

## 第四章 研究結果

理解思考是不能抽離情境脈絡，與環境交互作用的動態現象是現在較重視的「思考」。在研究中，我透過問卷、現場觀察筆記、轉譯的逐字稿、訪談記錄、研究日誌及學習單、教師設定的教學目標等相關文件，經過整合與歸納，凝聚出資優生的思考樣貌。

我在第一節先敘述這段思考發生的「大環境」，敘述這個資優班及這門數學課的整體情境背景，以呈現資優生「在什麼情境下進行思考？」。

接著在第二節，我將關注的情境脈絡縮小在課堂上實際進行的任務，我順著時間軸、依單元及依課堂流程進行，聚焦在改變，切割每個事件。描述出師生共同建構出的言談內容及學生的參與情形，藉此呈現出兒童「思考的內容」以及「思考的歷程」。

為了進一步更概念性的詮釋資優生的思考，第三節我進入整合的階段，打破時間順序及事件的切割，就以思考為視角，並且關注在兒童的反應，整合資優生「如何思考」及「為何思考」。在這一節，第一個部分我先將焦點放在任務引導下兒童的思考樣貌；第二個部分，我再把焦距縮小，探討在兒童對話情境中的兒童思考。

## 第一節 大環境

在分析資料試圖解讀兒童思考的過程中，我感覺到有一個基底在牽引這樣的運作，這個基底非直接跟兒童的思考有關，但卻也間接影響了兒童思考的發生。

### 一、這個資優班

在研究中的這群資優生，是五年級資優班的學生，他們大多從二年級被篩選入班開始，已經經歷過三年的資優教育，即使是一些中途才插班進入的學生，也都有一段時間的資優班上課經驗，我想先瞭解他們對於資優班的理解，因此我設計了一份簡單的問卷(附錄 1)，其中「話說資優」的部分，請他們「為資優生下一個定義」並且形容「你所認為的資優班」。歸納兒童的填答結果，姑且不論對於貼上資優生的標籤之後，因為他人的期待與自己表現的落差所帶來的壓力(大部分的反應是這些)，兒童對於自己為什麼會跟這群人集合在這裡的描述是「智商比較高」〔豪〕、「理解力強、學習能力強」〔樂〕、「比較聰明」〔正〕、「判斷、理解力強」〔杰〕，而這樣的理解，可能也引領著他們在資優班應有的「作為」，就像〔杰〕所寫的，資優班就是「能思考多一點」〔杰〕；我另以「回首來時路」為標題，請兒童談談在資優班的上課經驗，整理兒童的填答之後，發現兒童認為在資優班上課的內容是「比較深的」〔龍〕、「需要動腦筋的」〔豪〕，而上課的形式是「比較自由的」〔豪〕、「可以有自己的意見」，「可以一起討論」的。

也許因為這些理解和經驗，兒童來到資優班上課時，並不是「空」的，他們多多少少意識到：在資優班我會遇到「比較難的」、「需要動腦筋」的問題，我可以「自由的」、「表達意見」，也可以「和同學討論」。而這些「有」或許就啟動了思考的準備狀態。在我的觀察中發現兒童常能快速的進入狀況，或許在某種程度上是因為他們來到資優班就做好思考的準備。就像 Ruggiero (2001)所說只有當我們去指揮我們的心智運作時，那個心智運作才有可能轉變成為思考。

## 二、這門數學課

上課的形式，畫出了思考發生的空間。兒童從對於時間、位置和言談自由度這三個維度所構成的空間的理解，兒童想辦法在限制中仍能繼續思考，或利用開放處延展思考。

### (一) 時間

資優資源班上課的時間有「抽離式」及「外加式」兩種，也就是說學生仍安置在一個普通教育的班級，但是有些時間會被抽離到資優班上課，或是利用原班沒課的早自修及午休時間做外加的上課。因此在原班及資優班之間來來回回的穿梭是這些資優生需要做的。而這門數學課是利用抽離的方式，一個禮拜上課一次，一次上課是連續兩節（80分鐘），觀察的這兩組都是排在第一節和第二節，也就是說，學生來到學校後會先到原班教室參加早自修，然後第一節課之前到達資優班教室，第二節下課後再回原班教室，其實這也是件複雜的工作：

有時候兒童會忘記資優班的上課時間就像「【8：40】第一次上課，學生還不記得上課時間，老師去原班找人」（觀-92.09.03-錄影）

有時候學習也會因為必須趕緊回到教室而中斷，

【10：11 已經下課了】

T：請學習單.....收學習單，因為你們還要有回教室的時間

豪：我們教室很近

T：最慢最慢再兩分鐘要請你們收起來

藁：五分鐘

T：你們還不過癮是不是？

（觀-92.09.03-錄影）

偶爾也會發生有兒童晚來而請其他學生到教室找人，就像有一次，

【8：42】「已經上課了，樂還沒到教室，老師就請龍和正到樂的班上去叫樂，而龍、正出去一會兒，樂就進來了，路上沒有碰到龍、正，所以現在教室是樂、蓓、杰三人，T先與他們進行討論」

(觀-92.11.13-錄影)

而這樣的狀況，常會使得討論必須再重來一次，

T：辛苦你們了，你們走出去……

杰：剛走而已她就來了

T：所以下次要記得要早一點來，下課時間就要過來，否則等到上課時間，一定會有拖延的部分，然後他們又要跑一趟。

T：好，杰，把我們剛剛說的重複一次給他們。

(觀-92.11.13-錄影)

除了必須更換地點之外，另一個時間的切斷是這門數學課一個禮拜上一次，若再加上特殊狀況而停課，將使上課的時間間隔更久，而讓之前討論的內容有些遺忘。張老師考慮到這樣的狀況，所以常會在課堂討論即將結束時要求兒童「做記錄」，另外，張老師也常會在每次上課開始先詢問「我們上次討論到哪裡」，幾次間隔比較久的上課，張老師也會發下記錄來幫助「勾起記憶」。

間隔的時間造成了思考的中斷，為了彌補中斷，必須花時間去重述或是喚回記憶，延遲了原本預定的討論，又即使喚回了記憶，當時情境中流動的思考也不可能原貌再現，所以我思考「靠記錄來彌補，會不會補不回原貌」，但從課堂的觀察也發現，雖然不一定是原貌，但只要有一個起點，我想它仍是「另一段思考的開始！」(省思-92.12.10)也媒介了繼續深究的可能。

## (二) 位置

再談到這個資優班的物理位置，雖然教室中總共有二十五套以上的桌椅排列其中，然而由於每次上課人數不多，因此上課的時候兒童都會坐在白板正前方的位置，而我的觀察位置和攝影機架設的位置就在後方，圖示如下：

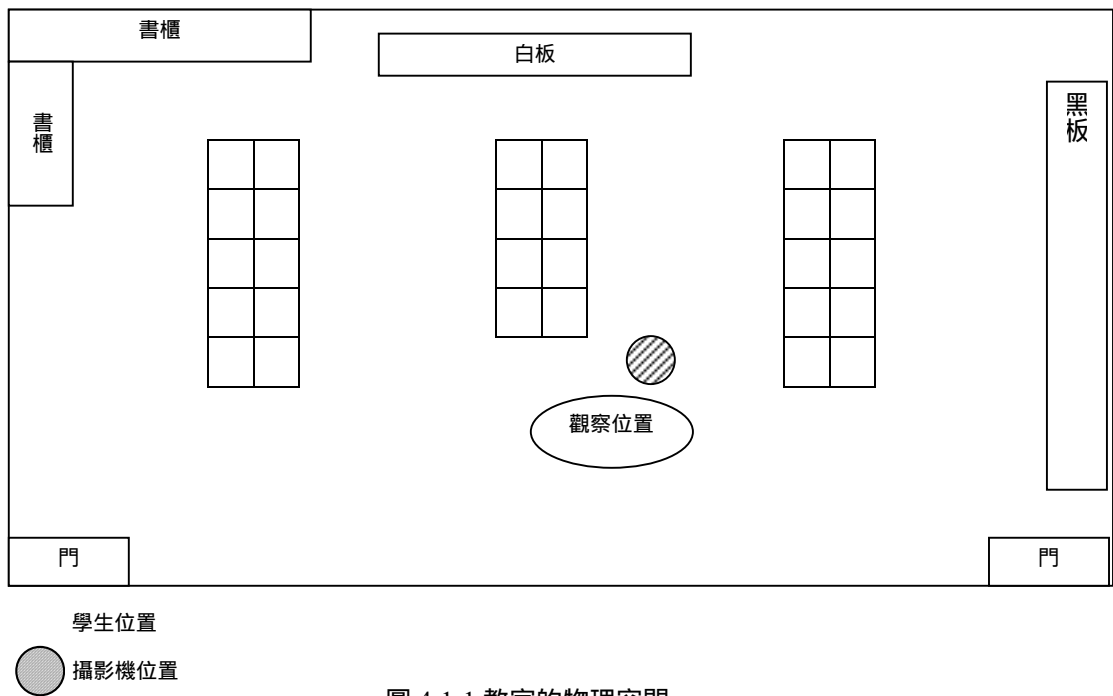


圖 4-1-1 教室的物理空間

再細看課堂當中，參與者（師、生）的位置，又有下面幾種比較常見的方式。通常上課時，老師會站在白板前面，而兒童坐在位置上，如圖示：

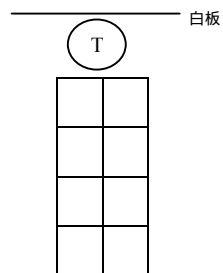


圖 4-1-2 課堂中參與者位置的第一種型態

有時候，有人在白板上解題希望大家看清楚時，或是需要大家立即在白板上反應作法時，所有兒童會站到白板前：例如，

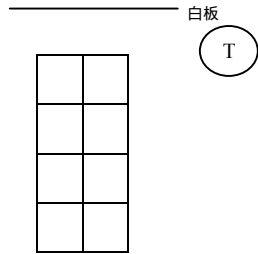
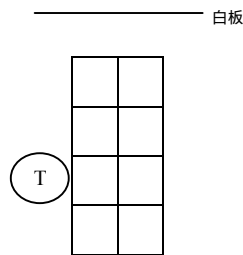


