第二章　研究方法及工具

2.1　南海模式（South China Sea Model）

本論文對南海海域之數值模擬研究是採用美國普林斯頓大學所發展的三維動力海洋模式系統（Princeton Ocean Model，POM），建立了一個高解析度的南海數值模式（SCS model）。POM 從 1970 年代開始發展以來，歷經多位學者專家共同合作研發改進後，現階段它已經成為全世界最多國家（70 國）且最多海洋數值模式學者（超過 2100 人）使用的三維動力海洋模式。POM 使用完整的三維原始方程式（primitive equation），因為模式需要同時解三度空間的動量、溫度、鹽度、狀態以及連續方程式等，所以需要複雜的設計與計算，並使用大量的電腦 CPU 時間。不過相對來說，這樣的模式可以模擬更接近真實的海洋現象。

2.1.1　模式特色

a.)格點配置

在水平方向的格點配置上，採用的是 Arakawa C 格點，其二維及三維變數之相對位置如圖 2-1 所示。

在垂直座標方面是採用 σ 座標（圖 2-2），即在垂直方向上，每個分層的深度是由該點之水深來決定的，且每個等 σ 面會隨著地形而有所起伏，

可用於處理地形起伏變化較大的地區。如此類採用 σ 座標作為垂直座標之數值模式又被稱為順應地形模式（terrain-following model）或順應底部模式（bottom-following model）（Ezer and Mellor, 1997）。使用 σ 座標為垂直座標之數值模式，其最吸引人的地方在於可平滑的呈現地形，並且具備模擬流體與地形之間交互作用的能力（Ezer et al., 2002）。

另外，採用 σ 座標可模擬底部邊界層（bottom boundary layer），並可維持海洋內部之斜壓性質及深層水的形成。但使用此座標系統最明顯缺點就是壓力梯度誤差（pressure gradient error）的產生（Ezer and Mellor，1997; Mellor et al., 1998），但壓力梯度誤差會隨空間水平解析度的增加而減小（Mellor et al., 1998; Ezer et al., 2002）。

b.)模式積分

在水平方向的時間差分格式（time differencing scheme）採用顯性格式（explicit scheme），但在垂直方向上則是採用隱性格式（implicit scheme）。隱性格式的使用可消除在垂直方向上的時間限制，因此在表面數層及底部數層可使用較好之垂直解析度（Marchesiello et al., 2001）。

在模式之積分方面，分為兩個部分，一是外模（external mode），另一是內模（internal mode）。在外模積分上是二維的，且使用較短的時間間隔（time step）；而內模積分為三維的，且使用較長的時間間隔。此種

時間間隔分離之積分方式，可節省電腦計算之時間（Blumberg and Mellor, 1987）。在外模積分上，主要是計算二維的變數，包括海水面高度（el）及平均流場（ua 與 va）；在內模之積分中，則是計算三維之變數，包括溫度（t）、鹽度（s）、速度（u、v、w）……等。

在 POM 的數值計算上，是採用二階顯性的跳蛙數值格式（explicit second order leap-frog numerical scheme），此格式在數值計算上之穩定性較後向差分格式（Euler-backward differential scheme）或前向差分格式（forward differential scheme）為佳（Blumberg and Mellor, 1987）。但在內模的垂直擴散項之計算上，則是採用隱性格式來增加近表面（near-surface）之垂直解析度。

c.)垂直混合副程式

POM 內含了一個提供垂直混合係數（vertical mixed coefficient）的副程式（turbulence closure sub-model），此副程式是 1982 年，由 Mellor 與 Yamada 所發展的，因此又稱為 Mellor-Yamada turbulence closure model，在 POM 中所使用程式是 2.5 層版之程式，此版本之程式亦廣泛的被許多數值模式所使用。在過去的研究中，此副程式雖然可以有效的模擬混合層（mixed layer）的動力，但其所計算之混合層厚度太薄（Ezer, 2000）。不過，藉由此副程式，可使模式產生較為合理之艾克曼表層及底

