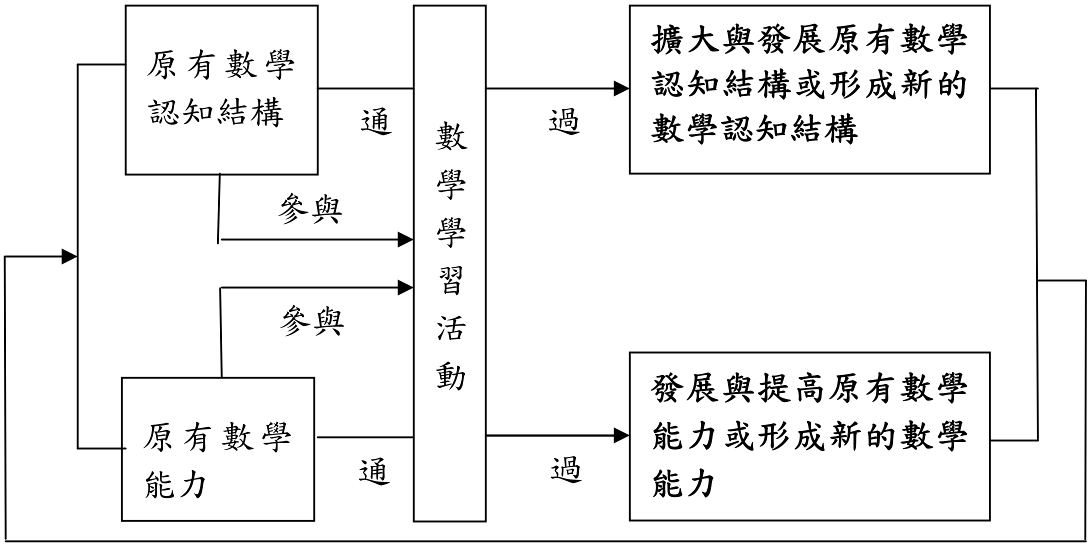


圖 2-7 數學學習與數學能力的關係

資料來源：馬忠林(2003)，頁 115

Niss 認爲分析個體所擁有的數學能力需考慮三個面向：

一、覆蓋的程度：個體精熟這個能力的範圍。

二、行動的半徑：個體能活化這個能力的脈絡與情境的範圍。

三、技術層次：個體能活化這個能力時，如何在概念上及技術上精進其實體與工具。

Niss 把每項能力看做是由這三個面向所組成的立方體，能力所代表的體積就是三面向之積。若其中一個面向的測度爲 0，則能力亦爲 0。相同的能力可能是無限多種不同面向的組合。

綜合上述，從圖 2-7 數學學習與數學能力的關係可知：學生在原有數學的認知結構與原有數學的能力之基礎上參與數學活動時，當活動完成且通過後，會形成學生擴大或建立新的數學認知結構及增強數學能力。其擁有數學的能力含蓋覆蓋的程度、行動的半徑(能力的脈絡與情境的範圍)、技術層次，三者缺一，即無法擁有。

肆、各專家學者對數學能力的分類

一、中國大陸數學家華羅庚與關肇直(1958)提出數學的三種基本能力(田萬海，2001)

（一）運算能力

運算能力是指邏輯思維能力與運算技能的結合，它具有下述兩個特點：

1.運算能力的綜合性：即運算能力不可能獨立的存在和發展，而與記憶、理解、推理、表達以及空間想象等能力互相滲透、互相支援。

2.運算能力的層次性：即運算能力的發展總是從簡單到複雜、從低級到高級、從具體到抽象，是有層次的發展起來。

培養學生正確迅速的運算能力，可以採用下列一些做法：

1.加強基礎知識和基本技能的教學，提高運算的準確性。

2.讓學生掌握運算的通法通則。

3.靈活運用條件，提高運算的簡捷性。運算的簡捷性是提高運算能力的核心。

（二）邏輯思維能力

邏輯思維能力就是正確、合理的進行思考的能力。在數學教學中發展學生的邏輯思維能力，即是發展形式邏輯思維能力，在數學中，”一個數學概念的形成，通常要經過對具體事物進行觀察、比較、分析、綜合、概括、抽象、歸納、演繹的過程。一個數學命題的建立，往往要對概念進行分類，觀察它們之間的關係，探索並揭露它們的演變規律，以達到新的判斷，常常是用類比、歸納的方法，先作出猜想，再加以科學的論證，都需要在頭腦裏合理進行思維活動，這些也就是我們需要培養學生的邏輯思維能力。如何培養學生的邏輯思維能力呢？

1.培養學生正確運用邏輯思維形式的能力

培養學生能準確的形成概念及使用概念，並恰當的判斷和思維合乎邏輯的起碼要求。即

（1）概念必須明確：因概念是構成判斷、推理的要素，是思維的細胞，概念明確(概念的內涵要確定，不容許含糊不清；概念的外延要確定，不能變化無常)是思維合乎邏輯的起碼要求。在給予概念下定義時，要充分揭示概念的本質屬性，要先通過新舊概念、正誤概念、近似概念、從屬概念的對比，使學生形成準確、完整、嚴密的概念。

（2）判斷必須恰當：判斷是對某種事務進行肯定或否定的思維形式，概念與概念之間以一定的方式連結起來，就構成判斷。即要培養學生正確的掌握定義、公理、定理、性質和法則，並能正確運用的能力。

（3）推理必須合乎邏輯：推理是從已知判斷推出新判斷的思維，其任務在於揭露個別與一般之間的聯繫。邏輯推理的要求是：前提真實，推理過程一貫不矛盾，並具有論證性。注重分析、講清思路，是培養邏輯推理的能力。

2.指導學生嚴格遵守思維規律，養成嚴謹的思維習慣

嚴格遵守思維規律，推理嚴謹，言必有據，是邏輯思維的核心問題。教師要培養學生嚴謹思維的習慣，經常注意糾正學生常見的思維錯誤，以潛移默化的方式逐步發展學生的邏輯思維的能力。

3.重視知識獲取過程的教學

培養抽象概括、分析綜合、推理證明的能力。教師講課的重點應該是了解知識的發生過程、講解問題解決的思維過程，揭示問題解決的思想和方法。教師要通過教學活動，突出”怎麼樣

想的”，使學生”會想”，這樣會有利於學生從中吸取經驗、鍛煉和發展邏輯思維的能力。

（三）空間想象能力。

空間想象能力就是人們對客觀事物的空間形式，進行觀察、分析、抽象、概括，在頭腦中形成反應客觀事物的形象和圖形，正確判斷空間元素之間的位置關係和度量關係的能力。

二、 Krutetskii(1976)認爲數學能力所包含的創造能力與學校能力之間一定有關聯，而將數學能力的成份從數學思考的基本特質中，提出九項數學能力：(改至 Krutetskii(1976))

（一）形成問題的能力

即從內容中抽出形式，從具體的數量關係和空間形式中進行抽象，以及運用形式結構即關係和聯繫的結構進行運算的能力，即使數學材料形式化的能力。

（二）概化的能力

即從不相關的材料中抽出最重要的東西，以及從外表不同的材料中看出共同點的能力，即概括數學材料的能力。

（三）運算的能力

運用數學與文字符號進行運算的能力。

（四）邏輯推理的能力

進行序列、分段逐步推理的能力，這和論證、具體化與演繹的需要有關。

（五）簡捷思考的能力

爲縮短推理過程的能力，即精簡了結構進行思維的能力。

（六）逆向思考的能力

爲逆轉心理過程的能力，即用從正方向思考轉爲逆方向思考的能力。

（七）彈性思考的能力

爲思維的靈活性、變通性，從一種心理運算轉向另一種心理運算的能力。從平凡而陳腐的影響束縛下解脫出來的能力。這種思維的品質對數學家的創造性活動是很重要的。

（八）數學記憶的能力

此爲對由前所敍述的問題形成之形式化、概化及推理經驗中，所形成的型式、結構或邏輯基模的記憶力。

（九）空間概念的能力

這與數學的一些分支有著直接的關係，如：幾何。

三、1989 年在 NCTM 之"Principles and Standards for School Mathematics"的"Curriculum & Evaluation"中指出數學的學習應強調：

（一）解題(如圖 2-8)

