最小平方法的教與學

李政豐

國立竹南高級中學

一、前言

由於高中新數學課程標準，沒有談到偏導數的內容，但是卻加入最小平方法與迴歸直線(最適合直線)的求法，於是每本教科書都用「雙配方」的手法，來求得迴歸直線 $y = a+bx$ 的係數 a 與 b，然而這兩個係數各家版本的表示方法有很多種型式。

例如： $a=\overline{y}-r\dfrac{S_y}{S_x}\overline{x}$ ， $b=r\dfrac{S_y}{S_x}$

或是 $a=\overline{y}-\dfrac{S_{xx}}{S_{yy}}\overline{x}$ ， $b=\dfrac{S_{xx}}{S_{yy}}$

或是 $a=\overline{y}-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\overline{x}$ ，

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

其導出的過程也不盡相同，例如：

1.有的教科書先由標準化座標系中求得迴歸直線，再轉化成原始資料座標系的迴歸直線。卻沒有證明兩種不同的座標系中，所求得的迴歸直線，其最小平方值(殘差平方和)之間的關係，也沒有提到 y 對 x 的迴歸式與 x 對 y 的迴歸式兩者的差別在哪裡？

2.有的教科書則是直接由原始資料座標系中，用配方法求得迴歸直線方程式。但是卻求得一組學生難以解讀的係數 $a=\overline{y}-r\dfrac{S_y}{S_x}\overline{x}$ ， $b=r\dfrac{S_y}{S_x}$ ，學生很難想像標準差相除再乘上相關係數之後的意義是什麼？它與迴歸直線的斜率有什麼關聯？

3.有些課本先討論迴歸直線的應用，再討論相關係數，他的次序就亂了。

4.多數課本在標準差定義中是除 n-1，故定義

$$\text{相關係數 } r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i-\overline{x}}{S_x}\right)\cdot\left(\dfrac{y_i-\overline{y}}{S_y}\right)}{n-1}$$

有些課本則定義 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')}{n}$ ，其中 x_i' ， y_i' 代表標準分數。

5.有的課本先定義『樣本互變異數』 $S_{XY}=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$，用樣本互變異數去表示標準化座標系中最適合直線(殘差平方和最小)的斜率 $b=\dfrac{S_{XY}}{S_XS_Y}$ 。再求得 Y 對 X 的最適合直線 $Y=\overline{y}+r\times\dfrac{S_Y}{S_X}\left(X-\overline{x}\right)$，以及 X 對 Y

的最適合直線 $X=\bar{x}+r\times\frac{S_X}{S_Y}\left(Y-\bar{y}\right)$。

至於兩條最適合直線的差別在哪裡？有哪些關聯？卻沒有加以說明。兩條直線長得那麼像，學生很容易混淆。

6. 新課程也有其他版本把 S_{XY} 作不同的定義，$S_{XY}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)$。此外，過去由科教中心主編，國立編譯館出版的基礎數學課本，第四冊 p.151，稱 $S_{XY}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)$ 爲『相關量數』。連定義的名稱都不一樣，可見困擾不少。

7. 有的學生把 Y 對 X 的最適合直線 $Y=\bar{y}+r\times\frac{S_Y}{S_X}\left(X-\bar{x}\right)$，以及 X 對 Y 的最適合直線 $X=\bar{x}+r\times\frac{S_X}{S_Y}\left(Y-\bar{y}\right)$，誤以爲是反函數的關係，卻無從了解『y 座標的殘差平方和與 x 座標的殘差平方和是不同的，是兩種不同的衡量方法』。

如果令 $\bar{x}$ 爲樣本平均數，μ 爲母群體平均數，通常母群體很大時，μ 不易求得，我們常利用 $\bar{x}$ 來計算樣本標準差，如果由母群體抽 n 個樣本，由於：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+2(\bar{x}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})+n(\bar{x}-\mu)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu)^2$$

（因爲 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$）

則

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}+(\bar{x}-\mu)^2\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

故母群體標準差 $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}\geq\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$，若以 $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$ 當標準差的估計值，常有低估的現象。因此統計學家改以 $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$ 作爲標準差的估計值。於是多數課本在樣本標準差的定義中除 n-1，故定義相關係數