層（Ekman surface and bottom layers）（Blumberg and Mellor, 1987）。

d.)其它

POM 之海面高度邊界條件是使用自由海表面（free sea surface），即海表面高度會隨空間及時間而有所變化，可表現出傳輸速度較快之表面重力波（surface gravity wave）的特性（Haidvogel and Beckmann, 1999）。因此，自由海表面被廣泛的運用在短期之海洋現象的研究及淺水（shallow water）的應用上（Kantha and Clayson, 2000）。

2.1.2 模式理論

I.控制方程式（governing equations）

（下列之方程式，均為 σ 座標轉換後之形式。）

狀態方程式（equation of state）：

$$\rho = \rho(T, S)$$

靜力平衡方程式（hydrostatic equation）

$$\rho g D = -\frac{\partial p}{\partial \sigma}$$

連續方程式（continuity equation）：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0$$

動量方程式（momentum equation)：

x 方向之動量方程式：

$$\frac{\partial UD}{\partial t}+\frac{\partial U^2D}{\partial x}+\frac{\partial UVD}{\partial y}+\frac{\partial U\omega}{\partial \sigma}-fVD+gD\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$=\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_M}{D}\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right]-\frac{gD^2}{\rho_0}\int_{\sigma}^{0}\left[\frac{\partial \rho'}{\partial x}-\frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'}\right]d\sigma'+F_x$$

y 方向之動量方程式：

$$\frac{\partial VD}{\partial t}+\frac{\partial UVD}{\partial x}+\frac{\partial V^2D}{\partial y}+\frac{\partial V\omega}{\partial \sigma}+fUD+gD\frac{\partial \eta}{\partial y}$$
$$=\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_M}{D}\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right]-\frac{gD^2}{\rho_0}\int_{\sigma}^{0}\left[\frac{\partial \rho'}{\partial y}-\frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'}\right]d\sigma'+F_y$$

溫度守恆方程式（conservation equation for temperature）：

$$\frac{\partial TD}{\partial t}+\frac{\partial TUD}{\partial x}+\frac{\partial TVD}{\partial y}+\frac{\partial T\omega}{\partial \sigma}=\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_H}{D}\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right]+F_T-\frac{\partial R}{\partial z}$$

鹽度守恆方程式（conservation equation for temperature）：

$$\frac{\partial SD}{\partial t}+\frac{\partial SUD}{\partial x}+\frac{\partial SVD}{\partial y}+\frac{\partial S\omega}{\partial \sigma}=\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_H}{D}\frac{\partial S}{\partial \sigma}\right]+F_S$$

紊流動能（turbulence kinetic energy）方程式：

$$\frac{\partial q^2D}{\partial t}+\frac{\partial Uq^2D}{\partial x}+\frac{\partial Vq^2D}{\partial y}+\frac{\partial \omega q^2}{\partial \sigma}=\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_q}{D}\frac{\partial q^2}{\partial \sigma}\right]$$
$$+\frac{2K_M}{D}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2\right]+\frac{2g}{\rho_0}K_H\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \sigma}-\frac{2Dq^3}{B_1 l}+F_q$$

紊流尺度（turbulence length scale）方程式：

$$\frac{\partial q^2lD}{\partial t}+\frac{\partial Uq^2lD}{\partial x}+\frac{\partial Vq^2lD}{\partial y}+\frac{\partial \omega q^2l}{\partial \sigma}=\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_q}{D}\frac{\partial q^2l}{\partial \sigma}\right]$$
$$+E_1l\left(\frac{K_M}{D}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2\right]+E_3\frac{g}{\rho_0}K_H\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \sigma}\right)\tilde{W}-\frac{Dq^3}{B_1}+F_l$$