1.能利用解題探究及瞭解數學內容。

2.能從日常生活及數學情境中形成問題。

3.能發展及應用策略解決不同的問題。

4.能驗證及詮釋原本問題的結果。

5.能將解答與策略一般化到新的情境。

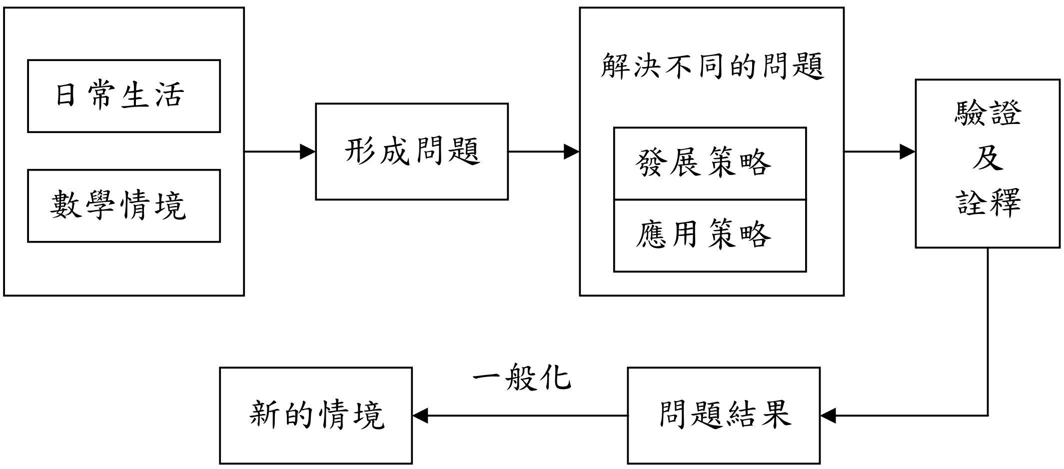


圖 2-8　NCTM 數學解題的流程圖

資料來源：修改自 NCTM(1989)；黃志賢(民 94)，頁 14-15

（二）溝通

1.能使用口語、書寫、具體、圖片、圖表及代數方法模式化情境。

2.能指出與數學想法相關的物理材料、圖片與圖表。

3.能反思及闡明數學想法與情境。

4.能指出日常語言、數學語言及符號的相關性。

5.瞭解表徵、討論、讀寫數學是學習和使用數學不可缺少的一部分。

（三）推理與證明

1.能察覺並應用歸納及演繹推理。

2.能使用模式、已知事實、性質及關係解釋自己的思考。

3.能解釋答案及解答過程。

4.能使用樣式和關係分析數學情境。

5.能創造並評估數學臆測與數學推論。

（四）連結

1.能連結概念與程式性知識。

2.能使用圖表、數值、代數和口語的數學模式或表徵，來探究問題及描述結果。

3.能指出不同概念或程式的表徵之間的關係。

4.能察覺不同數學主題之間的關係。

5.能利用數學思考與模式解決其他課程領域或日常生活中的問題。

6.能重視數學在文化與社會中的角色。

四、NAEP(1999)在 1996 年所進行的數學科評量中，將數學能力分爲：

（一）概念的瞭解

1.對於概念符號的正反例能加以辨識。

2.能利用模型、圖形及符號來表示概念。

3.能辨識和應用原理原則。

4.能知道和應用事實與定義。

5.能整合相關概念和原理原則，擴充原本的概念和原理原則。

6.能辨識和應用符號表示概念。

7.能詮釋概念間相關結論與其關係。

（三）程式性的知識

1.能正確地選擇和應用程式。

2.能對程式的運用加以說明及判斷其正確性。

3.能擴充或修正程式，以處理問題中原有的因素。

（四）解題(如圖 2-9)

1.能在新的情境中使用數學知識。

2.能確認及明確地陳述問題。

3.能運用策略、資料、模型及其相關的數學。

4.能創造與使用程式並予以發展和修正。

5.能判斷解答的正確性與合理性。

另包括三種數學能力(Mathematical Power)：推理、連結及溝通。

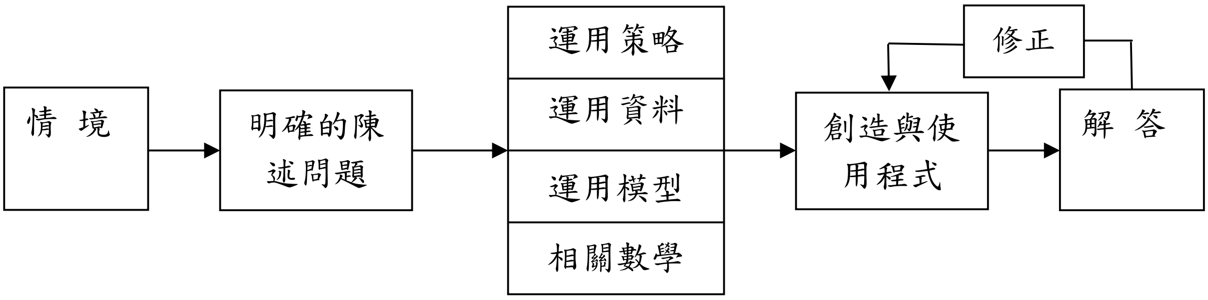


圖 2-9　NAEP 數學解題的流程圖

資料來源：修改自 NAEP(1999) ；黃志賢(民 94)，頁 14

五、2000 年美國數學教師協會(NCTM)發佈數學課程標準時，提到數學分成數學內容與數學過程兩部份的六項能力(NCTM,2000；張莫宙等，2003)：

第一部份：數學內容

數的運算能力：包含數與運算、代數、幾何、度量、資料處理、概率。

第二部份：數學過程

（一）問題解決的能力：培養學生分析問題和解決問題的能力。

（二）邏輯推理的能力：進行猜想、直覺想象和推理的關係。

（三）數學連結的能力：解數學題光靠邏輯思維是不夠的，必須隨時把問題的各種要素和其他知識連接起來。如：將數形結合使用之數學方法，尋找解題策略，就是"數學連接"能力的要求"。

（四）數學交流的能力：善於把自己的數學理解，用口頭或書面(語言、符號、圖表)和別人交流。因爲交流是學生將來從事社會工作的基本素質。合作學習、數學小論文、作數學報告，都是數學素質的一部份。

（五）數學表示的能力：將數學問題、其他科學問題，用比較合理的有效的方法加以表示。數學建模能力就是一種「數學表示」的能力。

六、近年美國國家研究院(National Research Council,2001)的研究報告指出，學生的數學能力就如同五股相互交織的繩索，五種能力必須同時的、統整的發展，方能成就其功能。其間的關係並不是獨立的，而是相互依賴的，它們表徵了一個複雜整體的不同面向，形成數學能力的定義。此五種數學能力包括：

（一）概念的理解：理解數學概念、運算及關係。

（二）流暢的運算能力：彈性的、準確的、有效的及適當的執行程式技巧。

（三）選擇策略的能力：能形成、表徵及解決數學問題。

（四）適當的推理能力：邏輯思維、反思、解釋及辯證的能力。

（五）具生產力的數學性向：習慣性的傾向視數學是有知覺的及有價值的。

七、中國大陸 2002 年頒佈數學教育大綱關於數學思維能力的界定，而提出以下十個方面的數學能力(張奠宙等，2003)：

（一）數形感覺與判斷能力：能觀察數學問題中的數學因素，如：方程式求解、函數變化(微積分)、計算的演算法、隨機現象等，要求能夠對數學的本質有所理解。

（二）資料蒐集與分析：能夠蒐集資料、關注資料、分析資料、駕馭資料，並能用各種數學方法，特別是數理統計方法指導行動決策。

（三）幾何直觀和空間想象：能夠感受物質存在的位置關係、能夠繪幾何圖形，並能正確的加以描繪、解釋及體會其中的本質。

（四）數學表示與教學建模：會使用數學原理、符號、公式抽象的表示客觀事物的發展規律，能夠將具體的數量關係抽象爲可以運算的數學模型。

（五）數學運算和數學變換：會按照運算規則熟練而準確的對數學和符號進行運算、等價關係、全等、相似、不等式、恒等式、恒不等式等，同時能掌握幾何變換以及變換中的不變數。

（六）歸納猜想與合情推理：善於運用類比、聯想、歸納等一般科學方法，並觀察數量關係及作出猜想。

（七）邏輯思考與演繹證明：邏輯分類、排序、關係、流程、數學證明和科學證實的區別、演繹證明的價值。

（八）數學連結與數學洞察：返璞歸真，掌握數學的本質，並提煉爲數學思想方法，欣賞數學的魅力。

（九）數學計算和演算法則設計：對數學與符號依一定演算法則進行運算的能力，並能對大量資料進行處理的能力。

（十）理性思維與構建體系：在日常生活中能夠運用數學思考問題，並和他人進行數學交流，最終形成比較完整的數學思想體系。

另外又提出數學創造力，它屬於一般能力，有下列十大特點：

（一）提出數學問題和質疑的能力，具有能疑、善思、敢想的品質。

（二）建立新的數學模型並用於實踐的能力。

（三）發現數學規律的能力，包括：提出定義、定理、公式。

（四）推廣現有數學結論的能力，包括：更新概念、放鬆條件或加強結論。

（五）建構新數學物件(概念、理論、關係)的能力。

（六）將不同領域的知識進行數學連結的能力。

（七）總結已有數學成果達到新認識水平的能力。

（八）巧妙地進行邏輯連接作出嚴密論證的能力。

（九）善於運用計算器技術，展現資訊時代的數學風貌。

（十）要知道什麼是「好」的數學，什麼是「不好」的數學。

八、丹麥數學家 Niss (2003)認爲精熟數學就是擁有數學能力，而數學能力是指能瞭解、判斷、實作，及能在各種不同數學情境與脈絡的內外使用數學。研究結果將數學能力結構分成兩群：解題與工具的兩個群，其觀點，包括：