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{S_x}\right)\cdot\left(\frac{y_i-\bar{y}}{S_y}\right)}{n-1}$$

。然而有些課本則定義相關係數

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

，這種定義的好處是不論標準差是除 n 或 n-1 均可

適用。許多老師們開始在考慮，既然有那麼多困擾，有沒有絕對的必要，在高中階段，定義標準差 $S_x=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}}$，相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i-\bar{x}}{S_x}\right)\cdot\left(\dfrac{y_i-\bar{y}}{S_y}\right)}{n-1}$。

每次教到這個部分，學生的學習效果總是特別差，老師在推導係數的過程，也特別辛苦，教完了學生也不容易把迴歸直線方程式記下來，段考結束，迴歸直線方程式也就忘了。多元化的課程，本意是好的，但是，如果會造成老師教學的困擾、學生學習的困難，那就有立即改進的必要。我個人認爲：如何証出迴歸直線的係數固然重要，要如何聯想、解讀與方便記憶這個係數也很重要。身爲一個數學老師，內心存在一個理想，盼望能夠把數學教材裡比較難懂的知識結構，將它系統化、簡單化，利用內在心智模式體會的概念，把它融入教學軟體中，使學生在網路學習當中，有創意思考的功效，進而有主動學習的意願。撰寫本文的目的，在筆者想藉由網路學習的優勢，透過.G.S.P 與 EXCEL 的視覺化軟體，來建構「迴歸直線」在學生心中的觀念，解決前述教與學的困擾。利用過去所學過的標準差、相關係數等已習知識與概念，簡單的表示迴歸直線方程式的意義。

二、先備知識

給定 n 個二維資料 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，$(x_3，y_3)$，……….. $(x_n，y_n)$。

例如（ x_1，y_1 ）分別代表李同學在第一學期末的物理與數學成績；(x_2，y_2) 分別代表張同學在第一學期末的物理與數學成績………等等，$\bar{x}$ ：代表 n 位同學，第一學期期末物理成績的算術平均數。

$\bar{y}$ ：代表 n 位同學，第一學期期末數學成績的算術平均數。

$S_x=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$ 代表 n 位同學物理成績的母群體標準差。

$S_y=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}}$ 代表 n 位同學數學成績的母群體標準差。

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{nS_xS_y}\quad\text{或}$$

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\bar{x}}{S_x})(\frac{y_i-\bar{y}}{S_y})}{n}$$

代表物理、數學兩科成績的相關係數

由 $S_x=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}\Leftrightarrow$

$$n(S_x)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2-2\bar{x}(\sum_{i=1}^{n}x_i)+n(\bar{x})^2$$

得到 $\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2=n(S_x)^2+n(\bar{x})^2$ …….(A)

同理 $\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2 = n(S_y)^2 + n(\bar{y})^2$ ....(B)

由 $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{nS_xS_y}$ $\Leftrightarrow$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-\bar{x}y_i-x_i\bar{y}+\overline{xy})}{nS_xS_y}$$

$$\Leftrightarrow\ r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)-n\overline{xy}-n\overline{xy}+n\overline{xy}}{nS_xS_y}$$

$$\Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i) = nrS_xS_y + n\overline{xy}\ ....(C)$$