圖 4-1-3 課堂中參與者位置的第二種型態

有時候，會有兒童上台說明或帶領討論，這時老師會坐在後面，由同學在台前，或一人，或兩人，依需求而定，例如：



在的課堂中，〔龍〕和〔正〕剛開始為了檢驗一個新發現的推論，兩人在台上作分析；在分析的過程中，或是台上的兩人或是底下的同儕又不斷發現新的可能性或反證，因此不斷的檢驗，一直到老師說「好 OK，來，嗯，其他三個知道他們兩個在做什麼嗎？」大家回答「知道」後，〔T〕走上了台，〔龍〕〔正〕才走回座位。

圖 4-1-4 課堂中參與者的位置的第三種型態

(觀-92.11.13-錄影)

總和上述來看，課堂中參與者的「位置」還頗有彈性的，依學習的需求做改變。而這樣位置的改變，有時候來自於老師的要求：

T：用口語可能不清楚，來豪，老師拜託你一下，依你剛剛的方法作一次給我們看（用手勢請豪到台前）

（豪走到白板前，拿筆準備說明）

俐：我當助理

T：好，你當助理

(俐也上白板前)

(觀-92.09.10.錄影)

位置的改變有時候是來自於兒童提出的要求，像上述的例子，或是：

龍：就是.....老師我可不可以(指白板)【意思是要上白板說明】

師：好，用你能說明的

(龍上前利用白板)

龍：就是譬如說.....(以下略)

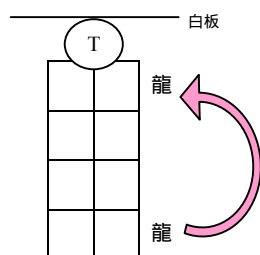
(觀-92.10.09.錄影)

位置的改變有時候是兒童自發的應用表達或思考工具，就像下例：

龍在台前說明「那2到4是加2，到6也是加2.....」(此時正站起來走上台)，對龍說：「那下下看就好啦！下下看會不會是必勝？」(隨即拿起筆準備與龍下這一局，來檢驗這個推論)

(觀-92.11.13-錄影)

有時候，為了要得到注意，兒童也會自由的改變座位，或者是站起來：



T：有沒有人可以跟我解釋一下什麼叫做「只要下對」？只要下對是什麼意思？

(龍、正舉手)

T：杰你來，今天都沒有聽到你的聲音，杰你覺得呢？

(龍將位置移到前面的座位)

圖 4-1-5 一次課堂中位置改變

(觀-92.10.09.錄影)

上面這個例子，應該是〔龍〕舉手了，老師卻沒有請他發言，因此他將位置移到最前面，希望老師更容易注意到他。

綜合上述的例子，課堂進行中參與者的位置會依學習需求的不同，由老師要求或是兒童自發的改變。而位置改變的彈性，傳達的或許不僅僅是位置改變的自由度，還有張老師對於此類行為的接納度，兒童從中理解，只要是為了清楚的表達或是進行實作或檢驗活動時，可自由轉換位置及利用表達工具，這樣的開放性，增加了兒童思考的憑藉。

### （三）言談

張老師第一次上課時所提出的「規則」，讓兒童對於課堂上「討論」的必要性有了心理準備：

T：好，張老師上課有幾個……

A：規則

T：對，我們上課都有幾個規則，第一個就是……

豪：不要說話

T：嗯……學習一定要靜下心才能學習。在資優班如果不能發表，我們就不用到資優班了，為什麼？因為老師不讓你說話嘛，所以老師絕對讓你說話，可是老師在說明的時候請你注意聽，那你在互相討論的過程，如果是整組討論就以我們整組的音量可以聽得到，如果是自己做，不要影響其他人，這是我們的規定，跟我們玩遊戲一樣，上課也有規則，那我們如果大家都遵守規則，很快我們就會進入狀況，老師會帶領你們怎麼進行討論，所以為什麼說組長會換，就是說我每次進行討論的工作，決定用什麼方式討論我會教給組長，那剛開始，你們沒有上過張老師的課，可能不知道怎麼討論，張老師就會帶著你一步一步的做，這時候組長在學，其他人也要學，因為下一次很有可能就



是你當組長，老師希望訓練你們的是不同於你在普通班的訓練，因為老師說過，將來都希望你們成為一個領導階層的人，而不是，每個人都會被領導，可是老師希望你們成為領導階層的人，所以為什麼要帶你們一步一步的學習怎麼領導別人這是很重要的，所以我們今天就從組長開始，那老師會帶著你做。

(觀-92.09.03.錄影)

或許是兒童們對於上課的刻板經驗，「不能說話」是他們所預期應該有的上課表現，在這段話裡，張老師沒有提及任何的「數學」反而將「討論」定義為這門課要學習的重要任務，並以此與「普通班」作區別，也點出她對於資優生「成為領導階層人」的期待。

在上課的過程中，張老師不但允許學生們自由的發言，還會進一步要求每個人都要表達想法，所以類似「杰，你來，今天都沒有聽到你的聲音」或「樂，你覺得呢」這類的對談也經常在課堂中出現。

可以見得在這個課堂上非常重視以語言來表達思考的歷程，說話變成是課堂上必要的活動。不論是主動或被動的言談，可以聽到不同的聲音，似乎也促成了討論的產生。

## 第二節 課堂任務與課堂進行

這門數學課共歷經了三個單元：包括單元一《數量探討-數字推理》、單元二《數量探討-拈的遊戲》以及單元三《生活中的數學》，其中第一個單元持續一個月，第二個單元持續了兩個月，第三個單元只進行了三次，尚未完成，但因為學期結束而暫告一段落，所以較看不到完整的思考歷程；再加上這個單元的性質與前兩單元不太相同，所以我在分析時就不把它納入我的分析範疇。

這個數學課堂的參與者是張老師以及一小組的資優生，張老師在教學之前，已先計畫了單元的名稱及預定的目標，作為引導兒童思考的方向；然而當這個方向實際交到兒童手上，產生了互動，所呈現的又是另一種風貌。

這裡我就順著時間軸描述，分析每個課堂討論的任務，藉此來呈現課堂進行的內容與歷程。我發現，不一定每個任務討論結束後才會產生新任務，有時候在討論之中，就會產生任務的改變，所以我根據任務的出現，而非任務的結束來做畫分。我都先介紹每個單元的主要內容，並引入教師所規畫的教學目標，之後我就描述課堂進行的樣貌，並依據議題的內涵給予標題。

### 單元一 數量探討-數字推理

這個單元是一個「數學遊戲」，遊戲的玩法是：先有一個  $4 \times 4$  的方陣，方陣兩維皆有數字（如圖 4-2-1），解題者要在方陣中擺放花片，使得每一橫排或直排花片數量總和「同時符合」所對應的兩維數字要求；另外，方陣上方寫有解題的「條件」，規定每一個空格能夠擺放或至少擺放的花片

數量。也就是說，方陣內花片擺放的單格數量，受到條件的限制；而一排花片的總量受到於兩維數字的限制，我以【橫 2834、直 3662】為例，呈現遊戲範例如下：

條件：每格最多擺兩片

2	8	3	4	
				3
				6
				6
				2

圖 4-2-1 數字推理遊戲範例

另外，學習過程中，兒童除了是解題者之外，還要扮演出題者的角色，必須設計兩維數字以及條件，因為並非所有的數字及條件都能求出解，所以若要成功的出題（意即出有解的題目），就必須注意到兩維數字、條件與花片數量的關係。

在教學之前，張老師在教學計畫中寫下他希望藉由本單元讓兒童學習到的教學目標：

- (1)能觀察二維表格並依題目條件完成解題。
- (2)能從解題中觀察數字之間關係，並自行設計題目。
- (3)能找出不同的解答及加以系統分類。
- (4)能回顧單元重點並用文字表達。

（《數字推理》目標）

讓「花片能夠成功的擺放」是這個單元思考的起點，由於方陣外部兩維的「數」字，共同控制方陣內部花片擺放的總「量」，所以橫排數字之和與直排數字之和一定要相等，

花片才能夠成功擺放，這就是張老師希望在本單元中兒童能夠發現的關係，兩維數字因為共同牽制於花片數量所產生的關係。

看張老師所設計的教學目標，她切割了幾個學習階段，首先，要能瞭解遊戲規則並成功「解題」，然後在解題過程中能「發現」關係，並且能「應用」所發現的關係來設計題目。另外張老師也安排其他可探究的點，包括，針對不同解法做有系統的「分類」，最後，張老師希望能夠透過「文字表達」來促進數學溝通，並且利用回顧活動建立兒童的「後設認知」。

## 一、規則建立與嘗試解題

### 1.從「教師說明遊戲規則」到「師生達成共識」

「這個單元是從玩遊戲開始」在《數字推理》單元的一開始，張老師是這麼向兒童形容這個單元的，而這是一個「有規則」且「跟數字有關的」的數學遊戲。接著老師發下每人一張學習單（數《學-1》），又拿出了一張題目紙，請兒童將題目紙上的數字【橫 3644、直 5543】抄在自己的學習單上，雖然兒童還不清楚「抄數字」的目的，不過他們還是跟著老師作一個指令一個動作的反應。待所有兒童都抄完數字後，老師這才開始說明遊戲「規則」，包括「分陣兩維數字與花片擺放數量關係」以及「條件的限制」。在說明的過程中，兒童會發出「喔~~」的聲音表示瞭解，但為了進一步確認兒童瞭解，說明完畢後張老師還指著不同的數字問兒童「這一個【數字】又代表什麼？」、「那這裡橫的【數字】呢？又代表什麼意思？」，更追問了幾次「有沒有問題？」、「知不知道？」，兒童就跟著回答，或以點頭、搖頭表示，遊戲規則說明一直到「大家都點頭」後告一段落。而就在張老師宣布「開始做」時，〔豪〕提出一個問題「那這邊畫三個，這邊有空格？」意思是若在某一格畫了比較多的花片，同一排的其他格就會留下空格，也許〔豪〕原本預期方陣中盡量