其中，$\sigma=\dfrac{z-\eta}{H+\eta}$ ：垂直座標軸，$-1<\sigma<0$ ；

H 為海底地形深度（向下為正）；

η 為海面高度（向上為正）；

z 為水深（向上為正）。

（當 $z=\eta$ 時，$\sigma=0$；當 $z=-H$ 時，$\sigma=-1$）

ρ ：位密度（potential density）

T ：位溫（potential temperature）

S ：鹽度

p ：壓力

R ：短波輻射通量（short wave radiation flux）

g ：重力加速度

D ：總水深（$H+\eta$）

U,V ：水平方向之速度

ω ：垂直 σ 座標面之垂直速度

f ：科氏力參數

ρ_0 ：參考密度（reference density）

ρ' ：$\rho-\rho_{mean}$

ρ_{mean} 是在 z 座標下之面平均密度，即只隨 z 改變；

（此 ρ' 之作用在於減少壓力梯度誤差）

$\frac{q^2}{2}$ ：紊流動能

l ：紊流尺度

K_M ：垂直的動黏滯係數

K_H ：垂直的擴散係數

K_q ：垂直的紊流擴散係數

F_x, F_y ：水平之黏滯項

F_T, F_S, F_q, F_l ：水平之擴散項

$\tilde{W}$ ：wall proximity function

B_1, E_1, E_3 ：經驗常數

II.垂直的黏滯及擴散係數：K_M 、K_H 、K_q

$$K_M \equiv lqS_M$$

$$K_H \equiv lqS_H$$

$$K_q \equiv lqS_q$$

上式中，S_M 與 S_H 為穩定度函數且決定於 Richardson number：

$$S_H\left[1-(3A_2B_2+18A_1A_2)G_H\right]=A_2\left[1-\frac{6A_1}{B_1}\right]$$

$$S_M\left[1-9A_1A_2G_H\right]-S_H\left[(18A_1^2+9A_1A_2)G_H\right]=A_1\left[1-3C_1-\frac{6A_1}{B_1}\right]$$

其中，$(A_1, B_1, A_2, B_2, C_1)=(0.92, 16.6, 0.74, 10.1, 0.08)$ 為經驗常數，

$G_H=\dfrac{l^2}{q^2}\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z}=-\dfrac{l^2N^2}{q^2}$ 為 Richardson number，

N^2 為浮力頻率，

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial p}{\partial z}$$ 。

$\frac{\partial \rho}{\partial z}$為垂直之密度梯度，$c_s$為聲速，

$\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial p}{\partial z}$為絕熱消散率（adiabatic lapse rate）。

III.水平之黏滯和擴散項：F_x、F_y、F_T、F_S、F_q、F_l

水平之黏滯項：

$$F_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[H\left(2A_M\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[H\left(A_M\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right)\right]$$

$$F_y \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[H\left(A_M\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[H\left(2A_M\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right]$$

其中，A_M為水平的動黏滯係數。

水平之擴散項：

$$F_\phi \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[H\left(A_H\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[H\left(A_H\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right],$$

其中，ϕ代表T、S、q^2及$q^2 l$，A_H為水平的熱擴散係數。

IV.時間間隔的限制條件：

POM 在時間間隔上，分為外模積分之時間間隔（external mode time step，Δt_E）及內模積分之時間間隔（internal mode time step，Δt_I）；在數值計算中，Courant-Friedrichs-Levy（CFL）限制為決定計算穩定性之

首要條件，其限制了空間解析度及時間間隔的設定。

在時間間隔設定之限制上，以下分外模及內模兩個部分來討論：

a.)外模：

在時間間隔的限制上，外模積分之時間間隔限制為主要之限制，其限制條件為：

$$\Delta t_E \le \frac{1}{C_t}\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

其中，$C_t = 2\sqrt{gH} + U_{\max}$，$\sqrt{gH}$ 為最大的淺水波之波速，$U_{\max}$ 為預期的最大速度。

b.)內模：

內模積分之時間間隔之限制有三類：

- CFL 限制：

$$\Delta t_I \le \frac{1}{C_T}\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