$x' = \dfrac{x-\bar{x}}{S_x}$ ， $y' = \dfrac{y-\bar{y}}{S_y}$ 代表物理、數學兩科成績的標準化分數

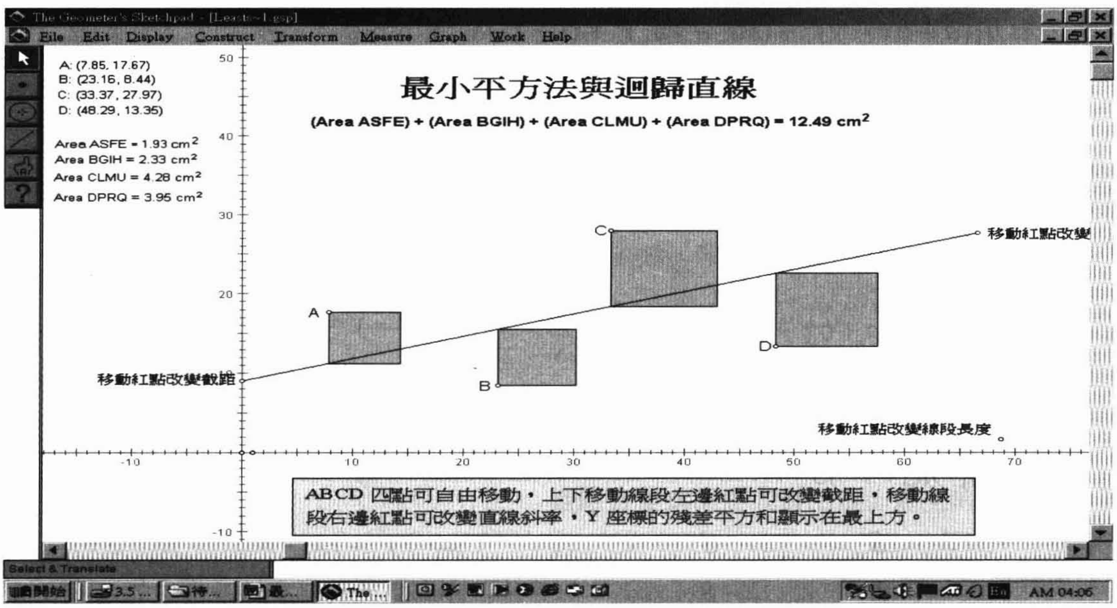
三、本文

【甲】：最小平方法的基本概念

給定 n 個二維資料 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，$(x_3，y_3)$，.......... $(x_n，y_n)$，要如何求得一條迴歸直線(最適合直線) $y = a + bx$，使得殘差平方和 $LS=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2$ 的值會最小，這個方法稱之爲『最小平方法』。此迴歸直線具有由 x 值去預測 y 值的功能。下面是一個 G.S.P 的小軟體：

在四個已知點 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$，$D(x_4，y_4)$的散佈圖中，要如何改變一條直線的斜率與 Y 截距，使得 LS 值(四個綠色正方形的面積和)最小，當產生最小 LS 值的時候，我們就稱此直線爲最適合直線。

我們讓學生能自由的操弄直線的斜率與 Y 截距，以盡量求得最小 LS 值，藉此建構迴歸直線的視覺概念。



在美國數學教師協會的網站
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.4/index.htm#applet
也有相當不錯的 JAVA 程式。

【乙】：如何求得迴歸直線 $y = a + bx$ 的係數 a 與 b ？

$$LS = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (a+bx_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n}[a^2 + 2abx_i + b^2 {x_i}^2 - 2ay_i - 2bx_i y_i + {y_i}^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a^2 + 2ab(\sum_{i=1}^{n} x_i) + b^2(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2) - 2a(\sum_{i=1}^{n} y_i) - 2b(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2$$

將 $\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 = n(S_x)^2 + n(\bar{x})^2$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2 = n(S_y)^2 + n(\bar{y})^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) = nrS_x S_y + n\bar{x}\bar{y}$$

代入得到

$$LS = na^2 + 2abn\bar{x} + b^2[n{S_x}^2 + n(\bar{x})^2] - 2an\bar{y} - 2b(nrS_x S_y + n\bar{x}\bar{y}) + [n{S_y}^2 + n(\bar{y})^2]$$

$$= n\{[(a^2 + 2ab\bar{x} + b^2(\bar{x})^2) - 2\bar{y}(a + b\bar{x}) + (\bar{y})^2] + [b^2{S_x}^2 - 2brS_x S_y + {S_y}^2]\}$$

$$= n\{(a + b\bar{x} - \bar{y})^2 + [b^2{S_x}^2 - 2brS_x S_y + r^2{S_y}^2] + (1 - r^2){S_y}^2\}$$

$$= n\{(a + b\bar{x} - \bar{y})^2 + (bS_x - rS_y)^2 + (1 - r^2){S_y}^2\}$$

上式中，當 n 個已知點$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，$(x_3，y_3)$，$(x_4，y_4)$.....$(x_n，y_n)$給定之後，除了 a，b 之外全部都是已知數，故

當聯立不等式$\begin{cases} a + b\bar{x} - \bar{y} = 0 \\ bS_x - rS_y = 0 \end{cases}$成立時，$LS$