不要出現空格，不過這不是任務中的限制；另外，〔俐〕也問到「可不可以用星星來代表花片」關於符號的問題，兒童藉著這些提問，澄清任務說明中沒有提及的限制或要求，確認他們「可為」的範圍。

## 2.兒童各自嘗試解題

經歷澄清的過程，老師再次宣布任務開始，兒童便開始各自解【橫 3644、直 5543】的題目，解題過程中兒童沒有交談，在各自解出答案之後，則自然的互看彼此的解法，小聲的交頭接耳說「一樣，都一樣……」。有三個人的解法完全相同，張老師先用「湊巧」來形容這樣的現象，並順勢問到「會不會只有一種答案？」，大家斬釘截鐵的回答「不會！」，只是「我們太統一了」〔豪〕。

## 3.兒童解題方法分享

最後一個解出答案的〔蓁〕完成之後，張老師便打斷了兒童私下的交談，請他們公開分享解題時的思考：

### \*〔俐〕的分享

T> 俐：你從哪裡開始？

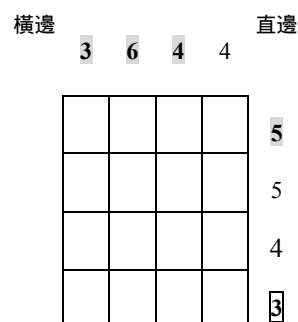
俐：我從 3 (橫一) 跟 5 (直一) 開始

T：好 3 從哪裡開始？你怎麼想的？

俐：這邊有五個 (直一)，這裡只有四格，所以有一格要畫兩個

T：有一個地方要畫兩個，那你決定畫在哪裡？

俐：畫在 6 (橫二)，因為畫在 4 (橫三) 的話，那 3 (直四) 這邊 (直四) 你也要畫三個啊，那這樣就會不夠。



**\*【豪】的分享**

豪：先做 3 (橫一)【一格放一個】，然後把 4 弄起來 橫邊 3 6 4 4 直邊

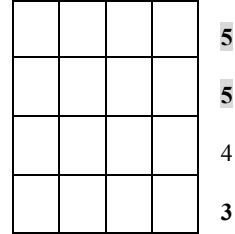
【一格放一個】，然後……

T：4 整個弄起來

豪：然後再放 6 的，一個一個，【一格一個後還剩兩個】

放在 5 (直一)(直二)【數字】比較大

T：所以你畫在比較多的地方就對了



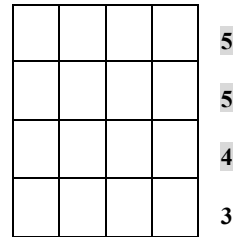
**\*【鴻】的分享**

橫邊 3 6 4 4 直邊

鴻：就是一開始三個平分【指 3 (橫一)一格一個】，因

為 5 (直一)這裡平分【一格一個】，再加上一個【多一個加在 (橫二)】，然後 4 就進去【指 4 (直三)一格一個】……

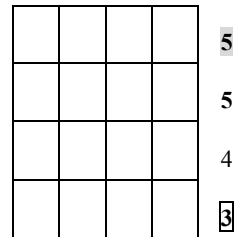
T：他用了一個數學名詞叫做平分，其實你們雖然沒有說出來，可是也都是用平分的概念



**\*【葵】的分享**

葵：我從這裡先【指 5 (直一)】，這樣橫的然後 1234【5 橫邊 3 6 4 4 直邊

(直一)的那排由右往左一格一個數算】，還有一個，就隨便一排加一個【多一個加在 6 (橫二)】，就從 6 (橫二)開始，再 1234【6 (橫一)的那排由上往下一格一個數算】，然後還有一個，就最後一個加一個，然後看到 3 (橫四)，就在這裡加一個【指 3 那排右邊兩格各一個】，這樣剛好三，對啊！



T：所以你很隨機的，就給你運氣這麼好，把它湊出來

圖 4-2-2 兒童解【橫 3644、直 5543】的結果

在老師的要求下，學生分享了自己花片擺放的順序，而老師的角色則是持續追問解題時的思考，並且適時介入數學名詞。歸納兒童的解法，他們從橫排的第一個數字 3，或是直排的第一個數字 5 所對應的那一排選定開始，然後以「平分」的原則擺放花片，平分之後未擺放的花片，則綜觀全局，將這些「多的」花片擺放在「比較大」數字所對應的的排內。或許對兒童來說，採這樣的原則是比較安全的完成任務方法；而兒童擺放後方陣呈現的局面，似乎也間接呼應了〔豪〕一開始認為方陣中盡量不要留空格的預期想法。

#### 4.尋求更多解的任務

老師下達一個任務「同樣的數字、同樣的條件，請兒童求更多的解」而且「愈多愈好」，雖然是老師預設開啟的任務，但是前面兒童們直觀的認為「不會只有一種解」似乎也是展開這個任務的前奏，所以老師也接續這種直觀的想法，鋪陳這個任務的出現：

（發下每人一張白紙）

T：剛剛老師有問一個問題，我們這一組總共有兩種解法對不對？

有沒有可能還有其他種？

俐：有！

T：有人很肯定跟我說有，你覺得會很多還是很少

A：很多

T：好，現在同樣這一題，條件一樣，請你找愈多愈好，紙張如果不夠再跟張老師拿，五分鐘，我要開始囉！

#### 5.兒童各自嘗試尋求更多的解

上述的任務下達後，沒有提問式的澄清活動，隨即展開解題的行動。

雖然名為「各自解題」，但在這段時間內，兒童還是有互相交流的活動，時而抬頭看看別人，偶爾會喃喃自語，彼此之間也會有言談和行為的互動，我節錄一小部分呈現如下：

俐：還有什麼解法？

俐> 藜：你已經開始畫囉！

鴻> 藜：有什麼解法？你怎麼從邊邊畫？

藜：要你管喔，老師又沒有說一定要

鴻：我沒有說怎樣啊，你很奇怪！

豪：我找到一個解法

俐：(自言自語) 其實有一點相像

豪：(自言自語) 好多種的感覺

豪：(抬頭看大家的) 每個人都找出不一樣

(以下略)

這個各自解題任務下的互動行為，在言談部分多在問「畫在哪裡」、「怎麼畫」，或是「找出什麼解」、「還有什麼解」、「總共有多少解」等；偶爾沒有特定對象的喃喃自語，說著自己目前的行動或是感覺，我想也是為了要說給別人聽，希望得到一些回饋；而互動行為部分，包括伸著脖子看看別人的解法，或是把頭湊過去，甚至後來〔俐〕和〔藜〕兩人拿著記錄紙，進行了互相核對的動作。

事後，我檢視兒童們記錄紙(《數字推理》記錄紙1)上的書寫。首先我看到的是，因為兒童拿到的是一張白紙，必須自己畫方陣(不像學習單上已經畫好空白方陣)，〔豪〕〔俐〕〔藜〕三人的作法都利用白紙的邊當作方陣的邊，這樣可以少畫一條線，如果在轉角處，還可以省掉畫兩條線的工夫。我想這就是為什麼，唯一沒有利用紙邊畫方陣的〔鴻〕，才會看著〔藜〕



的記錄問她為什麼從「邊邊畫」；除了用這個方法省掉畫線的工作外，〔俐〕的方陣甚至只畫了區隔花片的線條（類似井字遊戲的畫法），數字就直接寫在旁邊，把所有的外框都省了。只要能表達清楚，兒童似乎盡可能的讓自己減輕工作，不過這也讓我也看到了他們為了減輕工作而產生的變通能力。

接下來我注意到兒童們在記錄紙上呈現的解法，我按解題順序來看兒童擺放花片方法的改變，我幾乎找不出他們求解時所依循的規律，唯一比較有規律現象的是〔鴻〕擺放花片後所遺留的空格數是逐漸增加的，似乎是從平均擺放花片（空格數較少）漸漸集中擺放（空格數較多），不過事後我問〔鴻〕他是怎麼想的，〔鴻〕告訴我他就是「亂寫的、亂想的，就試試看，不對就改」（訪-〔鴻〕-92.11.25-錄音），或許也不是這麼全然的「亂」寫吧，但是兒童在處理這個任務時，的確沒有「求一個解」的任務時，想出一個平分的「原則」後就能順利的擺放，且能清楚說出自己的想法；相較起來，這張記錄紙上的呈現確實「亂」了許多，有很多嘗試後擦擦改改的痕跡。

## 6.全組共找出多少解

每個人都寫出多種的解法之後，老師又下達一個新任務「統計全組總共找出多少種解法」。在之前解題的過程中，兒童也關心「有幾種解法」的議題，〔俐〕和〔綦〕兩人還拿著記錄紙「互相核對」，〔鴻〕也在她們兩人核對時，關心的問到「有重複嗎？」。這個兒童原本就關心的議題，因為老師的介入讓私下的活動，成了「浮上檯面」的主要議題。

老師宣布任務之後，不等兒童思考，張老師隨即又將執行統計的步驟細部化，具體的告訴兒童要把「相同的拿掉，不同的把它計算出來」（其實兒童也已考慮「重複」這件事）。然後老師問問大家有沒有好意見，兒童提出方法，老師則是提問澄清，以下我節錄一段關於核對方法的討論：

