

## 第五章 結論與建議

本章將根據第四章的發現以及綜合分析討論的結果提出研究建議與反思，以下分成二節來探討。本章的第一節是研究者根據上一章的研究結果，作一個總括性的論述。第二節為本研究對於教育的現況以及未來的相關研究提供個人的一些建議，以供教師教學及未來從事相關研究的參考。

### 第一節 結論

本研究主要是探討透過有關數量樣式的教學對國中生學習函數概念的影響為何，依據本研究中的發現以及分析討論的結果，提出結論。我們從三方面來回答問題：1、如何發展幫助學生從尋求數量樣式的關係，過渡到建立函數概念的教材及教學策略？2、學生對於數量關係、樣式以及函數的多重表徵間的轉換是否有困難？哪些表徵間的轉換困難較為顯著？3、在數量樣式與數量樣式之間的關係對學生學習函數概念是否有幫助？

#### 一、在教材設計與教學的部分

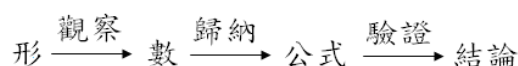
對於發展幫助學生從尋求數量樣式的關係過渡到建立函數概念的教材及教學策略，研究者根據課堂活動的進行、訪談紀錄與後測結果，得到以下幾點結論：

1. 本研究所設計的教材是透過擴展樣式規律，讓學生學習函數；在整個學習過程中，學生學習兩個重要的事項：一是兩種變量之間對應關係的函數概念，另一則是一個函數可以有公式、表格、圖形、……等重要的表徵方式，來表示此函數的規則。就學生在課堂及訪談的表現來看，「尋找兩種變量之間對應關係」比「這些對應關係即為函數」要優；函數表徵之間的轉換大致良好，僅對於從圖形表徵轉換

為對應關係表徵較不理想。對於從尋求數量樣式的關係過渡到建立函數概念的教學活動，學生表現較為活潑。

2. 教師在引導學生尋找規律時的步驟為：(1) 尋找數量關係，(2) 用公式表示規律，(3) 驗證規律(能說明自己所找到的規律，並檢驗不大的數字  $n$  時，圖案中對應的數量確實符合這個規律)。

希望學生能夠養成尋求規律的過程如下：



就學生上台說明的表現來看，大致能達成此一目標。

3. 函數的概念較為抽象，希望讓學生在問題情境中理解、掌握訊息，或從表格、關係式、圖形等不同的表徵中獲取訊息，所以在教學中應給學生足夠的時間進行觀察、思考、探究與交流，學習從「規則與對應」的觀點來理解函數，且能辨識並描述這些樣式或對應關係。但限於教學實際時數，並未能給予學生足夠的時間進行觀察、思考、探究與交流；從後測結果來看，大約只有  $2/3$  的學生達到此一目標。
4. 教材設計原希望學生能藉由函數的多種表徵方式：表格、圖形、公式、文字敘述（口語）等，更深入理解函數的概念，並在建立了函數概念之後，讓學生對實際問題中判斷兩變量之間是否具有函數關係進行判斷，以加深學生對函數概念的認識，並利用最適合的方式解決情境問題，如：表格可以清楚、直接地表示出自變數與應變數之間的數值對應關係；函數的圖形可以直觀地表示出函數的變化過程和變化趨勢；而函數的公式可以比較全面、簡潔地表示出變量之間的關係。但除少數學生之外，大多數的學生在進行解題時，都是希望能先找出公式，所以此一目標的成效似乎並不顯著。
5. 在學生概念發展過程中，因教師（研究者）的介入引導，使學生能主動發現自己錯誤的地方。部分學生在進行解題時，有時未能全面