（一）數學思維

1.能提出有關數學意義的問題，並能辨識何種答案爲數學答案。

2.對於給定的概念，能清楚掌握其適用範疇。

3.能透過抽象化與類化擴展數學概念的範圍。

4.能辨識各類數學敍述（條件、定義、定理、假設、臆測、數量值的敍述、案例）。

（二）擬題與解題

1.能確認、提出及詳細說明不同類型的數學問題(純數的或應數的；

開放的或封閉的)。

2.能解自己或別人提出的不同類型數學問題。

3.如果題目許可，能以不同方法解題。

（三）數學建模

1.能分析既有數學模式的性質與屬性，並評估該模式適用的範疇及其效度。

2.能轉化或解讀既有數學模式在現實問題中的意義。

3.能在給定情境中建立數學模型。

（1）結構場域。

（2）數學化。

（3）在模型裏工作，包括解決模型所產生的問題。

（4）模型內外的有效性。

（5）分析和批判模型。

（6）對模型及其結果進行溝通。

（7）監控整個建模過程。

（四）數學推理

1.能理解別人論證的條理，並能評估該論證是否有效。

2.知道什麼是數學證明，並能區分數學證明與直觀的不同。

3.能從論證的條理中找到基本的想法。

4.能將直觀論證轉化成有效的證明。

（五）數學表徵

1.能解讀、詮釋及辨識數學物件、現象、情境的各類表徵。

2.瞭解相同數學物件不同表徵間的關係，並掌握不同表徵的優勢與限制。

3.可以在表徵之間進行選擇與轉化。

（六）符號化與形式化

1.解讀與詮釋符號的形式數學語言，並瞭解他們與日常語言的關係。

2.瞭解數學語言的語意及語法。

3.日常語言與數學正式/符號語言間的轉換。

4.處理和操弄包含符號與公式的敍述與表示式。

（七）數學溝通

1.瞭解別人以書寫、視覺及口語所傳達的數學資訊。

2.能使用精確的數學語言表達自己的意思(口語的、視覺的或書寫的)。

（八）工具的使用

1.知道坊間的數學運用工具或輔具的性質，並清楚其功能與限制。

2.能反思地使用這些工具或輔具。

Skemp, Richard R.(1976)提到關係性瞭解與工具性瞭解兩種分法：要培養學生的觀察、分析能力，即要從問題的形成、觀察、實驗，到歸納、分析、臆測、推理等皆要展現其高度的能力。總之，學生不僅能有效的運用數學語言與人溝通、能活用解題的策略，最重要還要去猜結果及一般化。

從林福來在民國九十四年的研究計畫當中，將 Niss 所提的八大能力，大致分爲兩群數學能力。一群爲語言與工具的能力，另一群爲解題的能力，如圖 2-10 所示，為兩群數學能力結構之間的包含關係。又表 2-3 係從各專家學者所提的能力提煉、歸納出來的，因此，本研究以圖 2-10 數學能力結構之間的包含關係及表 2-3 之歸類表爲基礎，找出各數學能力的要素，如表 2-4~表 2-12 所示。並從各數學能力專家的看法中，找出及歸納數學能力之「共相」，作為此數學能力之綜合性的敘述。

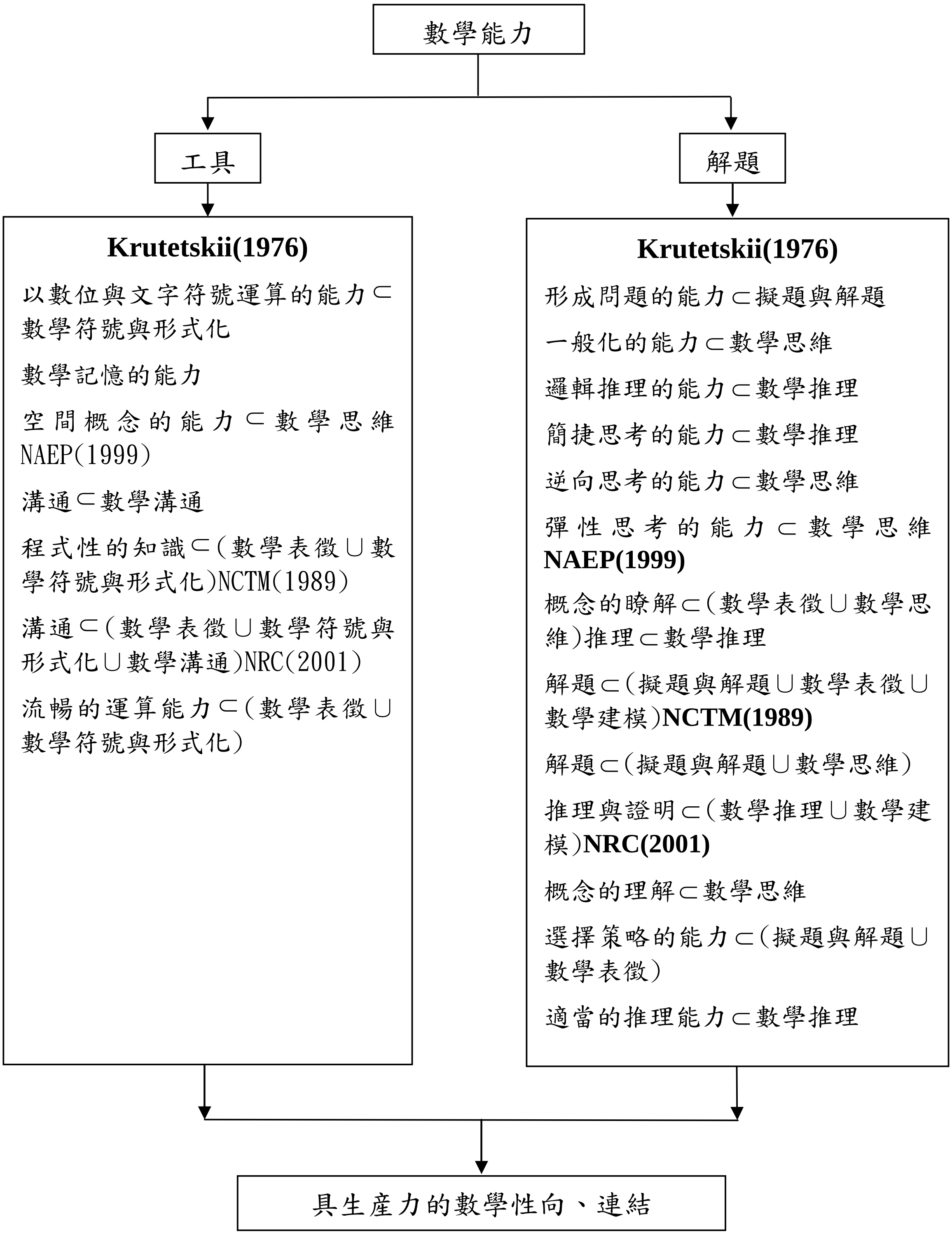


圖 2-10 兩群數學能力結構之間的包含關係

資料來源：林福來(民 94) ；黃志賢(民 94)，頁 18

表 2-2 各專家學者所提出的數學能力歸類表

數學能力＼專家學者	華羅庚等 (1958)	Krutetskii (1976)	NCTM (1989)	NAEP (1999)	NCTM (2000)	NRC (2001)	Niss (2003)	中國大陸 (2002)
1綜合運算能力	ˇ	ˇ	ˇ		ˇ	ˇ	ˇ	ˇ
2.數學的運算能力	ˇ							
2邏輯思維能力	ˇ	ˇ	ˇ	ˇ		ˇ	ˇ	
3空間想象能力	ˇ							ˇ
4形式問題能力		ˇ						
5一般的能力		ˇ						
6邏輯推理能力	ˇ	ˇ			ˇ	ˇ	ˇ	
7簡潔思考能力		ˇ						
8逆向思考能力		ˇ						
9彈性思考能力		ˇ						
10數學記憶能力		ˇ						
11空間概念能力		ˇ						
12解題的能力			ˇ	ˇ				
13溝通的能力			ˇ					
14邏輯推理能力	ˇ	ˇ	ˇ			ˇ	ˇ	
15連結的能力			ˇ		ˇ			ˇ
16概念理解能力				ˇ		ˇ		
17運用程式性知識能力				ˇ				
18問題解決能力					ˇ			
19數學交流能力					ˇ			
20數學表示能力					ˇ			ˇ
21選擇策略能力						ˇ		
22擬題與解題能力		ˇ	ˇ	ˇ	ˇ	ˇ	ˇ	
23數學建模能力							ˇ	
24數學表徵能力		ˇ	ˇ	ˇ		ˇ	ˇ	
25符號化與形式化能力	ˇ						ˇ	
26數學溝通能力							ˇ	
27工具使用能力							ˇ	
28資料搜集能力								ˇ
29資料處理能力								ˇ
30運用計算器能力								ˇ