豪：慢慢檢查

T：慢慢檢查

俐：兩個人兩個人檢查

T：好，慢慢檢查這是一個方法，要怎麼樣慢慢檢查起來？

俐：我們兩個人檢查，他們兩個人檢查，然後拿出一個代表，在  
跟他們一起檢查

T：你們聽得懂俐說什麼嗎？（對鴻）你可不可以重複一下俐的  
方法？

鴻：我們兩個他們兩個再出來

俐：就是像剪刀石頭布啊，女生女生猜男生男生猜，輸的再出來  
猜，最後輸的當鬼

T：那輸的就是鬼，你們聽懂嗎？

（大家點頭表示聽的懂）

T：好那大概只有老師聽不懂。龔俐，你可不可以慢一點說，我  
知道你剛剛是說抓鬼的遊戲，可不可以就以我們這個學習單的  
方式，慢慢的說，那，你們都聽的懂喔，那老師要是聽不懂你  
們要出來幫老師作解釋喔

豪：老師我知道，就是啊！我們兩個兩個（鴻豪），他們兩個兩個  
（龔俐）交換，最後再從裡面拿出一張，然後再兩個對

T：好，老師現在問一個問題，我聽不懂的就是在說，你們兩個  
兩個檢查你們兩個兩個檢查，最後拿出一張，那那一張裡面會  
包含所有找到的嗎？你們都是兩個兩個檢查，再拿一張給這一  
組比對不對……

俐：啊！那我知道了，就是啊，我們兩個檢查（龔俐），然後再我  
們兩的（豪龔）檢查

豪：再他跟他（鴻俐）檢查

俐：那這樣檢查檢查（手揮來揮去）呵呵呵呵（笑）

T：那這樣有沒有辦法找到全部的，就是找出你們這一組總共找

出多少種？

(以下略)

由上述的言談可以看到，核對的方法都是由兒童提出的，為了達到溝通的目的，兒童也會運用類比或手勢讓表達能夠更清楚；而老師在這段討論中沒有提出核對的方法，她的角色是，在兒童提出方法後，進一步的要求「方法的具體化與實際的操作步驟」對「質疑方法的正確性」或是「確認其他兒童是否理解」。在這樣的互動過程中，方法不斷的修正，更臻精確。

## 7.執行統計與方法分享

最後決定的方法是「其中一個人的貼在白板上，然後其他人拿自己核對，先把相同的找出來」，緊接著就開始實際執行統計的任務。

在執行期間，有人核對得很快、有人卻很慢，老師請速度較快的〔豪〕在自己核對好了後，幫忙尚未完成的同學，這時〔豪〕就主動說了自己核對的方法。

豪：我是這樣子對的啦，看前幾格就知道有沒有一樣。

T：喔，難怪你對得很快

綦>豪：看前幾格，看上面？

T：你要教大家

豪：看上面就好了，看上面有沒有跟自己一樣，不一樣就代表是不同一種

T：嗯，不錯，豪不錯

俐>豪：看特徵？

T：對，俐，就是看特徵

老師原本的想法是請〔豪〕提供「行動」上的幫忙，而〔豪〕提供的是核對「方法」。這樣的幫忙方式，並非取代別人完成工作，且不需等到自己先做完才能幫忙，提供的協助好像更有效、更即時了。之後〔豪〕還是對得比別人快，〔鴻〕和〔藜〕又主動詢問：

鴻 > 豪：你怎麼那麼快？

T：我們要請教育豪，他一定有他的秘訣

（藜走過去幫鴻看）

藜 > 豪：那如果上面都一樣？

T：對啊！豪，有人問你了問題了，如果上面都一樣怎麼辦？【因為剛剛豪的方法是看前面幾格、看上面】

豪：就對下來啊！

T：你是一排一排看對不對？

豪：我是這樣子，先看第一排，如果第一排都一樣再對下來。

T：喔，你接下來看直的就對了

照這樣看來或許是因為〔鴻〕和〔藜〕使用了〔豪〕所建議的方法，但發現速度仍不及〔豪〕，或是使用上遇到了困難，才又提出問題。這個例子，表面看起來「兒童一句、老師一句」的應對，似乎是老師在引導兒童的思考，但仔細看其言談的內容，老師其實只是扮演著贊同、重述的角色，若進一步再把老師說話的部分刪除，這段對話仍是完整的。可以看到兒童直接為了他們的共同目標思考，所以即使老師沒有要求彼此互相學習或是給予速度及時間限制，兒童在團體情境下仍有主動性的同儕學習意圖。

## 二、轉換階段

### 1.同樣數字「改條件」

接下來，老師佈下「改條件」的任務，老師說「同樣這一題我們來改條件。請問一下，你們喜歡怎麼改條件？」。前面的任務雖然也是老師預先的設計，但都出現兒童主動的關心，現在老師突然把關心的焦點從方陣內部的花片拉到了外部的條件，兒童的角色從解題者漸漸趨向於出題者。雖然沒有前奏的連接，但兒童似乎也理所當然接受「老師的」任務，對話也就開始：

俐：玩賓果！

T：玩賓果怎麼玩你教我

豪：在裡面寫數字

T：錯了，豪你沒有聽到我前面說的話，我說要用這個數字

豪：知道知道

俐：用這個來玩賓果

T：怎麼玩？

俐：就是用這個數字啊玩賓果

豪：那全部都寫一，只要一個人喊一，YA 賓果

兒童從方陣的形式，想到了曾經玩過的「賓果遊戲」，老師要求的只是改條件，兒童改的規則是整個遊戲的規則，或許是因為之前的嘗試條件是「花片數量不限」，所以兒童在解題過程中幾乎沒有意識到「條件限制」的存在，因此，此時她們對「條件」的認知是遊戲的「規則」。經過老師的提示，兒童開始討論老師所要求的「條件」：

俐：嗯....不能超過六，嗯.....七個

豪：那不是都一樣

T：俐，老師問你，每個格子不能超過六，跟老師說每個格子可以畫的無限，有沒有什麼不一樣？

俐：差不多

T：為什麼會差不多

俐：因為最高是六啊！

題目兩邊的數字最多的就是「6」因此，條件若設定「6」或「7」是沒有意義的，因為根本不構成限制。

〔鴻〕提出「1」的條件

T：好，有人提，每格不能超過「1」

豪：你自己寫（笑）

T：可不可以成立？

A：不可以

T：為什麼？

豪：因為，根本就不可能

藁：因為 3、6

俐：因為 4 啊

豪：因為 5 在這裡，可是這裡才四格而已

T：對嘛，你講的根本不可能成立啊

題目兩邊的數字有包括「5」「6」，而方陣只有四格，所以若每格限制只能填一個，沒有辦法達到符合兩旁數字的目標，所以條件不能成立。

澄清了沒有意義與不能成立的極端之後，老師繼續請兒童提出條件，〔俐〕提了一個「每格不能超過 2」，老師認可後，大家開始自己設計條件並做出解答，我拿回兒童的學習單，發現每一個人所寫的條件竟然都是「每格不能超過 2」，這一個，他們選擇了最不需思考就能達成目標的方法，而

且這個條件也符合第一次解題時平分擺放的結果（參圖 4-2-2），連解答都不用改了。其實，提出兩個極端，似乎比說出正確答案需要更多的思考。

## 2.再嘗試一些新題目

接下來，兒童又回到解題者的角色，老師準備了好幾個不同數字且不同條件的題目，讓兒童抽題並且解題。

在抽題之前，〔豪〕先喊著說希望抽到簡單一點的題目，但在〔俐〕發現題目上有注音，老師也表示曾經給一年級小朋友玩過後〔豪〕又嘟囔著「太小看我們了」，而當老師表示要再給難一點的題目，或是將簡單的這題拿回來重抽一題比較難的題目時，〔豪〕又趕緊表示「不用了」，或是改口說題目其實「好難喔」。像〔豪〕這樣又想追求挑戰，但又害怕挑戰的矛盾心態，實在有趣。

就這樣，兒童們陸續又嘗試了三個新題目，或許因為之前解題經驗的累積，再加上又回到只要「一次成功的擺放」的目標，所以他們「先平分，然後多的花片擺在數字較大排內」的原則又得以使用了，兒童們解題的速度相當的迅速。

## 三、設計題目中發現關係

### 1.設計兩維數字

這個任務是「兒童自行設計題目出題考大家」，老師交代了出題的規則：數字與條件都可自由設計，但一定要能夠做出解答，而且題目要有一定的程度，不能太簡單，也不能難到無人能解。所以兒童現在扮演的角色是個完全的出題者，包含數字的安排、條件的設計，以及出題的品質都必須自己控制。任務交代完畢，兒童開始嘗試著出題，或許兒童對「要有程

度」的拿捏有些不確定，因此在出題的過程中，圍繞著這個議題，例如〔豪〕說「1111 的話太簡單了（笑）！」，〔綦〕說「我這個沒有程度，你們沒有辦法超過我的，而且都片數不限的喔（笑）！」似乎想得到同儕或老師的回饋。

張老師在學習單上設計一個欄位，要兒童寫下出題活動的「發現」，以下是兒童的填答：

〔豪〕寫的是：每個題目都有很多答案

〔鴻〕寫的是：題目要慢慢推才有答

〔俐〕寫的是：自己先試試看，如果不行，就一直改一直改，改到自己會為止！

〔綦〕寫的是：我自己出的比老師的還難

（《數字推理》學習單 3）

兒童的「發現」都是針對「出題」這個任務，沒有張老師在目標中所預期的，發現兩維數字的關係，所以張老師認為，在這個活動中，兒童還「沒有發現」。

## 2. 個別延伸設計

每個人出題的速度不一，在等待全組完成的時間，張老師針對速度最快的〔豪〕寫的發現「每個題目都有很多答案」給予延伸性的題目：「設計一個題目只有一種解答，不會有第二種解答」，題目說完，〔豪〕直接脫口而出【橫 1111、直 1111】的題目，但過了約九分鐘一會，他把這個答案擦掉了。〔鴻〕看到這個情景，認為「他【豪】放棄了」，而老師則以為〔豪〕考慮到【橫 1111、直 1111】的題目沒有「程度」，所以他擦掉了，但〔豪〕告訴老師他想到「……有橫的、斜的……」，擺放不同的位置就會是不同的答案，所以這個題目不是只有一組答案，不符合