有最小值 $n(1 - r^2){S_y}^2$

解得 $a = \bar{y} - r\dfrac{S_y}{S_x}\bar{x}$ ，$b = r\dfrac{S_y}{S_x}$

【丙】：如何簡化迴歸直線方程式？

由迴歸直線方程式

$$y = \bar{y} - r\frac{S_y}{S_x}\bar{x} + r\frac{S_y}{S_x}x$$

$$\Leftrightarrow y - \bar{y} = r\frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x})$$

$$\Leftrightarrow (\frac{y - \bar{y}}{S_y}) = r(\frac{x - \bar{x}}{S_x})$$

$$\Leftrightarrow y' = rx'$$

亦即原始資料座標系當中的迴歸直線方程式，在標準化座標系中，代表通過新原點$(\bar{x}, \bar{y})$，且斜率爲相關係數 r 的一條直線

$y' = rx'$

【丁】在標準化座標系中的迴歸直線方程式 $y' = A + Bx'$ 要如何求得？

考慮使

$(LS)' = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i' - A - Bx_i'\right)^2$ 爲最小，即

$$(LS)' = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i' - Bx_i'\right)^2 - 2A\sum_{i=1}^{n}\left(y_i' - Bx_i'\right) + nA^2$$

必須最小，因

$\sum_{i=1}^{n} x_i' = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x}\right) = 0$，同理 $\sum_{i=1}^{n} y_i' = 0$，

代入上式

$(LS)' = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i' - Bx_i'\right)^2 + nA^2$ 必須最小

則 $A = 0$，而且要使

$$(LS)' = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i'\right)^2 - 2B\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i' + B^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i'\right)^2$$ 最小

它是 B 的二次多項式，在 $B = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i'\right)^2}$ 時

有最小值 $-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i'\right)^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(y_i'\right)^2$

由 $B = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i'\right)^2}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_X}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{S_Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_X}\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_X}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{S_Y}\right)}{\frac{1}{\left(S_X\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_X}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{S_Y}\right)}{\frac{1}{\left(S_X\right)^2}\cdot n\left(S_X\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_X}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{S_Y}\right)}{n}$$

$$= r$$

即在標準化座標系當 $(LS)'$ 有最小值時，迴歸直線方程式是 $y' = rx'$

將 $y' = \left(\frac{y - \bar{y}}{S_y}\right)$，$x' = \left(\frac{x - \bar{x}}{S_x}\right)$ 代入 $y' = rx'$，得到原始座標系的迴歸直線方程式 $y = \bar{y} - r\frac{S_y}{S_x}\bar{x} + r\frac{S_y}{S_x}x$。

由此可知，在兩種座標系中，雖然 LS 與 $(LS)'$ 的最小平方值不同，但是兩者的迴歸直線方程式卻是成對出現，產生的時機相同。

【戊】原始資料與標準化資料的座標系，LS 與 $(LS)'$ 的最小平方值有何關係？

(1) 在原始資料座標系中，在 $a=\bar{y}-r\dfrac{S_y}{S_x}\bar{x}$、$b=r\dfrac{S_y}{S_x}$時，

$LS=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2$ 有最小平方值。

(2)標準化座標系的最小平方值

$$(LS)'=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i'-rx_i'\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[(\frac{y_i-\bar{y}}{S_y})-r(\frac{x_i-\bar{x}}{S_x})]^2$$

$$=\frac{1}{S_y^{\ 2}}\sum_{i=1}^{n}[y_i-(\bar{y}-r\frac{S_y}{S_x}\bar{x}+r\frac{S_y}{S_x}x_i)]^2$$

$$=\frac{1}{S_y^{\ 2}}\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

$$=\frac{1}{S_y^{\ 2}}(LS)$$

一組資料給定後，$S_y^{\ 2}$ 是非負常數，當 $S_y\neq 0$時，若 LS 是原始資料座標系的最小平方值，$(LS)'$ 是標準化資料座標系的最小平方值，則有 $(LS)'=\dfrac{1}{S_y^{\ 2}}\times(LS)$ 的關係存在。