表 2-3 專家學者對「（數學運算能力）∪（數學符號化與形式化能力）」提出看法

<table>
<tr><th>資料來源</th><th>描述要素</th><th>共相</th><th>殊相</th></tr>
<tr><td>華羅庚等（1958）</td><td>1.綜合運算能力ー記憶、理解、推理、表達與空間想象能力。
2.運算能力的層次性ー簡單到複雜、低級到高級、具體到抽象。</td><td rowspan="3">1.數學的運算(數、度量、資料)；符號的運算(代數、幾何、機率)
2.綜合運算能力。
3.解讀與詮釋符號的形式之數學語言。
4.瞭解數學語言的語意及語法
5.日常生活與數學式子符號語言間的轉換。
6.處理符號與公式的敘述與表示式。</td><td rowspan="3">1.運算能力的層次性
2.彈性的、準確的、有效的、適當的執行程式的技巧。</td></tr>
<tr><td>Krutetskii（1976）</td><td>數字與數字運算、數字與符號運算、符號與符號運算。</td></tr>
<tr><td>NCTM（2000）</td><td>數的運算、代數、幾何、度量、資料處理、概率。</td></tr>
<tr><td>NRC (2001)</td><td>彈性的、準確的、有效的、適當的執行程式技巧。</td><td colspan="2">綜合性的描述</td></tr>
<tr><td>Niss（2003）</td><td>1.解讀與詮釋符號的形式數學語言。
2.瞭解數學語言的語意及語法。
3.日常生活與數學式子符號語言間的轉換。
4.處理符號與公式的敘述與表示式。</td><td colspan="2">綜合運算能力有四個要素：
1.基本技能的運算：在數、式、符號間能瞭解語言的語意及語法，並對其作轉換、處理與運算。
2.綜合運算能力：靈活運用運算法則。
3.能閱讀與詮釋符號的形式數學語言。</td></tr>
</table>

表 2-4 專家學者對「數學邏輯推理能力」提出看法

<table>
<tr><th>資料來源</th><th>描述要素</th><th>共相</th><th>殊相</th></tr>
<tr><td>華羅庚等
(1958)</td><td>1.真實、過程一貫不矛盾、具有論證性
2.注重分析、思路清楚。</td><td rowspan="4">1.從論證的條理中找出基本的想法與評估。
2.邏輯思維、反思、解釋及辯證的能力。
3.分段逐步推理的能力。</td><td rowspan="4">1.區分數學證明與直觀的不同。
2.精簡結構縮短推理過程的能力。</td></tr>
<tr><td>Krutetskii
(1976)</td><td>1.依論證、具體化與演繹的需要，分段逐步推理的能力。
2.精簡結構縮短推理過程的能力。</td></tr>
<tr><td>NCTM
(2000)</td><td>進行猜想、直覺想象和推理性的關係。</td></tr>
<tr><td>NRC
(2001)</td><td>邏輯思維、反思、解釋及辯證的能力。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Niss
（2003）</td><td rowspan="2">從論證的條理中找到基本的想法與評估，區分數學證明與直觀的不同，能將直觀轉化爲有效的證明。</td><td colspan="2">綜合描述</td></tr>
<tr><td colspan="2">數學邏輯推理能力有四個要素：
1.論證的條理。
2.論證的評估。
3.解釋即辯證。
4.精簡結構縮短推理過程。</td></tr>
</table>

表 2-5 專家學者對「數學思維能力」提出看法

<table>
<tr><th>資料來源</th><th>描述要素</th><th>共相</th><th>殊相</th></tr>
<tr><td>華羅庚等
(1958)</td><td>反應客觀事物的形象和圖形，正確判斷空間元素之間的位置關係和度量關係的能力。</td><td rowspan="2">1.理解數學概念、運算及其關係。
2.具有思維的靈活性、變通性，能做彈性的思考。</td><td rowspan="2">逆向思考。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Krutetskii
（1976）</td><td rowspan="2">1.從不同的數學材料中找出共同點的材料，及具有概括數學材料的能力。
2.從正向思考轉爲逆向思考，即逆轉心理過程的能力。
3.具有思維的靈活性、變通性，並能從束縛下解脫出來的能力。</td></tr>
<tr><td colspan="2">綜合描述</td></tr>
<tr><td>NRC
(2001)</td><td>理解數學概念、運算及關係。</td><td colspan="2">從思維的靈活性、變通性、正向思考、逆向思考中去理解數學概念、運算及其關係。</td></tr>
</table>

表 2-6 專家學者對「（擬題與解題）∪（數學表徵）∪（數學思維）」提出看法

<table>
<tr><th>資料來源</th><th>描述要素</th><th>共相</th><th>殊相</th></tr>
<tr><td>Krutetskii (1976)</td><td>1.從實際問題中抽出形式，從具體的數量關係和空間形式中進行抽象，並運用關係和連結的結構來進行運算的能力。</td><td rowspan="3">1.從實際問題之閱讀中，在數量關係和空間形式上抽出形式及抽象關係，即先判斷已知條件與結論的連結結構，找出其間的關係。
2.利用數學方法解出數學問題的答案。</td><td rowspan="3">1.能解不同的數學問題。
2.利用數學方法來發展策略及應用策略解決問題。</td></tr>
<tr><td>NCTM (1989)</td><td>1.在日常生活與數學情境中，形成數學問題。
2.利用數學的方法來發展策略及應用策略解決數學問題。
3.將數學結果詮釋及驗證成問題結果。</td></tr>
<tr><td>NAEP（1999）</td><td>在問題情境中，明確的陳述問題，並運用策略、資料、模型及相關數學，求出問題解答。</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">綜合描述</td></tr>
<tr><td>NRC（2001）</td><td>能形成、表徵及解決數學問題。</td><td colspan="2" rowspan="2">從實際問題之閱讀中，找出已知條件與所要解答之間的關係，將其數學化形成數學問題，並使用適當的數學工具求出數學問題的答案，再詮釋實際問題及驗證結果之準確性。</td></tr>
<tr><td>Niss (2003)</td><td>1.確認與說明題目中是屬於哪一類型的數學問題。
2.能解不同的數學問題。
3.能以不同方法解題。</td></tr>
</table>

表 2-7 專家學者對「（數學推理）∪（數學建模）」提出看法

<table>
<tr><th>資料來源</th><th>描述要素</th><th>共相</th><th>殊相</th></tr>
<tr><td>華羅庚等
(1958)</td><td>對客觀事物的空間形式進行觀察、分析、抽象、概括，反應其形象和圖形，並判斷空間元素之位置與度量關係。</td><td rowspan="3">1.對客觀事物的空間形式，進行觀察、分析、抽象、概括，並判斷空間元素之位置與度量關係。
2.能覺察並應用歸納及演繹推理。</td><td rowspan="3">1.能創造並評估數學臆測與數學推論。
2.能區分數學證明與直觀的不同。</td></tr>
<tr><td>Krutetskii
(1976)</td><td>與空間(立體幾何)直接相關之概念連結。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">NCTM
（1989）</td><td rowspan="2">1.能察覺並應用歸納及演繹推理。
2.能使用模式、已知事實、性質及關係解釋自己的思考，並能解釋答案及解答過程。
3.能創造並評估數學臆測與數學推論。</td></tr>
<tr><th colspan="2">綜合描述</th></tr>
<tr><td>Niss
(2003)</td><td>1.能理解別人論證的條理，找出基本想法並能評估該論證是否有效。
2.能區分數學證明與直觀的不同。</td><td colspan="2">數學推理與數學建模常用於平面、空間、向量等幾何之推理上，除需從觀察、分析、抽象、概括上判斷幾何之位置與度量關係外，尚需學習歸納及演繹推理。及評估該論證是否有效。</td></tr>
</table>

表 2-8 專家學者對「（數學表徵）∪（數學符號與形式化）∪（數學溝通）」提出看法

<table>
<tr><th>資料來源</th><th>描述要素</th><th>共相</th><th>殊相</th></tr>
<tr><td>NCTM (1989)</td><td>1.能使用口語（讀、聽、說）書寫方式與人討論方法中提出個人或團體的想法。
2.能指出、闡明與數學相關之數學語言、數學符號、圖片或圖表。</td><td rowspan="3">1.能使用精確的數學語言來表達自己或團隊的意思。
2.善於把自己的數學理解用口語或書面方式和別人交流。
3.瞭解別人以書寫、視覺及口語所傳達的資訊。
4.可以在表徵之間進行選擇與轉化。</td><td rowspan="3">1.瞭解相同物件之不同表徵間的關係。
2.能指出、闡明與數學相關之數學語言、數學符號、圖片或圖表。</td></tr>
<tr><td>NCTM (2000)</td><td>1.善於把自己的數學理解，用口語或書面（語言、符號、圖表）和別人交流。</td></tr>
<tr><td>Niss（2003）</td><td>1.瞭解別人以書寫、視覺及口語所傳達的數學資訊。
2.能使用精確的數學語言表達自己的意思。
3.能解讀、詮釋及辨識數學物件、現象、情境的各類表徵與數學語言。
4.瞭解相同物件不同表徵間的關係。
5.在表徵之間進行選擇與轉化。</td></tr>
<tr><td></td><td></td><th colspan="2">綜合描述</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">1.能使用精確的數學語言，把自己對數學的理解用口頭或書面方式提出自己或團隊的想法與別人交流。
2.可以在數學表徵之間進行選擇與轉化。</td></tr>
</table>