其中，$C_T = 2C + U_{\max}$，C 為最大的內重力波（internal gravity wave）之波速，$U_{\max}$ 為最大的平流速度（advective speed）。

- 水平擴散對時間間隔之限制：

$$\Delta t_I \le \frac{1}{4A}\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}\right)^{-1}$$

其中，$A = A_M$ 或 $A = A_H$。

- 科氏力參數對時間間隔之限制：

$$\Delta t_I \leq \frac{1}{f} = \frac{1}{2\Omega \sin \Phi}$$

其中，Ω為地球自轉之角速度，Φ是緯度。

2.1.3　模式設定

I.模式範圍

圖 2-3 為本模式之範圍與真實海底地形，此範圍除了南海，亦包含了東海南部、臺灣海峽、部份的西菲律賓海與巽他陸棚等。

II.模式之格點配置

模式之積分區域，東西向介於 99°~124ºE，南北向介於 2º~27ºN，其水平解析度為 1/16° x 1/16° （約 6.875 公里 x 6.875 公里），垂直方向分為 26 個 σ 層，在表面數層及底部數層採用較高之解析度。

III.時間間隔

先利用 CFL 限制，初步估算外模積分之時間間隔，再對外模及內模之時間間隔與模式穩定程度作敏感度測試（sensitivity test），待使模式計算穩定後，取其最適當之內、外模時間間隔。

IV.初始條件

本模式之初始條件是採用較大範圍之東亞邊緣海（East Asian Marginal Seas, EAMS）（Wu and Hsin, 2005）模式的輸出結果，使用 1999 年 1 月 EAMS 之平均資料，利用線性內插而得。

V.邊界條件

本模式包含了東北、東南、南三個開口邊界，在此三個開口邊界之側邊界條件的運用方式可分為下列幾個部分：

a.)海水面高度（η）：

在 POM 中，η 為診斷變數，其側邊界條件是採用零梯度條件（zero gradient condition），即：

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$$

其中，上式代表垂直開口邊界之導數為零，即側邊界之海面高度無變化。其簡單的數學式子可表為：

$$\eta_B^{n+1} = \eta_{B\mp1}^{n+1}$$

η_B^{n+1} 為邊界之值，η_{B-1}^{n+1} 是由控制方程式計算而得，且位於邊界且最接近邊界之內部點的海面高度值，因此在東邊界及北邊界使用負號，在西及南則是取正號。

b.)垂直之平均速度（$\overline{U}$ 、$\overline{V}$ ）：

二維的平均速度之邊界條件是採用重力波傳播邊界條件，此邊界條件的基本物理假設為表面重力波是主要的動力，並且允許重力波以我們所指定之波速從模式區域內離開，即：

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \pm c\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0 \ , \ c = \sqrt{gh}$$

h 為邊界之水深，其數值表示方法為：

$$\overline{u}_B^{n+1} = \overline{u}_B^{pre} \pm \sqrt{\frac{g}{h}}\left(\eta_{B\mp 1} - \eta_B^{pre}\right)$$

其中，pre 代表我們在邊界上所指定之值，$\overline{u}$ 代表水平之速度，在東西邊界上代表 $\overline{U}$，南北則代表 $\overline{V}$，另外，東邊界及北邊界取上面的符號，西與南則取下面的符號。

c.)三維之變數（u、v、t、s）：

在三維水平速度之邊界條件上亦是採用輻射邊界條件（radiation boundary condition），即：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \pm c_i \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

Φ 代表 u、v、t 和 s；其數值表示法為：

$$\Phi_B^{n+1} = \gamma \Phi_{B\mp 1}^n + (1-\gamma)\Phi_B^n$$

其中，$\gamma \equiv c_i \dfrac{\Delta t_i}{(\Delta x, \Delta y)}$，正負號之選擇與上述之相同，在東西邊界使用 Δx，在南北則使用 Δy。

