中學生通訊解題第 132 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
13201

求 $\left|2^k-3^n\right|=943$ 的所有正整數解。

簡答：$(k,n)=(10,4)$

【詳解】

(1) 若 $3^n-2^k=943$，顯然 $n\geq 7$ 且 $k\geq 11$。

當 $k\geq 3$ 時，

$3^n-2^k\equiv 943\equiv 3^n \pmod 8$，

得 $3^n\equiv 7 \pmod 8$，

但是 $3^n\equiv 1$ 或 3 (mod 8)，矛盾！

因此無解。

(2) 若 $2^k-3^n=943$，顯然 $k\geq 10$ 且 $n\geq 4$。

當 $k\geq 3$ 時，

$2^k-3^n\equiv 943\equiv -3^n \pmod 8$，

得 $-3^n\equiv -1 \pmod 8$，即 $3^n\equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow$ n 為偶數。

當 $n\geq 2$ 時，

$2^k-3^n\equiv 943\equiv 2^k \pmod 9$，

得 $2^k\equiv 7 \pmod 9$ $\Rightarrow$ k 為偶數。由

$$2^k-3^n=(2^{\frac{k}{2}}-3^{\frac{n}{2}})\cdot(2^{\frac{k}{2}}+3^{\frac{n}{2}})=943，$$

可知 $\begin{cases}2^{\frac{k}{2}}-3^{\frac{n}{2}}=1\\2^{\frac{k}{2}}+3^{\frac{n}{2}}=943\end{cases}$

或 $\begin{cases}2^{\frac{k}{2}}-3^{\frac{n}{2}}=23\\2^{\frac{k}{2}}+3^{\frac{n}{2}}=41\end{cases}$，

解得 $(k,n)=(10,4)$。

【解題評析】

1. 先說明此題所應用的數學原理與解題想法：
   對於不定方程的正整數解，常常先用同餘來先限定（或排除）正整數解的形式。首先利用(mod 8)，說明 $3^n-2^k=943$ 無正整數解；對於 $2^k-3^n=943$，由(mod 8)得 n 為偶數，由(mod 9)得 k 為偶數，再由平方差因式分解及質因數分解，求得唯一解。
2. 同學們採用檢驗的方式，可以得知 $(k,n)=(10,4)$ 為方程式之一解，尚須嚴謹說明此為唯一解。
3. 有些同學的作答清晰有條理，值得嘉許。

問題編號
13202

求函數 $f(x)=\sqrt{2x^2-6x+4}+\sqrt{x^2-3x}$ 的最小值，及此時的 x 之值。

簡答：最小值為 2，此時 $x=0$ 或 3。

【詳解】

由 $\begin{cases}2x^2-6x+4\ge 0\\ x^2-3x\ge 0\end{cases}\Rightarrow x\ge 3$ 或 $x\le 0$，

知 $x\ge 3$ 或 $x\le 0$ 時可使得 $f(x)$ 有意義。

又 $f(x)=\sqrt{2x^2-6x+4}+\sqrt{x^2-3x}$

$=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$，

則 $f(x)$ 在 $x\le 0$ 時嚴格遞減，且 $f(x)$ 在 $x\ge 3$ 時嚴格遞增，所以

$f(x)_{\min}=\min\{f(0),f(3)\}=\min\{2,2\}=2$

，故 $f(x)$ 的最小值為 2，此時 $x=0$ 或 3。

【解題評析】

1. 此題將

$$f(x)=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$$

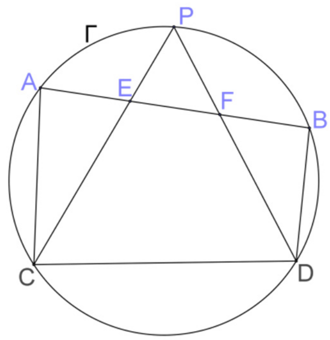
變形後即可討論出 $f(x)$ 的最小值；少部份同學推論的不嚴謹而有被扣分。

2. 變數變換令 $x^2-3x=t$，則原式可變為 $\sqrt{2t+4}+\sqrt{t}$，即可得 $t=0$ 時有最小值。

問題編號
13203

$\overline{AB}$ 是圓 Γ 的一條弦，點 P 為弧 $\widehat{AB}$ 上異於 A, B 的一點，點 E, F 為線段 $\overline{AB}$ 上兩點，滿足 $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FB}$，連結 $\overline{PE}$, $\overline{PF}$ 並延長，與圓 Γ 分別交於點 C, D。