任務要求，所以才擦掉。這個乍看之下正確的答案，只有實際執行任務的〔豪〕做了完整的思考，或許是執行的過程，引動了他的思考。最後〔豪〕設計兩維數字是【橫 4444、直 4444】，條件是「每格不能超過 1 個花片」的題目，完成了只有一組解的任務，且得到同學稱讚「你好聰明喔」〔俐〕。

### 3.一維數字既定設計一維數字

由於開放兩維數字的題目設計時，張老師認為兒童「沒有發現」，所以她告訴我，她「臨時改了」教學設計，佈下「已知橫排數字【橫 2735】，兒童要自行設計出直排數字，並且找出解答」，希望在較多的限制下，能夠促使兒童發現關係。

在解題的過程中〔俐〕跟老師說她發現了一個很簡單的方法，然後得意洋洋的說「天才的發現，很有成就感」，接著〔豪〕也說他有一個發現，聽到「發現」二字也引起了我的好奇，老師問兒童發現了什麼，他們表示發現了一個簡單的設計數字方法，先根據既定的橫排數字畫中間的花片，然後再把每一排花片的數量加起來，成為直排的數字，也就是說，他們是先寫解答（畫花片）然後才設計數字，這是利用「倒推的方式」張老師這麼形容方法。利用這個方法，不容易注意到數字之間的關係。而非使用倒推方法的〔鴻〕，引起了數字關係的討論：

T：鴻？那你是怎麼做的？

鴻：就是抄過來【鴻把一維的數字抄到另外一邊】

（大家笑）

T：怎麼抄法？你跟我講=

鴻：先……

= 直接把數字換過來，為什麼你要換這個數字有影響嗎？為  
麼這個數字換過來？

俐：因為他……

T：來我們聽聽看鴻怎麼說

鴻：我就是這樣想的

T：所以鴻的意思是說我把數字換過來就可以做？要照順序換過  
來嗎？如果不照順序換過來可不可以？

俐：一樣啊

T：他這裡是 2735 我換過來是 5372，如果，5723 可不可以？

豪：可以（手伸過去指）

俐：應該是可以

T：為什麼？

T：我的意思是說我 2735 不變，現在我換過來這一排數字，現在  
鴻的做法是 5732 照這個順序下來，我的意思是說，我跳著擺，先  
擺 5 在擺 7 再擺 2 再擺 3 這樣可不可以？

俐：可以

T：為什麼？

俐：我用猜的！

T：用猜的，有沒有人覺得不可以？猜猜看

鴻：我覺得可以

T：你覺得可以，藁呢？

藁：可以

豪：我也覺得可以

T：為什麼你們覺得可以？

豪：因為數字都一樣位置變而已

俐：不一樣啊

鴻：我這裡寫 2 的時候，我的（圈圈）就換到這裡所以怎麼亂換  
都可以

T：確定？

俐：確定

T：但是如果老師說回到第一的問題，這裡（橫）擺 2735，這裡（直）擺 1234 可不可以

俐：不可以

T：為什麼？

俐：因為差太大了

T：差太大？俐你可不可以再解釋清楚一點

俐：就是那個數字差太多了

豪：就是.....差太大.....就是這邊全部加起來

俐：比如說是 10

T：好一個一個來

俐：如果是 10 跟 1 的話，那就沒有辦法，因為很難湊在一起

T：所以差太多不行差比較少就可以？對不對？好剛剛育豪要講話

豪：（湊過去看鴻的）嗯.....沒有沒有

俐：他的意見應該跟我一樣

T：你的意見跟俐一樣嗎？

豪：對！差不多

T：所以差太多不行差一點可以

T：那蔡你的看法呢？你的看法呢他們剛剛是說.....

（蔡沒回答，豪插話）

**豪：老師！我覺得只要這兩邊的數字加起來數字都等於一樣就可以了**

T：ㄟ 你現在的說法跟俐的不同喔！你要再思考一下，剛剛俐是說老師說 1234 不行，是因為差太大，差少一點就可以，你現在的意思是.....？

豪：這邊（手比橫的）加起來的數字等於這邊（手比直的）加起來的數字一樣就可以

T：那個我們說加起來叫做「和」知道嗎？

由〔鴻〕所使用的方法「將橫排數字抄過來」隱約感受到兩維數字控制著同樣的花片；經過老師的詢問，他們更澄清了，即使花片移動後所造成的數字位置的改變，但仍控制著同樣數量的花片；接著〔俐〕提到兩維數字「不能差太多」，否則很難湊在一起，似乎也已經感受到兩維數字和的差距與花片有某種關係；最後〔豪〕說「兩邊數字加起來數字一樣就可以」，具體說出兩維數字之間的關係。發現了這樣的關係，老師請兒童檢查看看，他們所設計的題目，是否都有兩維數字和相等的關係，經過計算，果然如此。

#### 4. 質疑與檢驗

不過，〔俐〕還是有點不太確定，他覺得數字和相同固然正確，但不見得只有「完全相同」才能求出解，只要「不要差太多」即可，老師建議進行檢驗，於是先澄清了「不要差太多」的定義，〔俐〕把它界定在「3 以內」，於是小組成員再分成兩組，各設計一個兩維數字和的差距小於 3 的題目來檢驗，結果兩組都無法求出解，證實了〔俐〕的推論無法成立，而目前正確的推論仍是「兩維數字之和相等」

#### 5. 交換解題

到目前為止，每人都設計了兩個題目，張老師現在請他們交換解題，並且檢查有無符合推論。或許「解題」的工作，現在對他們來說已經很熟練，所以過程並沒有太多互動討論，但是〔豪〕被〔俐〕所設計的一個題目困住了很久，最後他終於發現「俐，你的當然算不出來，因為數字和不一樣，一個 12 一個 10」，而且〔鴻〕用了「設計缺陷」的詞來形容它，不過這也讓張老師跟我都想到，原來〔俐〕之前「堅持」數字和

不要差太多的推論，是基於這樣的經驗而來的。

#### 四、解法分類

##### 1.將第一次列出的多種解法做分類

老師把一開始大家找很多解的那張記錄紙拿出來，告訴大家現在要做一個「困難的彙整活動」，「怎麼彙整？」〔俐〕急忙著問，老師請她等一會，先問大家知不知道什麼叫做分類：

T：好，你們有學過分類嗎？

俐：有啊

T：有，什麼叫分類？

豪：就是把某一類的放在一起，某一類放在一起

T：把同一類放在一起

俐：分成……幾類

T：能不能舉個例子？

俐：例如說像那個圖書館，有那個……

慕：文學類

俐：文學類、自然科學類、歷史類

鴻：歷史

老師要他們再想想有沒有應用在數學上的分類例子，〔豪〕想到之前二年級做過的圈圈、三角形、圓形等形狀的分類活動，大家不禁笑了出來，因為他們覺得那好像太「幼稚」〔豪〕了，老師原本預告的「困難活動」，用了這些例子來形容後似乎「幼稚」了起來，沒那麼困難了。

發下記錄紙，老師總算宣布現在的任務，必須將這些不同的解法做「分類」，要怎麼分呢，老師先幫兒童切割了工作告訴大家要先有「分類的標準」，

然後要討論「我們的解法分為幾類」。

所以請兒童花五分鐘討論分類的標準：

鴻：條件

豪：鴻想到了，條件

T：條件

俐：我也想到了

T：條件？什麼叫條件

豪：就是像這個，數量……

藁：數量不限放一類，每格不能超過二放一類

俐：可是我們這裡面全部都是不限數量

（其他三人大笑）

俐：不是嗎？我沒有說錯吧？

藁：對啊

用「條件」來分是沒有意義的，因為這是從同一個題目衍伸的不同解法，條件相同，所以〔俐〕說這樣是「直接不用分」，〔鴻〕也不好意思的說他「沒有……講錯了」。〔俐〕也提了一個想法，用「空格數」來分，也就是擺放花片之後所遺留下的空格多寡作為分類標準，這個標準的確可以區分不同類別。老師要求兒童再討論還有沒有其他分類的標準（張老師事後告訴我，她覺得這個分類方法很表面），不過對兒童而言，現在就是「二擇一」的狀況：

鴻：就空格喔？

豪：還是條件？……可是條件都一樣

（大笑）

豪：就不用分了

豪：就空格喔？

鴻：就空格喔？

豪：可是空格那麼多要怎麼算？

俐：我幫你們算，然後我到時候歸成幾類，然後，我用這個顏色

豪：用紅筆啦

俐：像這個 1、2 兩格我就寫 2

（俐開始在每一個解法上用螢光筆標上空格數）

不等老師宣布「開始」，兒童已經執行分類的工作了。

或許因為這個進行步驟不是老師所預期的，所以老師又介入了，請〔俐〕稍微等一下，必須先回答學習單上「你先決定分成幾類」的問題。而根據目前〔俐〕所標的空格數，有標到「空十格」的解法，所以大家先在學習單上寫上「分成十類」，但〔豪〕不太放心，因為就算有空十格的解法，也不見得就有十種類別：

豪：確定真的有十個嗎？

（俐點頭）

豪：確定？

俐：有啦！

（繼續寫）

俐：哈哈！不出五分鐘我把他全部統計完

〔俐〕又想到另一種類別，不過一下子就否決了：

俐：等一下，有十一種，因為還有空零的

鴻：空零的

俐：對啊！根本沒空的啊

俐：可是……（看記錄紙）根本沒有沒空的耶

鴻：ㄟ裝肖仔（閩南語）喔！

俐：（笑）

豪：裝肖維、裝小尾

所以目前為止大家還是認為可分成十種類別。

接著兒童開始進行分類的工作。在四張記錄紙上，扣除相同的之後，總共有三十四種解法，〔俐〕先在四張記錄紙上的每個解法標上所有解法的空格數。接著記錄紙放在大家的中間，然後每個人自己把每一種分類方式的解法抄在學習單上，例如：先寫「NO.1」（他們說這樣寫比較輕鬆）代表空一格的，然後就把四張記錄紙上，所有標記「空一格」的解法抄上去。

