# 「已知三邊直線方程式之三角形面積公式」的另一種證法


陳建燁

臺北市立第一女子高級中學


## 壹、前言

偶然在「科學教育月刊」第 362 期，看到阮瑞泰老師的一篇文章(阮瑞泰(2013)，「已知三角形三邊所在直線方程式之面積公式」)，立刻引起筆者的興趣。這篇文章最後得到一個相當漂亮的公式，由直線方程式的係數和二階、三階行列式組合而成，形式簡單對稱，讓筆者留下非常深刻的印象，久久難以忘懷。欣賞之餘，也嘗試用自己的方式去理解這個公式，接下來的文章，與其說是「另證」，也可說是「另解」。

## 貳、預備工作

先假設讀者可接受以下的記號與引用的公式：

在坐標平面上，已知兩兩不平行的三直線方程式分別為： $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ ，$L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 與 $L_3: a_3x+b_3y+c_3=0$ 。

令 $A(x_1,y_1)$ 為 $L_2$ 與 $L_3$ 的交點， $B(x_2,y_2)$ 為 $L_3$ 與 $L_1$ 的交點， $C(x_3,y_3)$ 為 $L_1$ 與 $L_2$ 的交點，將 $\Delta ABC$ 的面積記作 $S_{\Delta ABC}$ ，則 $S_{\Delta ABC}$ 可用三階行列式加以表達，即

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

在空間中，令三向量分別為 $\overrightarrow{u}=(a_1,b_1,c_1)$ ， $\overrightarrow{v}=(a_2,b_2,c_2)$ 與 $\overrightarrow{w}=(a_3,b_3,c_3)$ 。

令三向量 $\overrightarrow{u}$ 、 $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 所張出之平行六面體體積為 $V$，則

$$V=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|=\left|\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})\right|=\left|\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u})\right|=\left|\overrightarrow{w}\cdot(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\right| 。$$

## 參、本文

真正開始本文的工作：

首先，考慮兩矩陣 $S=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 與 $T=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的乘積：

$$S\cdot T=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}$$

($\because$ $A(x_1,y_1)$ 為 $L_2$ 與 $L_3$ 的交點 $\Rightarrow$ $a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$ ， $a_3x_1+b_3y_1+c_3=0$ ，矩陣中其餘的「0」同理可得。)

注意到 $a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$ $a_3x_1+b_3y_1+c_3=0$ 此兩式可改寫為

$\overrightarrow{v}\cdot(x_1,y_1,1)=0$ 與 $\overrightarrow{w}\cdot(x_1,y_1,1)=0$ ，此即意謂著 $(x_1,y_1,1)$ 是 $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 的「公垂向量」，由此可得 $(x_1,y_1,1)=k(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})=k(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix})$ ，其中 $k$ 為實數。

比較 $z$ 坐標，可得 $1=k\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ ，即 $k=\dfrac{1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$ $\Rightarrow$ $(x_1,y_1,1)=\dfrac{1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})$

$$\Rightarrow L=a_1x_1+b_1y_1+c_1=\overrightarrow{u}\cdot(x_1,y_1,1)=\overrightarrow{u}\cdot[\frac{1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})]=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})$$

同理可得 $M=\dfrac{1}{\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u})$ 與 $N=\dfrac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\overrightarrow{w}\cdot(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$

$$\Rightarrow |L|=|\frac{1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})|=\frac{1}{|\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}|}\cdot|\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})|=\frac{V}{|\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}|}$$

同理可得 $|M|=\dfrac{V}{|\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}|}$ 與 $|N|=\dfrac{V}{|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}|}$ 。

接著，將矩陣等式 $S\cdot T=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}$ 中的各矩陣取行列式值，可得

$$\det(ST)=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}L & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & N\end{vmatrix}=L\cdot M\cdot N$$

將此行列式等式取絕對值，可得

$$\left|\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\right|\cdot\left|\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\right|=|L|\cdot|M|\cdot|N|$$

$$\Rightarrow\ V\cdot(2S_{\Delta ABC})=\frac{V}{\left|\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\right|}\cdot\frac{V}{\left|\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\right|}\cdot\frac{V}{\left|\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right|}$$

$$\Rightarrow\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{V^2}{\left|\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^2}{\left|\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right|}$$

到此，得到所欲證之等式。

## 肆、結語

用三階行列式表示三角形面積和平行六面體體積，這是現行教材(高二下)之中，三階行列式的應用。至於矩陣相乘的行列式性質：$\det(ST)=\det(S)\cdot\det(T)$ ，一般老師也會補充。整體而言，拉高了維度來處理問題，與其質疑是否小題大作，筆者最感神奇的是，這樣居然也有一條路可走。雖然我用我的知識體系「理解」(或「證明」)了，但我真的「理解」了嗎？

## 參考文獻

阮瑞泰(2013)：已知三角形三邊所在直線方程式之面積公式。科學教育月刊，362 期(9 月號)，p43～48。