證明：$\overline{EF}\times\overline{CD}=\overline{AC}\times\overline{BD}$ 。



證明：

延長 $\overline{FB}$ 到點 M，使得 $\overline{FB}=\overline{BM}$ ，

作 $\overline{DM}$, $\overline{AD}$，

設 $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FB}=\overline{BM}=x$，

由內冪性質，

$\overline{PF}\times\overline{FD}=\overline{AF}\times\overline{FB}=2x^2=\overline{EF}\times\overline{FM}$

所以 P, E, D, M 四點共圓，

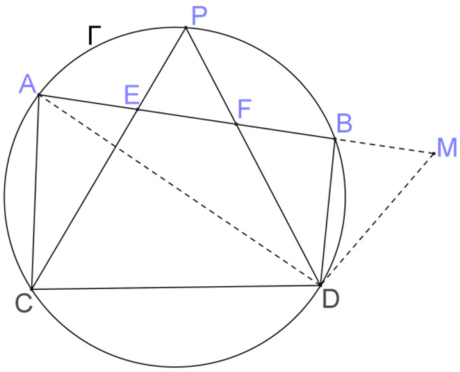
因此 $\angle BMD=\angle CPD=\angle CAD$，

又 $\angle DBM = \angle ACD$，

則 $\triangle ACD \sim \triangle MBD$，

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{BM} \times \overline{CD} = \overline{EF} \times \overline{CD}$$



【解題評析】

1. 先說明此題的解題想法：
   國中幾何題巧設輔助線是很重要的關鍵，如上證明，作 $\overline{FB} = \overline{BM}$，巧妙地將欲證的式子 $\overline{EF} \times \overline{CD} = \overline{AC} \times \overline{BD}$ 中的 $\overline{EF}(=\overline{BM})$, $\overline{BD}$構成一個三角形，接著找出相似三角形對應邊成比例，因此得證。
2. 數學性質：
   (1)圓冪性質。
   (2)四點共圓的充要條件。
   (3)對同弧的圓周角相等。
   (4)圓內接四邊形對角互補。
   (5)相似三角形對應邊成比例。
3. 有些同學的作答清晰有條理，值得嘉許。

問題編號
13204

箱中有 10 顆小球，分別印有編號 1, 2, 3, …, 10。在公司年終尾牙上進行一場小遊戲，每個人可由箱中任抓一把球，若抓到 N 顆球，則可獲得 N 元獎金。把球放回箱中後，繼續此遊戲，直至所得球號的組合與之前重複為止（該次獎金不計）。試問每個人最多可獲得多少獎金？