表 2-9 專家學者對「數學表示能力」提出看法

<table>
<tr><th>資料來源</th><th>描述要素</th><th>共相</th><th>殊相</th></tr>
<tr><td>NCTM
(2000)</td><td>將數學問題、其他科學問題，用比較合理的有效方法加以表示。</td><td rowspan="3">1.能夠將其他科學問題具體的數量關係，用比較合理、有效的方法，抽象爲可以運算的數學模型(即數學化)
2.分析既有數學模式的性質與屬性，並評估該模式。
3.能轉化或解讀既有數學模式在現實問題中的意義，並能將其結果進行溝通。</td><td rowspan="3">1.會使用數學原理、符號公式抽象的表達事物的發展規律。
2.能評估數學模式的效度。</td></tr>
<tr><td>中國大陸
(2002)</td><td>1.會使用數學原理、符號公式抽象的表達事物的發展規律。
2.能夠將具體的數量關係抽象爲可以運算的數學模型。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Niss
(2003)</td><td rowspan="3">1.分析既有的數學模式的性質與屬性，並評估該模式通用的範疇及其效度。
2.轉化或解讀既有數學模式在現實問題中的意義。
3.對模型及其結果進行溝通。
4.數學化。</td></tr>
<tr><th colspan="2">綜合描述</th></tr>
<tr><td colspan="2">1.能夠針對實際工程問題之具體的數量關係，用比較合理、有效的方法，概括抽象轉化爲可以運算的數學模型。
2.能轉化或解讀既有數學模式在現實問題中的意義、性質與屬性，並能將其結果進行溝通。</td></tr>
</table>

表 2-10 專家學者對「(數學連結)∪(概念理解)」提出看法

<table>
<tr><th>資料來源</th><th>描述要素</th><th>共相</th><th>殊相</th></tr>
<tr><td rowspan="3">NCTM
(1989)</td><td rowspan="3">1.能連結概念與程序性知識，並指出不同概念或程序性知識表徵之間的關係。
2.能使用圖表、數值、代數和口語的數學模式或表徵探究問題及描述結果。
3.能利用數學思考與模式解決實際工程問題。</td><td>1.能連結並指出不同概念或程序性知識表徵之間的關係。
2.能使用圖表、數值、代數和口語的數學模式或表徵探究問題及描述結果。
3.把數學問題的要素和其他知識連結起來，並能用數學思考方式與模式來解決實際工程問題。</td><td>將不同領域的知識進行數學連結。</td></tr>
<tr><th colspan="2">綜合描述</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">1.概念與概念間的連結。
2.概念與程序性知識的連結。
3.指出不同概念與程序性知識表徵之間的關係。
4.能使用圖表、數值、代數和口語的數學模式或表徵探究問題及描述結果。
5.把數學問題的要素和其他知識連結起來，並用數學思考方式與模式來解決實際工程問題。</td></tr>
<tr><td>NCTM
(2000)</td><td>把數學問題的各種要素和其他知識連結起來。</td></tr>
<tr><td>中國大陸
(2002)</td><td>將不同領域的知識進行數學連結。</td></tr>
</table>

表 2-11 專家學者對「運用計算器的能力」提出看法

資料來源	描述要素	共相	殊相
NRC (2001)	彈性的、準確的、有效的、適當的執行程式技巧。	1.資料蒐集與分析：能夠蒐集資料、關注資料、分析資料、駕馭資料，並能運用各種數學方法，特別是數理統計等策略指導行動決策。 2.數學計算和演算法則設計：對數學與符號依一定演算法則進行運算的能力，並能對大量資料進行處理的能力。 3.善於運用計算器技術，展現資訊時代的數學風貌。	無
中國大陸 (2002)	1.資料蒐集與分析：能夠蒐集資料、關注資料、分析資料、駕馭資料，並能運用各種數學方法，特別是數理統計等策略指導行動決策。 2.數學計算和演算法則設計：對數學與符號依一定演算法則進行運算的能力，並能對大量資料進行處理的能力。 3.善於運用計算器技術，展現資訊時代的數學風貌。	綜合描述 1.資料蒐集與分析 2.數學計算和演算法則設計：對數學與符號依一定演算法則進行運算的能力，並能對大量資料進行處理的能力。 3.善於運用計算器技術，展現資訊時代的數學風貌。	

從表 2-3~表 2-11 中，以描述、抽離(找出共相與殊相)、綜合的方法，歸類出各種包含關係之數學能力及其能力的綜合描述。並將其以表列方式列出，如表 2-12 所示，作為電子工程問題的數學解題能力的敘述之理論依據。

一、丹麥數學家 Niss 提出數學八大能力：數學思維能力、擬題與解題能力、數學建模能力、數學推理能力、數學表徵能力、符號與形式化能力、數學溝通能力、工具的使用能力等八大能力。

二、林福來教授將 Niss 所提出的數學八大能力，分為兩群：一群爲語言與工具的能力，另一群爲解題的能力。

三、表 2-12 為數學能力各專家學者所提的數學能力之間的從屬關係，可作為本研究電子工程問題的數學解題能力的敘述之理論依據。

表 2-12 各專家學者所提的數學能力之間的從屬關係

數學能力之間的從屬關係	綜合性的描述
（數學運算能力）∪（數學符號化與形式化能力）	綜合運算能力有四個要素： 1.基本技能的運算：在數、式、符號間能瞭解語言的語意及語法，並對其作轉換、處理與運算。 2.綜合運算能力：能靈活運用運算法則。 3.能閱讀與詮釋符號的形式數學語言。
數學邏輯推理能力	數學邏輯推理能力有四個要素 1.論證的條理。2.論證的評估。 3.解釋即辯證。4.精簡結構縮短推理過程。
數學思維能力	從思維的靈活性、變通性、正向思考、逆向思考中去理解數學概念、運算及其關係。
（擬題與解題能力）∪（數學表徵能力）∪（數學思維能力）	從實際問題之閱讀中，找出已知條件與所要解答之間的關係，將其數學化形成數學問題，並使用適當的數學工具求出數學問題的答案，再詮釋實際問題及驗證結果之準確性。
（數學推理能力）∪（數學建模能力）	數學推理與數學建模常用於平面、空間、向量等幾何之推理上，除需從觀察、分析、抽象、概括上判斷幾何之位置與度量關係外，尚需學習歸納及演繹推理，來評估該論證是否有效。
（數學表徵能力）∪（數學符號與形式化能力）∪（數學溝通能力）	1.能使用精確的數學語言，把自己對數學的理解用口頭或書面方式提出自己或團隊的想法與別人交流。 2.可以在數學表徵之間進行選擇與轉化。
(數學表示能力)	1.能夠針對實際工程問題之具體的數量關係，用比較合理、有效的方法，概括抽象轉化為可以運算的數學模型。 2.能轉化或解讀既有數學模式在現實問題中的意義、性質與屬性，並能將其結果進行溝通。
(數學連結能力)∪（概念理解能力）	1.概念與概念間的連結。 2.概念與程式性知識的連結。 3.指出不同概念與程式性知識表徵之間的關係。 4.能使用圖表、數值、代數和口語的數學模式或表徵探究問題及描述結果。 5.把數學問題的要素和其他知識連結起來，並用數學思考方式與模式解決實際工程問題。
運用計算器能力	數學計算和演算法則設計：對數學與符號依一定演算法則進行運算的能力，並能對大量資料進行處理的能力。

伍、數學能力各成份之間的關係

「表徵」是指用某一種型式將事、物或想法表現出來，以達成溝通的目的。數學活動中，表徵扮演兩種角色：「溝通的媒介」與「運思的材料」(陳美芳，民 84)。Bruner(1966)由運思的觀點，將運思材料分爲三種表徵型式：動作的(enactive)、圖像的(iconic)及符號的(symbolic)。Lesh(1979)由溝通的觀點將表徵分爲五類和 Lesh、Behr 與 Post(1987)所提出數學學習和數學解題有五種不同的特徵，大致類同：