本模式之邊界條件亦是採用 EAMS 模式，以單向巢狀箝合之方式提供每日之溫度、鹽度、速度等資料，並使用每週一筆之 AVHRR（Advanced

Very High Resolution Radiometer）衛星觀測的海表面溫度，其空間解析度為 1° x 1°。

VI.表面外力

模式積分時所受之表面外力為風應力（wind stress），是使用每六小時一筆之 QuickSCAT/NCEP 混合衛星風場資料，來提供模式計算時所需之表面外力。

VII.科氏力參數（f）

對於大尺度的地物流（geophysical flows）而言，科氏力項（Coriolis term）在動量方程式中是非常重要的項，為一轉動座標下的物體運動之假想力。因此將科氏力參數設定為隨緯度變化之形式 $2\Omega\sin\Phi$，較為符合流體在地球上運動之實際情形。

VIII.Spin-up

Spin-up 之重要性乃在於確定模式海洋中的能量，在外力的作用下是否已達到穩定平衡之狀態。而二維之空間平均動能較三維之空間平均動能快速地達到穩定平衡之狀態，因此通常可經由模式之三維之空間平均動能對時間之關係來判斷模式是否穩定。

模式由 1999 年 1 月平均之邊界條件及表面外力均未改變下，開始積分到 100 天左右時，三維之空間平均動能已漸漸趨於穩定的狀態。為要求模式有更高之穩定性，因此於積分到一年後，才開始改變本模式積分之邊界條件及表面外力。

VIIII.執行時間

本模式之執行時間為 1999~2003 年，以一日一筆之方式輸出資料。二維輸出有海平面高度（el）、正壓流場（ua, va），三維輸出有溫度（t）、鹽度（s）及流場（u, v, w）。

2.2 經驗正交函數（EOF）

經驗正交函數（Empirical Orthogonal Functions，EOF），也稱為特徵向量分析（eigenvector analysis），或是主成分分析（Principle Component Analysis，PCA），是一種分析矩陣資料中的結構特徵，提取主要資料特徵量的一種方法。

若假設在空間上有 n 個點，時間上有 m 筆資料，如此便有 m x n 筆的向量。使用 EOF 分析時，主要是希望可以找到 m 筆的特徵值（eigenvalues），此特徵值即為所看到的時間序列分布圖。之後再將這 m 筆資料投影到相對應的特徵向量（eigenvectors）上，方可計算出代表此

時間序列的空間分布。

其分析方法如下：有一 p 維的隨機向量，經過經驗正交函數轉換得到新的 p 維向量 y，

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \quad y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

其中 x 與 y 間的關係為 $y = Cx$，當中之 C 為一 p x p 之方陣，則 y 之協方差矩陣 （covariance matrix）為 $\sum_y = c\sum_x C^t$，其中 $\sum_x$ 為 x 之協方差矩陣，且

$$\sum_x = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(x_1,x_1) & \mathrm{cov}(x_1,x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1,x_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{cov}(x_p,x_1) & \mathrm{cov}(x_p,x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_p,x_p) \end{pmatrix}$$ 。

當中之 $\mathrm{cov}(x_i,x_j)$，表示為 x_i 與 x_j 之協方差，C^t 表矩陣 C 之轉置矩陣（transpose matrix），而 EOF 之分析主要使 $\sum_y$ 成為一對角矩陣（diagonal matrix），亦即 $\mathrm{cov}(y_i, y_j) = 0(when \quad i \neq j)$，因此在 $C^t = C^{-1}$ 之假設下，可得 $\mathrm{cov}(y_i, y_j)$ 為 $\sum_x$ 之特徵值ーλ_p 為

$$\sum_y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda p \end{pmatrix}$$

當中之 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_p$， 即為 $\sum_x$ 之特徵值，且 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p$。當 λ_p 對應之特徵向量為 C^i，則 C^t 即為各 C^i 的 p x p 之合成特徵向量矩陣，即 $C^t = \left[C_1, C_{2,\cdots,} C_p\right]$。故由 $\sum_x$ 之特徵值，求得相對應之合成特徵矩陣後，可得到 x 與 y 間之關係。