因為記錄紙放在中間，所以有人需站起來看；有人也會拿回位置上抄；若有人先寫完某種類別，旁邊同儕也會就近看他整理好的。漸漸的方法演變成一個人先拿到位置上抄，然後再交換，而抄寫的過程中，兒童也邊做邊聊天，偶爾聊到電視節目或是班上的事。就這樣，分類的過程夾雜著聊天的話語以及紙張傳來傳去的情景，接著愈來愈混亂，因為傳來傳去交換看記錄紙，或偶爾看旁邊同學所寫的，大家已經搞不清楚那些解法已經抄過了或是哪些漏掉了，直到〔鴻〕大聲的問到「二的到底有幾個啊？」，〔俐〕也覺得情況有點混亂了，所以說「你們要回收給我啦，不然到時候都亂的」，意思是大家每抄完一張就要交還給她，然後再從他這邊拿另外一張，所以方法又演變成一個人拿一張抄寫，寫完回收給〔俐〕，不過過程中還是有從別人手上拿過來，仍然有點亂，大家繼續寫，仍有穿插著閒聊，或是看看對方寫出解種並與自己的核對，回收、交換的動作也持續，持續寫到下課……（觀-92.09.17-筆記）。分類完畢，兒童發現根本沒有「空八格」的解法，所以剛剛說有十種分類方式是錯誤的，只有九類。

到了下一次上課，老師問兒童分類的情形，發現每一個人所寫的都不



相同：

鴻：ㄈㄚ 你怎麼那麼多？

T：喔？這中間出入喔？

豪：你們中間一定有重複啦

俐：先等一下

T：好，這時間交給你們處理好，這中間到底為什麼出了什麼樣的問題？

俐：我知道問題出在哪裡，因為大家的進度會不一樣

鴻> 俐：你有重複的

豪> 俐：而且你這裡寫錯，這裡三耶，你怎麼畫四

上次的混亂場面，使得出現「重複的」(同一個解法寫了兩次)以及「寫錯的」(空三格的解法卻記錄在 NO.4 的位置)，所以他們開始進行核對的工作，拿著彼此的學習單與四張原始的記錄紙交互對照，經過了一段時間〔俐〕覺得這種方式不太有效率：

俐：我覺得我們應該要重寫

俐：那下下策就是重弄

鴻：ㄜ ㄟ太累了

其他人都不願意重寫，所以還是持續在各張學習單以及記錄紙上搜尋錯誤〔俐〕說「可是你這樣核對更浪費時間啊」，她又再重申一次重寫比核對要省力，不過，其他人仍堅持繼續從記錄中挑出錯誤或重複，中間也嚷嚷著「唉呦不要一直吵好不好，頭很痛耶」〔鴻〕、「豪的眉頭已經皺到不行」〔俐〕、「眼睛快要脫窗了」〔豪〕，不斷進行核對與對話，又持續了一節課。

## 五、單元結束與回顧

### 1.這個單元的結束

到了第二節上課，張老師跟大家說了「事前的計畫如果執行得很精密，後續就不會那麼費力」的道理，然後宣布「先收回來不要做了，今天進入新單元。」〔鴻〕大聲的說「老師不可以，我下次就不想做了！」，其餘同儕也表示認同，於是老師決定讓他們繼續做下去，此時不進入新的單元了，張老師走到後面跟我說「看他們那麼興奮」，所以就讓他們繼續。又一直核對到了下課。

這一段過程，我看到兒童面對複雜混亂的工作，一旦做了，就堅持下去；但是大部分的人都不願意做重複的事，即使重來一次會比較簡單容易的解決問題（觀 920917-筆記）。所以這個單元就這樣沒有結束的結束了。

### 2.回顧：學生對課程的後設觀點

在每個單元結束時，學生會寫一張「單元日誌」，內容要寫出「你從這個單元中體會到什麼？請你多方面的去想，從整個上課的流程去想，你學過的哪一些？那一些東西有沒有帶給你什麼？」。我想這應該也可以代表由學習者的觀點來看這一個單元。我先舉一個學生的單元日誌作為範例，再將整組學生的反應歸納整理成表格。

#### 〔豪〕的單元日誌：

在這一次的課程裡，我和同學分工合作完成了。我學到了跟同學相處，還有做出最正確的選擇，怎樣分類、出題、解題。而我覺得大家跟老師的解題的方法都不一樣耶！老師給我們題目，我和大家分工合作，創造出最高記錄 34 種耶！老師出的第一單元真是非常有趣。

單元日誌歸納：

表 4-2-1 《數字推理》單元日誌歸納表

實際學習行為		解出許多數學遊戲（綦） 設計題目給同學做（綦） 要考慮兩邊加起來要一樣多（綦） 和同學分工合作（豪）
學習感受		有趣（豪、俐） 設計題目比解題還難（綦）
學習收穫	能力	分類（豪、俐） 出題、解題（豪） 做出正確的選擇（豪） 觀察數字之間的關係（鴻） 推理（鴻、俐）
	同儕互動	我學到了跟同學們相處（豪）
	延伸應用	可以當作遊戲也可以生活上應用（俐）

## 單元二 數量探討-拈的遊戲

這個單元，同樣也是利用數學遊戲，探討數量關係與規律。這個遊戲需要兩個參與者，互為對手，兩個對手之間有三堆棋子，兩人輪流從其中一堆中取不限數量的棋子，但每次只能從三堆棋子中挑其中一堆拿取，取得最後一個棋子的人贏。舉例來說，現在輪到我取棋子，面前有三堆棋子，各堆棋子的數目如下：

圖 4-2-3 {1、1、5} 的棋局排法

如果我從最右邊那堆中取 5 顆棋子，使得那堆沒有棋子，剩下兩堆，而對手只能在剩下的兩堆當中選擇一堆取走棋子，他可能拿了第二堆中的一顆棋子，此時我就能拿到在第一堆中的一顆棋子，也是整局中的最後一個棋子，取得了勝利。而為了能夠處理更大量的棋子，所以將具體的操作方式用抽象的數學符號替代，於是這個遊戲有一種共同使用的溝通方式： $\{1、1、5\}$  代表第一堆有一顆棋子、第二堆有一顆棋子、第三堆有五顆棋子，而剛剛的遊戲過程就可以記錄成：

$$\{1、1、5\} \overset{\text{我}}{\quad} \{1、1、0\} \overset{\text{對手}}{\quad} \{1、0、0\} \overset{\text{我}}{\quad} \{0、0、0\}$$

「取得勝利」是這個單元思考的起點。如果可以掌握多幾個像上述  $\{1、1、0\}$  般能導致勝利的局面，取得勝利的機會就會增加了，就像〔正〕也曾表示「有多點必勝，才有可能會有多一點的勝利」，因此就要有系統的去分析個

別棋局，判斷它能否導致勝利。累積更多導致勝利的個別棋局後，若只靠記憶力去記住每個個別棋局可能不是這麼容易，且單靠記憶個別棋局的方法，當遇到沒有分析過的新棋局時也就無法判斷，那麼取得勝利的機會便降低了；相反的，如果能找到導致勝利的規律，就能減低記憶負荷，也能在面臨新棋局時做判斷，而規律尋求的方法，就是從多個導致勝利的個別棋局中歸納出共同的性質。為了確認規律的正確性，兒童必須尋找更多符合規律的個別棋局進行分析，提出支持規律的證據，或是修正規律的依據。繼續累積了多個規律之後，或許還可以發現個別規律的共通性質，然後歸納出更含括性更廣的概念。在這樣層層疊疊之後，漸漸趨近如同張老師在目標中列出的「數學定理」或是訪談中她提到的「最終的方程式」。

簡單的說，其實這個單元的探究歷程，也就是一連串演繹與歸納的歷程，而歷程中的每一階段，都含有達成目標所需的思考能力。

再看看張老師的教學目標：

- (1)認識拈的定義、玩法及記錄方式，並由遊戲中發現必勝秘訣
- (2)認識殘型的定義、並有系統的探討殘型，分辨何者為必勝殘型或必敗殘型
- (3)能透過經驗提出數學假設後，再提出實例去證明假說，或找出反例修正假說，以便達到數學的定理。

(《拈的遊戲》目標)

單元結束，兒童們擁有幾個必勝的「規律」，還有一些無法納入規律下，他們稱之為「特例」的棋局。我問張老師，既然還沒有達到目標中所設定的含括更廣的「數學定理」，為什麼讓兒童停下來不再繼續推演下去，張老師表示她只是藉由這樣的教材，讓孩子學習科學探究的步驟和方法，擁有追尋數學定理的經驗，最重要的是要「植一個有興趣的根到孩子的心裡去」

(訪-〔師〕-93.05.15-錄音)。我想，如果兒童能瞭解探究方法，又擁有探究的興趣，那麼有沒有求出最後的數學定理，或許就不是那麼重要了。

## 一、規則建立與嘗試解題

### 1.定義遊戲規則：從「教師說明」到「師生達成共識」

單元的開始同樣先說明遊戲規則，但與上個單元的處理方式不同，張老師發下一張學習單請學生閱讀，自行理解遊戲的規則。在決定用這個方法之前，張老師曾經和我聊到關於「給學生書上的資料」的話題。她提到「這次想讓學生用不一樣的方式進入，印資料給學生自己看，自己透過閱讀來自學，而不是每一次都是老師講」，我也表示贊同。在張老師的詢問之下，我分享了自己通常怎麼處理這些「內容比較多」的書面資料，她回應「這些資料經過選擇，覺得說明得很清楚，在閱讀和理解上應該不會有太大的困難」，而且她還請就讀二年級的女兒畫了可愛的插畫呢！不過，聊到最後我兩共同的結論是「應該是有主題後，學生自己要去蒐集相關的資料」(對-〔師〕-92.09.25-筆記)。而在上了課之後，的確有其他小組兒童主動在網路上找到一個可以和電腦玩拈的遊戲的網站，分享給老師和同學，不過這都是之後的事了。這樣的談話，或許也呼應了我訪談張老師時她提到的教育理念是，學生能夠「自主學習」(訪〔師〕-92.10.14-錄音)。