性地思考，而造成答題時的錯誤，在訪談過程中發現，若教師能在適當的時間介入引導學生，則有助於學生了解自己所犯的錯誤為何。

6. 綜觀有關函數的教材可以發現，大部分的書籍的呈現順序多從線型函數出發，之後才會又其他不同類型的函數出現，如二次函數、三角函數、指數函數等。而現今教材中函數的內容從國中七年級下學期就開始進行教學，教材的安排多為線型函數。在後測時，部分學生對於非線型函數的圖形提出「試題是否出錯？」的反應中可以看出學生的概念心像大多停留在線型函數上。所以教學者應注意適時地提供其它非線型函數的例子，讓學生討論函數與線型函數的異同之處，將能幫助學生去區分函數與線型函數的差異。
7. 在教科書中，沒有提到圖形與公式中的  $x$  項係數以及常數項之間的關係，大部分學生也沒有接觸過「斜率」與「截距」這二個名詞(目前此部分的教材是安排在等高中)，所以從後測結果中發現學生在此類型的題目無法有較好的表現。若在課程的編排上，能設計相關的活動，並讓學生多花點時間去思考並比較「直線圖形的斜率與截距(即  $x$  項係數以及常數項)」和公式之間的變化關係，即使不出現「斜率」與「截距」這兩個名詞，對於提升學生進行轉換圖形與公式這二種表徵之間的能力仍有所幫助。
8. 從後測結果及訪談中發現，能透過幾何方面的觀點(利用斜率與截距)去求出線型函數的公式表徵  $y = ax + b$  的學生，比用代數方面的觀點(利用二元一次方程式)去求出線型函數的公式表徵  $y = ax + b$  的學生，在函數的各種表徵之間轉換的整體表現較優。所以在進行教學時，教師也應加強學生透過幾何方面的觀點去求出線型函數的公式表徵  $y = ax + b$ 。
9. 透過畫在黑板上的兩條直線，學生在透過描點的過程中可發現，對於斜率  $a > 0$  時，當  $a$  值變大會造成直線與  $x$  軸的夾角變大。但因為

在本研究的教學過程中，只同時比較過兩直線的斜率大小，未再請學生對更多條直線的圖形與斜率一起進行比較，而且這次教學的過程並未使用電腦軟體配合教學，所以未能讓學生更直觀地感受到動態的變化情況，建議未來研究可以考量使用 EXCEL 或 GSP 等軟體，設計出與線型函數相關的教學程式，以便於上課使用或進行補救教學，但對於數學能力較不高的學生仍需特別注意其學習的狀況與吸收能力的問題。

## 二、在教學評量與訪談的部分

學生對於數量關係、樣式以及函數的多重表徵間的轉換對學生是否有困難，並且哪些表徵間的轉換困難較顯著？透過第一階段六位學生的後測結果所產生的錯誤類型有以下幾類：

1. 計算錯誤。
2. 列出錯誤的關係式（受限於情境）。
3. 不能以精確的數學語言溝通，如：『斜率』、『函數的定義』等。
4. 無法將函數圖形上的點坐標與函數值進行連結。
5. 認為函數都是線型函數—課程架構與教材對學生數學概念的影響。
6. 變數與係數的角色混淆錯誤。
7. 記憶暫留的錯誤。
8. 描繪離散型數據的圖形時，習慣將點與點之間用直線連接。
9. 數學建模有問題（將情境問題轉化成數學代數式的問題）。
10. 關係式與圖形無法配對。

針對第一階段參與教學試驗的六位國二學生的施測結果修改試題後，在第二階段的教學實驗後，對實驗班級與二個對照班級一同進行施測，此三個班級的學生，在函數概念學習異同之處如下：

1. 教學實驗班級的學生在尋求樣式規律類型題目上的表現比另二個對照班級好，答對率大都在八成以上，也就是實驗班級的學生在觀察規律性、表達關係式與用符號表示一般式等能力優於另外二班的學生。
2. 在斜率方面的問題上，雖然實驗班級的表現較好，但整體上三個班級的答對率皆低於七成，在整份試卷中是屬於答對率較低的題目類型。學生對於未畫在方格紙上的兩直線，無法由圖形直接判斷出直線的斜率大小，其原因有可能是無法與日常生活中的觀念進行結合，或是由於圖中的兩條直線的交點並未落在  $x$  軸或  $y$  軸上，導致學生無法直接由圖形去比較斜率的大小（因為沒有方格，所以無法知道確實的數據），所以在國中階段『斜率』這個名詞，對七年級學生仍是負擔，在教學時數的侷限下，教學效果並不顯著，但還是可以讓學生感受一下直線方向的改變與直線方程式  $y = ax + b$  的  $x$  項係數  $a$  有關。
3. 三個班級中，對於給定線型函數的圖形求圖形公式（關係式）的題目類型時，則圖形通過原點的答對率都高於圖形未過原點的答對率。大部分學生可以由給定的線型函數圖形直接計算求出某特定的  $x$  值所對應的  $y$  值，但仍有一小部分的學生無法將此計算過程轉換成  $x$  與  $y$  的關係式。因此在教學時，教師應注意該類學生，適時的提示他們，幫助他們將計算的過程轉換成代數表徵的關係式。
4. 學生在計算函數值類型的題目時，對於不是以公式表示的函數問題，學生在求函數值的表現並不理想。這可能是大部分的教學者都是給學生一個函數的公式，再讓學生做代值計算的工作，所以在教學時應強調圖形上的點坐標  $(x, f(x))$  所代表的意義，讓學生了解並非每個函數都必須用『公式』表示，才能求函數值。
5. 對於非一對一的函數類型，學生在判斷是否為函數的表現並不理想。

