

雙擺振動模式之演示

周鑑恒

圖一為雙擺(double pendulum)之示意圖，其中上方擺錘為下方擺錘的懸掛點。雙擺大角度擺動時，須考慮其運動方程式中之非線性項，雙擺運動出現混沌系統運動之特徵【註1】。

忽略桿重，小角度擺動的雙擺，則為運用拉格朗日方程式(Lagrange equations)和解釋簡正振動模態(normal modes)的絕佳範例，一方面，數學計算扼要完整，另一方面，此振動系統可以消除簡正振動模態只出現在特定振動系統之錯覺，有利於學生歸納相關之理論，故雙擺幾乎成為力學教科書必提及的課文內容或例題【註2】。因目前市面上並沒有適當的演示教具，本文設計如圖二之雙擺模型，目的在以實物對照、講解有關耦合運動和簡正振動模態等極重要的力學理論，清楚演示雙擺之簡正振動模態，提供教師自製此教具之方法和經驗，補充教材內容，使學生可以將實驗和理論計算相互印證。

所需之材料：8.5×4.5×145 mm³之木桿兩枝和若干作為支架的木條、6×12×30 mm³之小銅塊四塊、縫衣針兩枚、π×5²×5 mm³的圓柱狀稀土強磁兩顆、軟鐵心、漆包線 90m。

製程參見圖二(a)(b)(見封底)：取適當之木條製成音叉狀之木架，並鑽兩小孔貫穿其叉狀部分。其次，先製作上方之擺，用砂輪磨掉兩小銅塊下半部之內側(各磨掉約 1-2mm)，以 AB 膠將兩小銅塊之上半部牢牢黏在木桿之一端，再貫穿兩小銅塊下半部鑽一孔，並將木桿

的另一端打一小孔。另外一枝木桿的一端也鑽一孔，另一端也黏上兩小銅塊，即製成下擺。取截斷多餘長度的縫衣針，穿過上擺上方小孔和音叉狀木架上之小孔，以便懸掛整個雙擺；再以另一截成適當長度之縫衣針，穿過下擺上方小孔和上擺銅塊小孔，以便懸吊下擺。只要製作之精密度不太差，因木架叉狀間隙略大於木桿寬度，兩銅塊下半部內側亦被磨除，上下兩擺均不致於摩擦到木架或銅塊，而能以縫衣針為軸承，幾乎無拘地擺動。至於兩稀土強磁則直接黏在上擺銅塊上；另外再將漆包線整齊纏在軟鐵心上，製成電磁鐵。以電磁鐵和稀土強磁之作用力驅動此雙擺。

如圖一(見封底)所示雙擺系統之總動能為：

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{2} m \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 \quad (1)$$

其中： $\vec{v}_1 = l \dot{\theta} \vec{e}_1$ ， $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + l \dot{\phi} \vec{e}_2$ ，若為小角度擺動， $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$ ， $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \approx 1$ ，則總動能可寫為：

$$T \approx \frac{1}{2} m l^2 (2\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2) \quad (2)$$

其總位能為：

$$V = mg(l - l \cos\theta) + mgl(2 - \cos\theta - \cos\phi) \quad (3)$$

若為小角度擺動， $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ ， $\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$ ，則總位能可寫為：

$$V \approx \frac{1}{2} mgl(2\theta^2 + \phi^2) \quad (4)$$

此系統之拉格朗日函數(Lagrangian)為 $L = T - V$

$$= \frac{1}{2} m l^2 (2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}) - \frac{1}{2} mgl(2\theta^2 + \phi^2) \quad (5)$$

代入拉格朗日方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

即得兩聯立運動方程式

$$ml^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + 2mgl\theta = 0 \quad (8)$$

$$ml^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + mgl\phi = 0 \quad (9)$$

此兩聯立運動方程式可以矩陣式表示為

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

令 $\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos \omega t$ ，其微分為：

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 a_1 \\ -\omega^2 a_2 \end{pmatrix} \cos \omega t$$
，於是(10)式成為

$$\left[\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

經整理得到

$$\begin{pmatrix} 2\omega^2 - 2\frac{g}{l} & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

當方程式(12)中之行列式為零時，亦即

$$\begin{vmatrix} 2\omega^2 - 2\frac{g}{l} & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{l} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

a_1 和 a_2 才有不為零的解，由(13)式得此系統兩簡正振動模態之角頻率分別為

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}(2 - \sqrt{2})}; \quad \omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}(2 + \sqrt{2})} \quad (14)$$

兩者之比例為 $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2.414$ 。當 $\omega = \omega_1$ 時， $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，在此簡正振動模態時兩擺錘同向運動。當 $\omega = \omega_2$ 時， $\frac{a_1}{a_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，在此簡正振動模態時兩擺錘反向運動。此理論計算的結果很容易以本文設計之雙擺模型加以演示。

操作時，將漆包線接上訊號產生器，仔

細調整訊號產生器之頻率，使之與雙擺簡正振動模態之頻率相近，即可演示雙擺之兩簡正振動模態，如圖三(見封底)所示。

一如市售演示簡正振動模態之各種儀器(置於氣墊軌上的其他振動系統)，本文之設計亦需周期變化之外力加以推動，惟本文之設計以磁力取代各種觸及振動系統之機械元件，尤其有助於突顯主題。

當然，此設計仍有再改良之空間，例如：磁鐵與擺錘一體成形，並使上下擺錘外觀一致，質量精確相等；用巴沙木桿或強化保麗龍桿取代木桿，進一步逼近一般教科書敘述的簡化情形(不考慮桿重【註3】)；訊號產生器之交流電可經放大器放大功率後，再接通漆包線，產生更強之磁場，使電磁鐵可在更遠處驅動雙擺，甚至擺錘亦無須加裝磁鐵，僅以一般鐵質錘受磁力作用即可操作；若其他部分的精密度都能搭配，以更精密軸承取代縫衣針，效果必更佳。

誌謝：

感謝源流基金贊助和名研電機林素珍小姐慨贈稀土磁鐵。

註釋：

1. R. B. Levien et al., Am. J. Phys. 61(11), 1038-1044 (1993); T. Shinbrot et al., Am. J. Phys. 60(6), 491-499 (1992)
2. 一般力學教科書均會詳敘雙擺之理論計算和結果。例如：H. Goldstein, Classical Mechanics, 2nd ed. (Addison-Wesley 1980), pp253-258.
3. 即使考慮桿重，也不難計算。惟對初學者而言，算式愈簡單，愈有助於了解其中之物理，許多教科書都儘可能加以簡化。