所以這個單元張老師是以這樣的開場白進入的「這個部分呢，老師想讓你們自己先由文字去進入，所以老師不說，那請你看！」(觀-92.10.02-筆記)，以下就是兒童所閱讀學習單的內容：

「拈」的定義：

「拈」本是我國民間的一種遊戲，英文叫做 nim，是「拈」的廣東話發音。大概是當年大批華工由廣東到美國去築鐵路，在工

作之餘，撿石頭消遣或賭博的，被美國佬學了去。查韋氏大字典，nim 有偷及扒的意思。

「拈」的玩法：

撿好三堆石子，每堆數目不拘，甲乙兩人輪流自其中一堆拿取石子，拿多少隨意（至少拿一個）但不得同時自兩堆中拿取，最後拿光石子的人贏。舉個例說，設三堆石子數分別為 2、5、6。假定甲把 2 個那堆拿光，使石子數變成 0、5、6，而乙由 6 那堆拿 5 個，使 0、5、1。此時若甲由 5 個那堆拿 4 個，變成 0、1、1 則乙就輸定了。因為他必須（也只能）拿一個，留下最後一個等甲去拿。

「拈」的符號：

為了便於討論起見，在遊戲進行任一階段，三堆石子的數目，將用符號記作  $\{a, b, c\}$ ，其中  $a, b$  與  $c$  都為非負的整數，你當然已經注意到，符號  $\{a, b, c\}$  所表達的型態與  $a, b, c$  三個數字出現的順序無關。使用這種符號，上段中遊戲例子，就可以記錄如下：

$$\{2, 5, 6\}^{\text{甲}} \{0, 5, 6\}^{\text{乙}} \{0, 5, 1\}^{\text{甲}} \{0, 1, 1\}^{\text{乙}} \\ \{0, 0, 1\}^{\text{甲}} \{0, 0, 0\}$$

（《拈的遊戲》學習單 1）

## 2. 透過公開嘗試確認理解遊戲規則

理念閱讀之後，為了確認兒童對遊戲規則是否理解，張老師先在白板上運用小磁鐵片擺放三堆棋子，並請兩位兒童出來實際「玩遊戲」，這與第一單元用「提問」來確認理解的方式不同。遊戲結束，張老師詢問兒童「這場拈的遊戲是誰贏了」以及「這樣會不會玩」等問題，作為結束。

## 3. 各自進行遊戲

瞭解了遊戲規則之後，老師佈下  $\{3, 6, 7\}$  的棋局，要求兒童開始

兩兩對戰，實際嘗試這個遊戲。

老師發下一張「遊戲記錄紙」(《拈的遊戲》學習單 2、學習單 3) 並且解釋記錄是為了後續能夠自我檢討，且有助於找出怎樣才能常贏的規律，而兒童就是要在這兩張記錄紙上，利用前述的記錄方式做記錄。

## 二、發現原則與精緻化歷程

### 1. 發現致勝關鍵

經過了四輪拈的遊戲之後，張老師問大家有沒有找到什麼勝利的關鍵，〔正〕回答「一定要下到{0、1、1}才能把別人逼到死啊！」(觀-92.10.02-筆記)，一本介紹拈的遊戲的書上也這麼說{0、1、1}是拈的遊戲初學者一定會自己發現的關鍵(黃敏晃，民 81)。我利用記錄紙上的記錄訪談兒童，每個人都想要達到{0、1、1}的局面，我問〔杰〕他是怎麼做的，他說「就是把它用成一堆 0」(對〔杰〕-9210.07-筆記)，的確他的記錄紙上記錄的下法是，在第一次出手時，就會把其中一堆拿成 0，可是這樣的辦法沒有讓他獲得一次勝利，因為有一堆空了之後，取得優勢的是對手；獲得三次勝利的〔龍〕告訴我只要有一堆是 0 之後，就跟著對手下一樣的，最後一定會變成{0、1、1}(對〔龍〕-9210.07-筆記)，所以他的記錄紙上是這樣寫的「只要一格是 0，則其他只要弄成一樣的數，就能贏定」(《拈的遊戲》學習單 3-〔龍])，所以〔龍〕的作法是：等待對手塑造出「0」，他就會跟著下一樣的數，而他唯一輸的那一次，是因為他一直沒有等到對手下「0」，所以他就先去塑造，沒想到對手把握住關鍵，所以他就輸了；〔正〕和〔蓓〕也都只輸一次，他們也都發現了這個方法「把其中一堆用空，把其他兩堆用成一樣的數，就一定會贏了」(《拈的遊戲》學習單 3-〔正])，這就是他們找到的一個關鍵點。



## 2.發現的精緻化：從例子到原則

經過上次的嘗試，兒童似乎抓到了一些致勝的關鍵，但是又好像不是那麼肯定，於是老師帶領大家討論上一次的發現，我節錄一段言談如下：

龍：就是譬如說，這個是零個、沒有（指黑板上的第一個圈），那現在給我這樣（指白板上的第二個圈的四個磁鐵），那只要把它（指白板上第三個圈）做成跟這個（第二個圈）一樣，是四個，就會贏。【給例子】

T：只要把握原則就會贏，（對蒞）你還記得嗎？（蒞點頭）

T：所以龍說的就是說，你一直去想辦法把它下成說有一格是零，兩格一定要四嗎？【就例子來質疑】

龍：不一定

T：不一定

樂：要有兩個數字是一樣的！【以原則駁回例子】

T：要有兩個數字是一樣的不管大小嗎？【以數字大小來質疑原則】

樂：對

T：很大也可以嗎？！【以數字大小來質疑原則】

龍：可以

杰：（轉頭對龍小聲說）100？【提出例子來表達懷疑】

T：蒞你覺得呢？（蒞點頭）

T：（對蒞）100 可以嗎？剛剛杰說 100 可以嗎？【以例子來質疑原則】

龍：可以啊，只要旁邊那一個沒有

正：還是一樣啊，還是一樣可以啊！

（T上黑板寫 0、100、100）

正：還是可以啊！

龍：可以，可以

T：可以嗎？

樂：我覺得不一定。

T：不一定，有人說不一定，100 這麼大你怎麼敢確定？【以例子來質疑原則】

龍：只要下對就可以！【模糊的原則】

T：只要下對，那……有沒有人

正：再把它兩個變成一樣，再把它們兩個變一樣【模糊的原則具體化】

T：有沒有人可以跟我解釋一下什麼叫做「只要下對」？只要下對是什麼意思？【用模糊的原則來要求具體化解釋】

（龍、正舉手）

T：杰你來，今天都沒有聽到你的聲音，杰你覺得呢？

（龍將位置移到前面）

杰：我沒有覺得，老師你說什麼問題？

T：他說，老師說，你們一直跟我說只要下對，遇到，比如說遇到這樣，0、4、4，我下完變成 0、4、4，那你們說只要下對就不會輸，什麼叫做只要下對？採什麼原則才叫只要下對？【要求原則】

龍：比如說對方呢把那個紅的拿走一個，那你也要跟他拿走一個，就是跟他下一樣的。【以例子回應+原則的陳述】

T：我不能拿兩個嗎？【就例子來質疑】

正：那這樣穩輸的

T：穩輸嗎？

龍：這樣子如果對方再把那一個拿掉

杰：哪一個？

正：那你就輸了！

T：你們這一組完全同意嗎？

正：同意

龍：不同意的舉手（正轉頭看大家）

正：誰不同意？

T：可以試試看，我覺得直接在這上面動手作

正：(舉手，大聲說)我！

T：(對正)你不同意嗎？

正：同意啊！

龍：那幹嘛試？

T：(對杰)你同意嗎？

(正轉頭看杰)(杰點頭)

T：你也同意說只要我不要出錯，我跟著他下，一定要跟著下嗎？

樂：儘量下成兩個一樣的數字【模糊的原則】

龍：然後只要對方拿一，你也跟著拿一，對方拿二你也跟著拿二

T：(對蒨)你覺得呢？

T：贊成他們這種說法嗎？

正：我贊成！

T：(對蒨)一定要跟著對方嗎？

正：對！一定要跟著對方，剛剛做的，下的棋

蒨：應該是吧

龍：應該，不應該用應該

T：剛剛我們用 100 對不對？在做 100 以前，我們不要用到 100(拿  
白板上的磁鐵，在黑板佈題)

龍：到 10

T：這樣多少了

(大家幫忙算)

正：好了！

T：我們現在維持的是 { 10、10、0 } 的部分，那請問一下，我們  
先來預估……預估說……，嗯，這樣子的話跟你們剛剛說的狀  
況一樣嗎？現在 { 10、10、0 } 跟你們剛剛說 { 4、4、0 } 的狀  
況是一樣的嗎？【兩個例子的比較】

龍、正：一樣

龍：就等於說他拿掉六個，你也跟著拿六個

正：就變成 4、4 啦！可是又不一定他拿六【*兩個例子的比較*】

T：當然我不一定會拿六把它變成 { 4、4、0 } 啊【*以例子來質疑*】

龍：可是即使數字不一樣，這個規則還是一樣【*提出原則的意義*】

T：規則還是一樣，所以數學求的是規則一樣，所以我們現在找的就是規則。【*當學生提出原則的意義後，老師就把這個討論事件結束了！*】

這段言談老師在帶領兒童澄清與具體化他們的發現，而過程中幾乎都是「例子跟原則的交鋒」，我以底線標示出相關的語詞，並在後面用【*括弧斜體字*】寫下我的詮釋。通常在老師要求原則時，學生會以一個例子作為回應，似乎覺得例子就含括了原則，這時老師就會以這個例子來質疑學生對於原則的思考；面對用例子的質疑，學生又會回應到原則，這樣從特例演變成通則的歷程，我把它命名為「從例子到原則」。而這一段討論最後是在〔龍〕說「可是即使數字不一樣，這個規則還是一樣」後，老師肯定他的說法並表示「規則還是一樣，所以數學求的是規則一樣」做結束。