一、實物情境(real scripts)：真實世界中的事務。

二、可操作式模型(manipulatable models)，如：各種積木。

三、圖形(pictures or diagram)：似可操作式模型般的靜態圖畫式模型，可內化爲心像。

四、口述語言(Spoken language)：包括一些特定的(如：邏輯領域的)次級語言。

五、書面符號(written symbols)：和口述語言類似，可包含特定的句子和辭彙，如：$(A\cup B)'=(A'\cap B')$。

Lesh(1987)等人認爲表徵之間的轉換是數學能力學習之一種很重要的能力。如：圖形表徵與符號表徵的轉換。他認爲由學生在不同表徵方式中自由轉譯(translation)看出其對概念意義的掌握。換言之，無論呈現何種表徵形式作爲溝通的刺激，接受訊息者皆能轉譯，即用自己的方式重新而不失原意，這樣的轉譯過程有利於學生問題解決及數學學習(蔣治邦，民 83)。

數學表徵之間的轉譯是數學教育的重要活動。在 2000 年，Duval 則進一步提出轉譯不足以達到數學概念的發展，必須再透過不同表徵之間的協調作用，才能完成概念的發展。

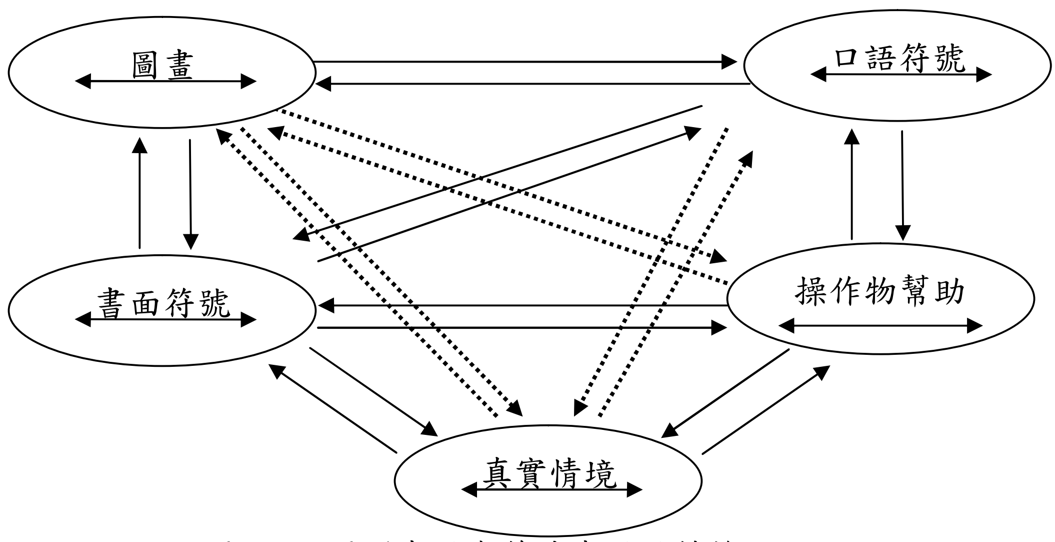


圖 2-11 圖形表徵與符號表徵的轉換

資料來源：Lesh(1987)

數學擬題能力除代表一種基本數學能力之外(Krutetskii,1976)，更可視爲數學創造力的指標(陳美芳，民 84；Jensen,1973)。測量一般創造力的流暢性、變通性、精致性、獨創性等四個向度，應可藉以評量數學創造力，使評量結果更爲系統化(徐文鈺，民 85)。

國立臺灣師範大學林福來教授(2004)在教育部九年一貫數學領域課程綱要小組中，認爲數學是探究規律的一門學問，透過數學的模式可以描述許多自然與社會的現象，所以數學成爲一種語言；同時運用數學也可以解決各種生活上與科學上的問題，此時數學也是一種解決問題的工具。所以，功能上顯示有兩種數學能力，一爲提出問題與解決問題的能力群，另一爲語言與工具的能力群。本文以工具與解題爲架構，將上述數學能力結構進行歸類，再進一步從中分析具有廣度與深度的能力因素。嘗試以 Niss 的八個數學能力成分爲架構、分析數學能力結構之間的包含關係，如圖 2-10 所示。

綜合上述，可得下列結論：

表徵扮演兩種角色：「溝通的媒介」與「運思的材料」，由運思的觀點而言，將運思材料分爲三種表徵型式---動作的、圖像的及符號的；由溝通的觀點而言，將表徵分爲五類---實物情境、可操作式模型、圖形、口述語

言、書面符號等，其間的關係如圖 2-11 所示。

陸、文獻探討後對本研究的啟示

一、數學能力

係指對數學掌握的綜合性能力以及對數學有整體性的感覺。它需藉由舊有之數學習得的經驗來統合成新的直覺或邏輯經驗。

二、擁有數學的能力

含蓋覆蓋的程度、行動的半徑(能力的脈絡與情境的範圍)、技術層次，三者缺一，即無法擁有。

三、丹麥數學家 Niss 提出數學八大能力

數學八大能力分別為：數學思維能力、擬題與解題能力、數學建模能力、數學推理能力、數學表徵能力、符號與形式化能力、數學溝通能力、工具使用能力等八大能力。

四、林福來教授提出兩群數學能力

林福來教授將 Niss 所提出的數學八大能力，分為兩群：一群爲語言與工具的能力，另一群爲解題的能力。

五、數學能力之間的從屬關係

表 2-13 為數學能力各專家學者所提的數學能力之間的從屬關係，可作為本研究電子工程問題的數學解題能力的敘述之理論依據。

六、數學能力及其能力之理論敘述

從數學問題解決相關理論得出四種轉銜能力、程序與機制，配合本節中所提的各種數學能力及其能力之綜合描述，歸納出下列的結論：

(一)轉化能力

1.審題：了解問題的專業實際背景

(1)理解題意，分清楚題目的條件和其目的：

A.閱讀理解的能力：能閱讀問題情境，辨別題目的種類及涉及

那些相關的知識領域，分清楚題目的條件和其目的。

B.專業的能力：運用個人先前舊有的專業經驗、知識、技巧，了解問題的專業實際背景。

C.觀察能力：善於從實際工作所提供的原形中抓住其數學本質。

(2)理解術語的含義：專業術語與數學術語

A.專業的能力：理解專業術語與問題的關係。

B.判斷數學符號的能力：了解抽象概念的數學符號。

C.數學表徵的能力：能解讀及辨識數學物件、現象、情境的各類表徵。

2.分析問題：列出整個問題涉及的變量關係

(1)找出問題的已知量與未知量之數量關係

A.專業的能力：抓住關鍵字句，捨棄不必要的詞句。

B.概念瞭解能力：

(a)根據某些規律，找出已知條件(給予之數據、圖表、過程、現象)與未知量(希望得到的目標與結果)，挖掘問題中的隱含條件，並列出整個問題涉及的變量，包括：恰當的單位，注意不要混淆了變量和常量。

(b)對於研究對象有關聯的多種因素進行分析，找出主要與次要因素。

C.數學思維能力：辨識各類數學敘述（條件、定義、定理、假設、臆測、數量值的敍述、案例）。

D.綜合應用能力：能將數學知識和其他學科的知識，透過文字及圖形的交流分 析，化簡問題情境，找出已知量與未知量之關係。

(2)以精確的數學語言重新進行建構的過程

A.數學語言與符號轉換能力

(a)如何用數學的概念、符號等準確的描述事務對象及其關係。

(b)以精確的數學語言轉化了現實問題的內在特性。

b.符號化與形式化能力：瞭解數學語言的語意及語法。

3.提出問題的假設：

對於所求目標之未知量，用精確的語言進行假設

A.抽象概括能力：通過抽象符號---方程式、不等式、數列來表示，也可用函數、圖表、圖形等關係來表述。即把工程應用題中的專業語言轉換成數學語言，使工程應用問題轉化成數學問題。