由下面的EXCEL程式中更改四位同學的成績，或用滑鼠拖「拉把」可以看出：

1.原始資料座標系與標準化資料的座標系中相關係數相同。即

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{nS_xS_y}$$

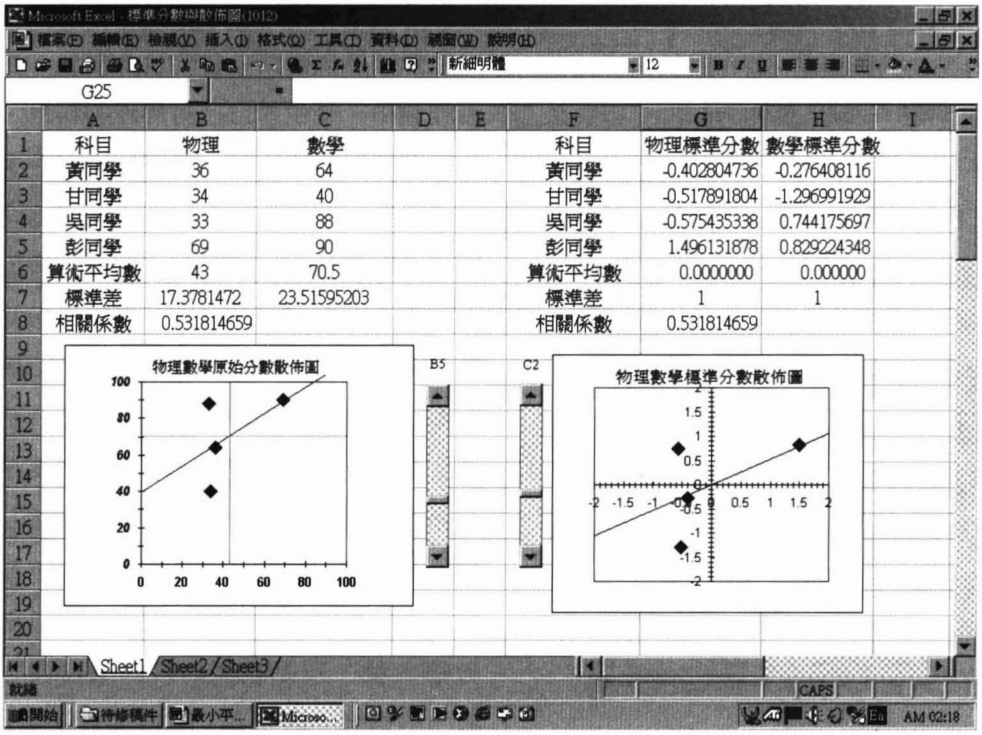
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\bar{x}}{S_x})(\frac{y_i-\bar{y}}{S_y})}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')}{n}$$

2.兩種座標系中的迴歸直線斜率不同；標準化座標系中的迴歸直線 $y'=rx'$ 斜率為 r，原始座標系中的迴歸直線 $y=\bar{y}+r\dfrac{S_Y}{S_X}\left(x-\bar{x}\right)$其斜率為 $r\dfrac{S_y}{S_x}$。

3. 標準化資料的座標系中的標準差

$$S_x=S_y=1$$

4.標準化資料的座標系中，迴歸直線斜率(相關係數 r)介於 -1 與$+1$ 之間。



	科目	物理	數學		科目	物理標準分數	數學標準分數
2	黃同學	36	64		黃同學	-0.402804736	-0.276408116
3	甘同學	34	40		甘同學	-0.517891804	-1.296991929
4	吳同學	33	88		吳同學	-0.575435338	0.744175697
5	彭同學	69	90		彭同學	1.496131878	0.829224348
6	算術平均數	43	70.5		算術平均數	0.0000000	0.000000
7	標準差	17.3781472	23.51595203		標準差	1	1
8	相關係數	0.531814659			相關係數	0.531814659	