例如：

第一次取得　1, 3, 5, 7 → 得　4　元獎金

第二次取得　1, 2, 3, 8, 9, 10 →得 6 元獎金

第三次取得　1, 2, 4, 8, 9, 10 →得 6 元獎金

第四次取得　1, 3, 5, 7 → 球號組合與第一次相同，獎金不計且遊戲終止

$\Rightarrow$ 共獲得獎金 $4+6+6=16$ 元。

簡答：5120

【詳解】

（解 1）

依取得的球數討論：

(1)　恰取到 1 顆球的球號組合：

$$C^{10}_1 = 10 \text{組}$$

(2)　恰取到 2 顆球的球號組合：

$$C^{10}_2 = 45 \text{組}$$

(3)　恰取到 3 顆球的球號組合：

$C_3^{10}=120$ 組

(4) 恰取到 4 顆球的球號組合：

$C_4^{10}=210$ 組

(5) 恰取到 5 顆球的球號組合：

$C_5^{10}=252$ 組

(6) 恰取到 6 顆球的球號組合：

$C_6^{10}=210$ 組

(7) 恰取到 7 顆球的球號組合：

$C_7^{10}=120$ 組

(8) 恰取到 8 顆球的球號組合：

$C_8^{10}=45$ 組

(9) 恰取到 9 顆球的球號組合：

$C_9^{10}=10$ 組

(10) 恰取到 10 顆球的球號組合：

$C_{10}^{10}=1$ 組

故最多可獲得之獎金為：

$$1\cdot C_1^{10}+2\cdot C_2^{10}+3\cdot C_3^{10}+4\cdot C_4^{10}+5\cdot C_5^{10}$$
$$+6\cdot C_6^{10}+7\cdot C_7^{10}+8\cdot C_8^{10}+9\cdot C_9^{10}+10\cdot C_{10}^{10}$$
$$=1\times 10+2\times 45+3\times 120+4\times 210$$
$$+5\times 252+6\times 210+7\times 120+8\times 45$$
$$+9\times 10+10\times 1$$
$$=10+90+360+840+1260+1260+840+360$$
$$+90+10$$
$$=5120(\text{元})$$

（解 2）

依題意，每顆球只要被取到，無論其球號為何，皆可對總獎金貢獻 1 元。故在總獎金最高的情況下（每種球號組合皆出現 1 次），每顆球對總獎金之貢獻度應相同，皆為其被取到之組合數。

考慮 k 號球被取到的同時，其他 9 顆球皆有可能「被取到」或「不被取到」，共有 $2^9=512$ 種可能，意即有 512 種不同的球號組合會包含 k 號球。故可獲得獎金之最大值為 $512\times 10=5120$ 元。

【解題評析】

本題為簡單的組合問題，（解 1）是一般同學順應題目敘述會作出的解答，（解 2）則需對本題有深一層的思考，才能看出題目條件背後所隱含更基本的原則。

此題共有 7 位同學參加徵答，在 7 位徵答的同學中，僅有台北市麗山國中江同學採取（解 2）的作法，能夠看清題目的本質，將原本複雜的計算轉換為簡單的觀念，迅速的得出正確答案，值得嘉許。

問題編號
13205

高斯函數 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，

例如：$[3.2]=3,\ [-3.2]=-4$。

試求$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2015} \right]$除以 7 的餘數。

簡答：5

簡答：6

【詳解】

考慮費氏數列 $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

滿足

$$\begin{cases} a_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ a_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(6+2\sqrt{5})+(6-2\sqrt{5})}{4} = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\text{，}n \ge 3 \end{cases}$$

則

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_2 + a_1 \equiv 3+1 \equiv 4 \pmod 7 \\
a_4 &= a_3 + a_2 \equiv 4+3 \equiv 0 \pmod 7 \\
a_5 &= a_4 + a_3 \equiv 0+4 \equiv 4 \pmod 7 \\
a_6 &= a_5 + a_4 \equiv 4+0 \equiv 4 \pmod 7 \\
a_7 &= a_6 + a_5 \equiv 4+4 \equiv 1 \pmod 7 \\
a_8 &= a_7 + a_6 \equiv 1+4 \equiv 5 \pmod 7 \\
a_9 &= a_8 + a_7 \equiv 5+1 \equiv 6 \pmod 7 \\
a_{10} &= a_9 + a_8 \equiv 6+5 \equiv 4 \pmod 7 \\
a_{11} &= a_{10} + a_9 \equiv 4+6 \equiv 3 \pmod 7 \\
a_{12} &= a_{11} + a_{10} \equiv 3+4 \equiv 0 \pmod 7 \\
a_{13} &= a_{12} + a_{11} \equiv 0+3 \equiv 3 \pmod 7 \\
a_{14} &= a_{13} + a_{12} \equiv 3+0 \equiv 3 \pmod 7 \\
a_{15} &= a_{14} + a_{13} \equiv 3+3 \equiv 6 \pmod 7 \\
a_{16} &= a_{15} + a_{14} \equiv 6+3 \equiv 2 \pmod 7 \\
a_{17} &= a_{16} + a_{15} \equiv 2+6 \equiv 1 \equiv a_1 \pmod 7 \\
a_{18} &= a_{17} + a_{16} \equiv 1+2 \equiv 3 \equiv a_2 \pmod 7
\end{aligned}$$

由以上討論可知 a_n 除以 7 之餘數從 a_1 開始每 16 項為一個循環。

故 $a_{2015} = a_{16\times125+15} \equiv a_{15} \equiv 6 \pmod 7$

$\Rightarrow a_{2015} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2015} = 7k+6,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2015} = 7k+6+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2015},\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2015} \right] = \left[7k+6+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2015} \right] = 7k+6 \equiv 6$ (mod 7)