B.概念瞭解能力：能將命題的知識轉化為一種產生式(如果－那麼)，列出對變量所做的全部假設。

(二)求解能力

1.選擇數學解題策略

(1)選擇適當的數學方法與數學解題策略

A.選擇策略能力：能形成、表徵及解決數學問題。即從各種數學方法與數學解題策略中，尋求最佳的數學的方法。

B.解題能力：在已有的數學先備知識與經驗下，運用所學的數學知識、數學方法(數學的概念、符號)和解題經驗，建構解決數學問題理解的過程，得到符合實際的結論。

C.邏輯思維能力：要培養學生正確的掌握定義、公理、定理、性質和法則，並能正確運用的能力。

(2)選擇適當的運算法則與公式

A.數學記憶能力：此爲依舊有的學習累積之經驗中，所敍述的問題形成之形式化、概化，在個體腦海裡所形成的型式、

結構或邏輯基模的記憶力。

B.數學建模能力：分析既有數學模式的性質與屬性，並評估該模式適用的範疇及其效度。

2.運算處理

(1)進行數學運算和推理

A.數學運算及符號變換能力：運用數學與文字符號進行運算的能力，並能掌握數據，圖形、圖表等變換以及變換中的不變量。

B.數學演算法則設計能力：對數學與符號依一定演算法則進行運算的能力、並能對大量資料進行處理的能力。

C.數學表徵能力：瞭解相同專業術語與數學術語之不同表徵間的關係，並掌握不同表徵的特性與限制。

D.概念理解能力：理解數學概念、運算及其關係。

(2)運用適當的運算工具

A.運用工程用之計算機能力：能靈活運用工程型之計算機。

B.電腦程式軟體的能力：知道目前坊間已有的電腦軟體工具或輔具的性質，並清楚其功能、限制與用法。

3.求出解答

(1)數學語言的解答

A.數學表示能力：能夠針對數學語言的表示，來確認運算過程所得解答及其單位之合理性

B.符號與形式化能力：瞭解數學語言的語意、語法及其單位換算。

(三)詮釋能力

1.解讀解答

(1)用數學語言轉述求解的結果

A.數學語言與符號轉換能力:根據數學問題獲得的命題及得到的結果,將數學語言所表述的解答詮釋到實際的工程問題。

B.符號化與形式化能力:解讀與詮釋符號的形式數學語言,並瞭解他們與日常語言的關係。

C.概念理解能力:.能詮釋或解讀既有數學式在工程問題中的意義,並能指出專業術語與數學語言、符號的相關。

(2)解讀數學語言結果

A.數學表徵能力:能解讀、詮釋及辨識數學物件、現象、情境的各類表徵。

B.符號形式化能力:解讀與詮釋符號的形式數學語言,並瞭解他們與專業術語的關係。

2.詮釋到現實問題

(1)給予工程問題的解答

A.連結的能力:能利用數學思考與模式,來解決其他課程領域或日常生活中的問題。

B.邏輯推理能力:對於給定的結果,能清楚掌握其適用範疇。

(2)工程問題的最佳解。

A.數學表示能力:將數學問題、其他科學問題,用比較合理且有效的方法加以表示。

B.連結使用具有模式能力:同上之能力敘述。

(四)驗證能力

1.驗證結果

(1)檢驗數字的正確性

A.解題能力:用工程問題的各種先備知識檢驗所得到的結果,判斷解答的正確性與合理性。

2.評估結果:評估所得到的結果是否能完整的解決了初始問題。

A.專業判斷與設計能力：驗證所得到的結果是否能完整的解決了初始問題。

第四節 數學嵌入電子工程理論應用之評析

本節在探究數學問題解決相關之概念與理論、核心能力之內涵理論、鷹架學習相關之概念後，將文獻中所探討的結果，以數學嵌入電子工程理論應用之角度，從理論應用層面評析。

壹、數學問題解決相關之概念與理論

一、數學問題解決相關理論提供了本研究下列六點重要的概念：

（一）實際工程問題的特色

1.有一定的專業背景。

2.訊息量大，閱讀要求高。

3.涉及的專業知識與數學知識的概念點多，綜合性強

（二）數學問題解決的流程

數學問題解決的流程，包含實際工程問題、形成數學問題、數學問題解答、工程問題解答等四個主體架構。此四個主體架構有賴四種轉銜能力去運作，如圖 2-4 所示。其中與數學能力有關的有數學化、求解與詮釋，而數學化、詮釋與驗證必須要有電子工程之先備知識才能檢視。

（三）在數學定量思維的運作過程中，應重視觀察、臆測、驗證等思維的動作。

（四）數學建模的具體程序

三位專家針對數學建模的具體程序提出下列看法，茲將其內涵併排比較如表 2-1 所示發現：識模與析模較傾向於「數學化」的過程；建模與解模較傾向於「求解」的過程；驗模較傾向於「詮釋」與「驗證」的過程。

（五）解應用能力型問題應具備之能力

解應用能力型問題之能力，應重視閱讀理解能力、語言轉換

能力、洞察能力、分析綜合能力、抽象概括能力、綜合應用能力、連結能力、運用數學或專業軟體工具能力、通過實踐驗證數學模型能力。

（六）解應用能力型問題具備的步驟

1.審題：理解題意、找出數量關係。

2.將應用問題轉化成數學問題：即把生活語言轉換成數學語言。

3.建立問題結構：通過分析題目中的數量關係，提出目標函數。

4.進行數學運算和推理：求得問題的結果。

5.檢驗：檢驗結果是否符合題意及實際情況。

二、數學問題解決相關理論應用在本研究的方向

（一）主題架構的建立

本研究旨在建立電子工程問題的數學解題能力模式，而數學問題解決是解決日常生活或工程問題，此兩種之主體架構是類同的，故本研究即將數學問題之解決流程轉化成工程問題之解決流程。

（二）轉銜能力的運作

在四個主體架構下，靠數學化、求解、詮釋、驗證等四種轉銜能力來運作，其中與數學能力有關的有數學化、求解與詮釋，而數學化、詮釋與驗證必須要有電子工程之先備知識才能檢視。

（三）解題能力的程序

綜合上述數學問題解決之理論與概念，可將其歸納應用於本研究之程序上。

1.在數學化部份之程序

（1）審題：理解題意、理解專業術語。

（2）分析問題：找出已知數與未知數之數量關係。

（3）提出目標：把工程語言轉換成數學語言，並提出目標函數。

2.在求解部份之程序

（1）選擇解題策略與運算方法、公式：選擇建模方法、推導的公式。

（2）運算處理：進行數學運算和推理。

（3）求出解答：求得問題的數學結果。

3.在詮釋部份之程序

（1）解讀解答：回答問題的數學結果。

（2）詮釋解答：依問題的數學結果詮釋題意。

4.在驗證部份之程序

（1）驗證結果：檢驗結果是否符合題意及其實際情況。

三、數學問題解決相關理論應用在本研究的優點、差異與限制

（一）優點：能建立工程解題之四個主題架構、四種轉衛能力及九項程序。

（二）差異與限制

因數學問題解決是以數學建模為理論基礎，而本研究為建立電子工程問題的數學解題能力模式，其間有下列的差異與限制：

1.數學解題流程與工程解題流程二者之差異

（1）數學應用問題主要是解決日常生活問題或基本的工程問題；工程解題是解決專業工程問題，其含誇數學與專業兩大領域。

（2）工程解題比數學應用問題增加實務性之可行性評估，即是增加了修正與判斷部份。

（3）數學應用問題所得之結果回應日常生活問題或基本的工程問題；工程解題所得之結果是詮釋專業工程問題。，必須要有專業能力背景，才能詮釋。

（4）數學解題的架構是由數學建模而來；工程解題的架構是在

考量專業的角度下，修正數學建模而建立的。

（5）數學應用問題在驗證部份，僅檢驗數字是否符合題意及實際情況；電子工程解題問題除檢驗數字是否符合題意、實際情況及正確性外，尚可運用電腦輔助軟體或示波器、邏輯分析儀等電子儀表得出波形，並判斷波形的正確性與合理性。

2.數學解題流程與工程解題流程二者之限制

（1）工程解題除需具備數學解題知識外，尚需具備專業解題知識，二者兼備缺一不可，且其受到學生數學與專業之學前知識的限制，換言之，如果數學與專業解題之命題，必須有其基礎之能力背景，才能作答。

（2）數學解題與工程解題必要考量學生之學習 ZPD，即要在學生最近之實際發展層次及 ZPD 之最佳化間距來命題或教學。

（3）工程解題流程之機制，依教學與評量的型態不同，可彈性的選擇適合的機制。

四、核心能力內涵相關之概念與理論

(一)核心能力內涵相關理論提供了本研究下列五點重要的概念：

1.「數學能力」係指對數學掌握的綜合性能力以及對數學有整體性的感覺。它需藉由舊有之數學習得的經驗來統合成新的直覺或邏輯經驗。

2.擁有數學能力含蓋覆蓋的程度、行動的半徑(能力的脈絡與情境的範圍)、技術層次，三者缺一，即無法擁有。

3.丹麥數學家 Niss 提出數學八大能力分別為：數學思維能力、擬題與解題能力、數學建模能力、數學推理能力、數學表徵能力、符號與形式化能力、數學溝通能力、工具使用能力等八大能力。