6. 部分學生解題時無法掌握題目所給的資訊，忽略部分的數據或只注意單一的條件而無法得出正確的答案，這顯示其數學建模能力仍有待加強。

### 三、在數量樣式與數量樣式之間的關係對學生學習函數概念是否有幫助？

學生透過探索隱藏在每一個圖案中的規律，與是否可以從每一個規律中寫出公式（關係式），並且對於某些給定的值代入得到所對應的（函數）值，學生逐漸從找尋規律的過程移轉到變數與函數的概念。透過本研究的測驗結果來看，實驗班級的學生在對於找尋規律的能力優於對照兩班的學生，而對於與函數相關的題目，實驗班整體表現也未比兩對照班級差，但卻也沒有很明顯的差異。只是本研究認為透過數量樣式讓函數的學習聚焦於有意義脈絡的關係和多重的表徵方式，而非只是著重於死記定義域、值域、方程式的圖解與垂直線檢驗法等傳統的教學方式。但不管使用何種方式讓學生認識函數概念，學生都需要長時間去理解與吸收，而完整的函數概念絕非短時間可形成。

而且對於本研究教材中所提到關於『斜率』的概念，研究者在教學過程中運用斜率的觀念，透過在同一條直線上的點之間具有往右一格就向上幾格的特性，幫助學生尋找規律，並寫出關係式，所以當學生自己在尋找規律的時候，也常利用此一性質，但就學生的後測答題表現而言，學生似乎未能真的理解『斜率』正式定義所代表的意義，這可能是教學過程中學生並未能體會 $(\text{縱坐標改變的量}) \div (\text{橫坐標改變的量}) = (\text{每往右一格，就上升幾格})$ ，故在教學活動中教師應特別提醒，甚至對於是否適合在國中階段放入與『斜率』相關的教學內容，仍是值得探討的課題。

## 第二節 建議

綜合以上結論，發現影響學生學習可能的因素，有幾下幾點：

- 甲、定義的遺忘或不熟悉：如未能完整說明斜率的定義、函數的定義等。
- 乙、“部分”概念對於“整體”概念的影響：如線型函數對於一般函數概念的影響。
- 丙、師生與同儕的互動：如教師在學生發生問題時適當的介入與引導、上台發表時同學提供意見等。

故針對教學上與未來研究上提出以下幾點建議：

1. 教學者在說明函數的定義或其他數學名詞時，應當使用嚴謹且詳實的言詞，避免因為模糊不清的語法或話語，造成學生的誤解或產生錯誤認知，讓學生理解生活語言與數學語言之間的差異。
2. 教學者應注意適時地提供其它非線型函數的例子，讓學生討論函數與線型函數的異同之處，將能幫助學生去區分函數與線型函數的差異。
3. 為了解學生的思考方式與解題策略，研究者曾進行訪談，但在整理與分析訪談資料時仍有一些不足與不詳盡的地方，尤其針對如何引導學生說明其想法，以及該如何發問使得受訪學生明瞭研究者所發問的問題，與避免暗示受訪學生的回答等，都是研究者應特別注意之處。因此訪談前的計畫與練習應是研究者要詳細規劃的重點，如此獲得的資料才能更詳盡且客觀。
4. 本研究的樣本只有一百多人，且侷限於台北市的一所國中，由於受限於研究者個人的能力與學校課程進度的壓力，只能對少數學生進行試教與訪談，所以建議後續的研究者可以增加研究對象，使研究結果更具代表性。