【己】記憶迴歸直線方程式變得更簡單

在學到最小平方法之前，學生對算術平均數、標準差、相關係數已經是完全不陌生。由標準化資料座標系中的迴歸直線方程式

$$y' = rx'$$

聯想 $(\frac{y-\bar{y}}{S_y}) = r(\frac{x-\bar{x}}{S_x})$

再推導原始資料座標系中，Y 對 X 的迴歸直線方程式 $y = \bar{y} - r\frac{S_y}{S_x}\bar{x} + r\frac{S_y}{S_x}x$ 就變成是一氣呵成的一件事，這個方程式具有由 x 估計 y 的功能。由於原始資料座標系中的相關係數與標準化資料座標系中的相關係數相同，且 x' 與 y' 的相關係數，也就是 y' 與 x' 的相關係數，因此，X 對 Y 的最適合直線，在標準化座標系中可表成 $x' = ry'$，若將它化成 $(\frac{x-\bar{x}}{S_x}) = r(\frac{y-\bar{y}}{S_y})$，再表成 $x = \bar{x} - r\frac{S_x}{S_y}\bar{y} + r\frac{S_x}{S_y}y$ 也就容易多了，這個方程式具有由 y 估計 x 的功能，它是使『x 座標』的殘差平方和最小所導出的式子，它不是 Y 對 X 迴歸式的反函數，（其反函數是 $x = \bar{x} - \frac{1}{r}\frac{S_x}{S_y}\bar{y} + \frac{1}{r}\frac{S_x}{S_y}y$）。

四、結語

在標準化座標系中，$x' = \frac{x-\bar{x}}{S_x}$、$y' = \frac{y-\bar{y}}{S_y}$ 代表標準分數，是以 S_x 當作 X

座標的單位長，以 S_y 當作 Y 座標的單位長，$(\overline{x},\overline{y})$ 是它的新原點。若在原始始資料座標系中，標準差是除 n 的情況下，定義相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i' y_i')}{n}$，是比較直觀易懂、方便教學的做法。

在原始資料座標系中，定義相關係數

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$ ，如果令

向量 $\overline{A}=(x_1-\overline{x},x_2-\overline{x},x_3-\overline{x},\ldots\ldots,x_n-\overline{x})$，

向量 $\overline{B}=(y_1-\overline{y},y_2-\overline{y},y_3-\overline{y},\ldots\ldots,y_n-\overline{y})$

則 $r=\dfrac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|}=\cos\theta$，則 $-1\leq r\leq 1$，

也就變成是很明顯的事，學生也容易記得下來。用標準化座標系中，用簡單的直線方程式 $y'=rx'$，來聯想 $(\dfrac{y-\overline{y}}{S_y})=r(\dfrac{x-\overline{x}}{S_x})$，再推得 Y 對 X 的迴歸直線方程式 $y=\overline{y}-r\dfrac{S_y}{S_x}\overline{x}+r\dfrac{S_y}{S_x}x$，我嘗試覺得學生比較容易接受。這使我想起來黃敏晃先生在「數學解題規則」書中的一句話：『數學是由合乎邏輯推演的步驟所架構出來的學問』。

二十一世紀的教育，由於電腦與通訊科技的突飛猛進，已經悄悄的邁入網路學習的世界；運算、傳輸、資料存取的速度，龐大的資料庫，豐富的網路資源，其進步可稱是一日千里。傳統的教育學習方式，可能無法抵擋網路社會的巨大變化。在網路社會中，學生對自己有興趣的科目，他的學習態度變成主動、熱衷，學習方式講求非同步、個別化、適性化、與合作學習。與傳統的教育有一段時間、觀念、與方法上的差異。在網路社會中，老師所扮演的角色，也相對要有所調整，只是認真灌輸、照本宣科的傳統教學，在學生熟悉網路資源、相互比較的情況下，可能無法滿足學生多元化的學習要求。創新教材教法、學習設計課程、鼓勵學生參與、激發學習潛能，是一位網路社會的教師，所應具備的教學素養。鼓勵我們的教師來扮演啓發者、引導者、協調者、解惑者的角色，配合廣大的電腦知識庫，與方便的網路工具與資源。我們的教育，將與世界先進國家同步，與一流的教育環境接軌，如此才能有效的提升國家的競爭力。

五、參考資源

1.NCTM 網站
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.4/index.htm#applet

2.國立台灣師範大學數學系網路小組(民 88 年 9 月)。動態幾何操作手冊。台北：九章出版社

3.曾志朗(民 86 年 2 月)。網路上的科學教育。建構與教學第十期。國立彰化師範大學理學院科學教育研究所。

4.洪錦魁、李勁(民 91 年 1 月)。EXCEL 使用手冊 2002。台北：文魁資訊股份有限公司。