4.林福來教授將 Niss 所提出的數學八大能力，分為兩群：一群爲語言與工具的能力，另一群爲解題的能力。

5.表 2-13 為數學能力各專家學者所提的數學能力之間的從屬關係，可作為本研究電子工程問題的數學解題能力的敘述之理論依據。

(二)核心能力內涵相關理論應用在本研究的方向

從數學問題解決相關理論得出四種轉銜能力、程序與機制，配合本節中所提的各種數學能力及其能力之綜合描述，可作為本研究之模式架構與內涵。

1.轉化能力

(1)審題

A.理解題意：閱讀理解能力、專業能力、觀察能力。

B.理解術語：專業能力、判斷數學符號能力、數學表徵能力。

(2)分析問題

A.找出問題的已知量與未知量之數量關係：專業的能力、概念瞭解能力、數學思維能力、綜合應用能力。

B.以精確的數學語言重新進行建構的過程：數學語言與符號轉換能力、符號化與形式化能力。

(3).提出問題的假設

A.對於所求目標之未知量，用精確的語言進行假設：抽象概括能力、概念理解能力。

2.求解能力

(1)選擇數學解題策略

A.選擇適當的數學方法：選擇策略能力、解題能力、邏輯思維能力。

B.選擇適當的運算法則與公式：數學記憶能力、數學建模能力

(2)運算處理

A.進行數學運算和推理：數學運算及符號變換的能力、數學演算法則設計能力、數學表徵能力、概念理解能力。

B.運用適當工具能力：運用工程用之計算機能力、電腦程式軟體的能力。

(3)求出解答

A.數學語言的解答：數學表示能力、符號與形式化能力。

3.詮釋能力

(1)解讀解答

A.用數學語言轉述求解的結果：數學語言與符號轉換能力、符號化與形式化能力、概念理解能力。

B.解讀數學語言結果：數學表徵能力、符號化與形式化能力。

(2)詮釋現實問題

A.給予工程問題解答：連結能力、邏輯推理能力。

B.工程問題的最佳解：數學表示能力、連結使用具有模式能力。

4.驗證能力

(1)驗證結果

A.檢驗數字的正確性：解題能力

B.評估結果：專業判斷與設計能力

(三)核心能力內涵相關理論應用在本研究的優點、差異

1.優點：

能夠從核心能力內涵相關理論歸納出工程解題機制之各種電子工程問題的數學解題能力之草案。

2.數學解題能力與電子工程問題的數學解題能力二者之差異

因數學問題解決是以數學建模為理論基礎，而本研究為建立電子工程問題的數學解題能力模式，其間有下列的差異與限

制：

A.電子工程問題的數學解題能力與數學解題能力比較，多了專業領域之解題能力部份，必須要有專業背景才能答題。

B.數學解題能力含蓋數學化一部份、求解、詮釋一部份等轉銜能力；電子工程問題的數學解題能力含蓋數學化一部份、詮釋一部份、驗證等轉銜能力。

C.在運用電腦軟體工具方面，數學解題能力所使用的電腦軟體，一般採用[Mathematica(微積分及工程數學)、Maple(微積分及工程數學)、Matlab(科學計算軟體)等軟體；電子電子工程問題的數學解題能力所使用的電腦軟體，一般採用Spice、MathCAD(工程標準之計算軟體)]等軟體。

D.數學建模能力與專業建模能力本身建模詮釋的說法有差異。

五、鷹架學習理論之概念

(一)鷹架學習理論提供了本研究下列五點重要的概念：

1.學習引導發展(learning leads development)

Vygostky 認為學習與發展不互為獨立，而是一種較複雜的組合過程，在這個過程當中，學習是引導發展的，而教學創造了學習歷程，進而帶動發展歷程。在學習歷程中，可以不斷引發學習「可能發展區」(zone of proximal development，簡稱 ZPD)，來引導學生不斷向較高層次的心理功能發展。即導引學習者朝最佳化的可能發展區移動。

2.建立學習者 ZPD 的間距範圍

學習並非將學習者的 ZPD 定位在過去，而是要將 ZPD 朝向學習者未來最佳化學習能力之發展為目標。亦即是一個學習活動或評量之「實際發展層次」與「潛在發展層次」間 ZPD 的距離不能超出學習者本身的能力範圍，否則若訂的太低，會讓學習者

的 ZPD 停留在原地，導致學習無效或效果不彰；若訂的太高，會讓學習者的學習鈍化，導致放棄。

3.ZPD 的間距必須考量學習者學前能力與未來學習目標之潛在能力

學習者的學習能力是要由有經驗的引導者來設計與導引，若採用 ZPD 方式引導，必須先了解學習者過去的學習狀況、經驗背景及學習目標的潛在能力，以決定 ZPD 之間距與發展的方向。

4.學習鷹架的設計應包含垂直鷹架與水平鷹架兩個層次

鷹架學習的兩大學習主軸為「認知」與「溝通」。在垂直鷹架方面，應將學習內容配合學習者的意圖、目標與需求，加以結構化設計，依學習者的學前能力及 ZPD 的間距設計，並逐漸將認知的學習複雜化，以達成學習遷移的效果，進而培養其應用能力。在水平鷹架方面，引導者在教學或評量活動設計時，其學習內容應配合學習者的學前能力與經驗下，藉由同儕間、師生間之互動與溝通，來促進學習者對問題的解決和反思能力，以達到學習的目的。

5.ZPD 需要有第三種聲音或媒介作為激化酵素的動力

從邊緣心智能力要發展至焠化心智能力，需要靠媒介作為激化酵素的動力，此媒介即為教材或評量中之邏輯、符號轉換、概念、符號、數字與文字等心理學工具。對學習者而言，是權威性的、值得信賴的，否則激化動力不會產生。

(二)鷹架理論應用在本研究的方向

由於鷹架是一種持續的動態學習歷程，會隨著學生進步的情形，不斷進行 ZPD 的調整。故引導者對教材的設計與評量扮演著很重要的角色。本研究依此理念作實徵性之研究，簡述如下：

1.了解學習者學前能力

從表 1-1 發現：九十四學年度四技二專入學錄取分數落差很大，第一所科技大學錄取分數為 639 分(滿分為 700 分)，第十七所科技大學錄取分數為 253 分，其間差距達 386 分，可見實施教學與評量前，務必要做好學前能力分析。本研究在選擇樣本時，即針對其學前能力分析，以專家諮詢方式作整體性粗略的分析。

2.分析電子學學習目標與單元內容

本研究以科技大學電子工程系電子學(一)(二)科目為範圍，蒐集科技大學所擬定之電子學學習目標，如：附錄三所示。並依目前科技大學使用最多版本之電子學教材，擬定單元內容分析，如：附錄四所示，依此分析了解學習者未來學習目標之潛在能力如何。

3.建立樣本層次之 ZPD 間距

由上述第 1 項，針對學習者學前能力分析，可瞭解到學習者不經協助能獨立解決問題之「實際發展層次」；由上述第 2 項，針對電子學學習目標與單元內容分析，可瞭解到學習者經引導者協助或實施半結構式之引導式回答題作答時，能解決問題之「潛在發展層次」，此兩層次的差距即為本研究樣本層次之 ZPD 間距。

4.設計鷹架學習之「認知」架構

在垂直鷹架方面，配合上述第 1、2、3 項的目標與需求，加以半結構化設計出引導式回答題的架構與格式，達到提昇電子工程問題的數學解題能力與認知學習遷移的效果。

5.設計鷹架學習之「溝通」架構

在水平鷹架方面，本研究所設計的溝通方式並非採用同儕間、師生間之互動與溝通，而是藉由引導式回答題的 ZPD 間距

作為溝通橋樑，來促進學生解決問題，進而提昇電子工程問題的數學解題能力。

6.設計系統性的媒介指引環境

為建立系統性的媒介指引環境，需透過媒介性(鷹架)手段，及學生對符號及語言之合理運用，透過 ZPD 間距之系統性的語言溝通，將外在符號轉變為內在符號產出。為提昇學生學習的動機，不致因某一部份不會，而影響後續的答題，設計「引導式回答題之試題答題指引」，

其中有一要點即是「若每一小子題不會作答或不知道公式，而直接影響到後面的答題時，請舉手引導老師會引導你」，以此作為激化酵素的動力。

(三)鷹架學習理論應用在本研究的優點、差異與限制

1.優點：

(1)從學生答題與口試中，能瞭解學生在學習的過程，需要加強與補救之處及對學習本題的看法，進而瞭解其電子工程問題的數學解題能力的狀況。

(2)學習的過程並非以效標測驗檢驗學生的分數有沒有達到標準，而是要衡量學生在適當的鷹架支持後，能表現出何種問題解決及電子工程問題的數學解題能力。

(3)適用於個別化學習。

2.缺點：

(1)實施鷹架學習前，引導者必須要有正確的教學觀念及瞭解作法。

(2)受到上課時數與科目內容的影響。

(3)受到上課人數眾多的影響，最好每班(組)人數以 10~15 人為限，才會產生效果。

3.差異

(1)本研究應用水平鷹架學習所運用的「協助」與「互動」，採用引導式回答題及引導老師協助方式，與原先的鷹架理論所指的合作學習與同儕間、師生間互動有差異。

(2)鷹架是一種「持續性」的動態過程，而本研究對每位測試者只做一次評量，其間有差異。

(3)鷹架理論強調的是個體在學習歷程中，以個體的發展經驗為基礎，延伸至個體最大的發展潛能，而本研究係以樣本整體性考量來規劃樣本的 ZPD 間距，無法針對個體，其間有差異。

4.限制

(1)建立樣本層次之 ZPD 間距，限制在樣本整體性考量，無法針對每一位學生作個別之 ZPD 間距，也無法作持續性的調整。

(2)本研究因時間與經費限制，無法對學生「逐漸」將認知的學習複雜化，以達成學習遷移的效果。