### 3.原則的檢驗

澄清發現之後，老師企圖帶領大家進行「檢驗」的工作。

#### 以 { 0、10、10 } 為例檢驗原則

張老師邀請了〔樂〕、〔蓓〕上台用磁鐵片操作 { 0、10、10 } 的棋局（如圖 4-2-4），檢驗是否把握「一個為零，另兩個一樣」的原則，就會獲勝。由於這個棋局原本就已經有一堆為「0」，所以後下的人，只要能把握跟著先下的人棋子數，就一定會獲勝，因此在還沒有開始之前，〔正〕就很篤定的說「誰先下？誰想輸就先下」。

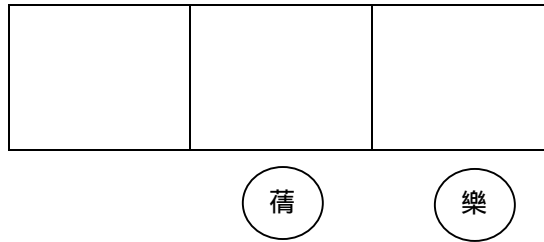


圖 4-2-4 [樂] 與 [蒞]{0、10、10} 下棋位置

大家都認為先下的是不好的，所以 [樂] 猜拳輸了，就被安排先下，競賽開始：

表 4-2-2 [樂] 與 [蒞] 第一次 {0、10、10} 下棋過程

樂與蒞在白板上操作	其他人的言談
{0、10、10}	
樂 → {0、10、8}	T：現在是拿走幾個？（沒人回應）
蒞 → {0、8、8}	龍：拿兩個 正：沒錯
樂 → {0、7、7}（樂拿完點算中間堆剩下幾個）	
蒞 → {0、7、7}	
樂 → {0、6、7}（本來兩人都只拿自己前面那堆棋子，這次樂伸手去拿中間的【蒞面前的】那一堆）	
蒞 → {0、6、5}（蒞也伸手去拿旁邊【樂面前的】那一堆）	正：咦？完了
樂 → {0、5、5} 蒞 → {0、5、4} 樂 → {0、4、4}	正：局勢改變了
蒞 → {0、3、4} 樂 → {0、3、3} 蒞 → {0、3、2}	
樂 → {0、2、2} 蒞 → {0、2、1} 樂 → {0、1、1}	
蒞 → {0、1、0} 樂 → {0、0、0} 樂獲勝！	

上面是 [樂] 和 [蒞] 檢驗原則的過程，原本大家根據原則判斷先拿的 [樂] 一定會輸，沒想到最後竟然勝利，[正] 表示，那是因為 [蒞]「拿

錯了！」所以才導致原則不管用了。這個例子引出一個拈的遊戲要尋求規律的一個「假設前提」，就是每一個人都要是很會下的人（在課堂上張老師稱之為「棋王」）因為這樣才有辦法預估勝敗。

於是，〔樂〕和〔蓓〕又重新下了一次棋，在兩個人都是「棋王」的前提下，這一次的檢驗，證明了原則的正確性。

### 以 { 0、100、100 } 為例檢驗原則

為了要證明較大的數也能符合原則，張老師佈了一個 { 0、100、100 } 的棋局請〔杰〕和〔正〕來下，因為 100 的數量太大了老師表示磁鐵片不夠操作，提示兒童必須用學過的紀錄方式來下棋。棋局結束後，老師問大家有沒有什麼想法，其實張老師想要引出的是即使數目字很大，原則仍然正確。但沒有想到兒童

一連串的對話都是討論：字會不會太潦草、為什麼數字中間不用逗點、字愈寫愈小、愈寫愈亂等，關於「書寫」的問題。張老師只好也為「書寫」方式做個結論，然後趕緊轉移到「數字很大原則仍然可行」的焦點上。我猜想，或許是因為從具體操作到符號操作的轉換階段，兒童關心著「符號」書寫的議題，而忽略了「檢驗」的任務。

### 4.再精緻化：更精簡的原則 { 0、n、n }

瞭解不管數字的大小，原則都不變之後，老師介入了一個數學符號「n」，用來代替自然數，不包含 0，從 1 開始的正整數，所以之前「一格為 0，兩位兩格數字相同」的原則，就可以更精簡的化為 { 0、n、n } 的符號了。

### 三、殘型與科學系統分析

#### 1.殘型的定義

有了原則之後，似乎在還沒有到最後拿光的局面，就可以先「預估」棋局的勝敗了，此時，張老師介入一張學習單，內容包括殘型定義的閱讀資料，以及兩個例題讓兒童判斷：

「殘型」的意義：

不管開始的時候，三堆石子的數目有多大，玩到最後，三堆的石子數量會開始變得很少，這時候三堆石子所成的型態，我們稱之為「殘型」。

當遊戲進行到某階段石子較少，而勝負已定的清楚局面，如果比賽的兩個人都具有相當的水準時，按照正確的走法則誰勝誰負都呈定局，所以拈的殘局可以分為必勝殘型和必敗殘型兩種。

當你佔有了必勝殘型後，如果在以後的幾步都按合乎的邏輯拿法，則不管對手如何拿，他都注定會失敗。反過來說，當你佔有必敗殘型後，如果你的對手以後的幾步都按合乎的邏輯的拿法，則你注定會失敗。

- 1.當你已經掌握 { 0、1、1 }，接著輪到對手，這是必勝殘局或者必敗殘局，為什麼？
- 2.當你已經掌握 { 1、1、1 }，接著輪到對手，這是必勝殘局或者必敗殘局，為什麼？

（《拈的遊戲》學習單 4）

這一段時間兒童自己閱讀理解並作答，老師則坐在教室後面的辦公桌上，等待學生完成。根據我的觀察，兒童大概只花了 4 分鐘的時間就完成了學習單的要求，然後他們開始竊竊私語的「閒聊」，聊到我所架設的這

台錄影機，有人表示他會操作，又有人談到這個牌子的攝影機品質如何；接著話題跳到原班發生的事，某某人又怎麼了；還聊到了資優班其他的課程，誰的功課還沒交，你上的選修課內容如何……就這樣聊了 13 分鐘，不過就是沒有談這張學習單的內容。繼續聊啊聊，愈來愈大聲，終於坐在後面的老師覺得不妥了，說了一句「不要談其他的事！」然後走到前面去，把互動方式從個人解題的型態拉到團體討論的互動型態。張老師先問「什麼叫做殘局？」，然後兒童陳述他們的理解，確認兒童都瞭解定義後，老師再問到兩題例題的答案

T：那第一局叫做？

A：必勝，因為\* \*（大家自己說自己的）

T>杰：第二局叫做？

杰：必敗，因為……

T：你們都同意嗎？

A：同意

兒童對於定義的理解和例題的判斷認知上沒有歧異，也沒有模糊需要澄清之處，所以這段從確認定義到對答案的公開討論只花了短短 2 分鐘就結束。

其實很多時候兒童在個人解題的期間都會出現竊竊私語交頭接耳的情形，但我之所以特別稱這一次的私語為「閒談」，是因為這段私語完全沒有討論學習單上的內容，也沒有湊著頭核對彼此解答的現象，跟其他時候的交頭接耳是不同的。這很有趣，或許是因為任務要求的閱讀理解以及判斷兩個數字極小的殘型，都是很容易的，所以自然沒有核對答案的需求了。



## 2.從「預估」到「科學系統分析」:

### {1、2、3}的科學系統分析(第一次)

老師再提出一個殘型 {1、2、3}, 這個殘型不符合之前找出的必勝原則, 所以兒童無法直接判斷勝敗了。老師請兒童先「預估」這個殘型的勝敗, 至於要怎麼預估, [正] 表示預估就是「想說之後會這樣子」, 他用不完整的語句稍微點出了如果要判斷勝敗, 就要去設想 {1、2、3} 之後會形成怎樣的局面。

這樣的說法, 為張老師接下來要介紹的「科學系統分析」開啟了一個前奏。因為要預先判斷勝敗, 就要先去想, 這個殘型出現後「對手」會怎麼下, 那「我」又要怎麼下, 最後會導致勝利或失敗, 然後再回頭說這個殘型是必勝還是必敗。可是對手的下法可能有很多種, 如果我只想了其中一種就下判斷是會有危險的, 所以張老師說「然後老師要教你們用一個科學化的方式去分析它, 就是說, 猜測與其我隨便下, 我們很怕是哪一個型我沒下到就造成是一個錯誤的推論。所以我們用科學化的方式來推論, 把它每一種, 對方下棋的方法都把它推論出來, 極盡每一種方式」。

要「極盡每一種方式」, 所以必須先列出所有對手可能的下法, 再一一判斷, 就不會有遺漏了。於是老師先請兒童輪流的說一個 {1、2、3} 之後對手可能的下法, 當想不出其他種下法後, 張老師結論: 所以 {1、2、3} 對手可能的下法總共有「六種」。

### 發現極盡的規律(第一次)

[龍] 在老師的「六種」話語一出, 立刻迫不及待的舉手說話

龍: 我發現它  $1+2+3=6$

T: 他說什麼?

A: 說  $1+2+3$  是 6

正：不知道，應該是湊巧

T：應該是湊巧？沒關係，等一下沒關係，老師會請你去觀察

老師用「等一下」暫且打住了這個發現。

### {1、2、3}的科學系統分析(第二次)

回到 {1、2、3} 的科學系統分析，在團體一起列出對手所有可能的下法後，老師發下每人一張學習單（《拈的遊戲》學習單 5），裡面也已列出了對手所有可能的下法，然後請兒童自己下一手棋，並做出勝敗的判斷，互動型態就從團體討論，轉到了個人解題，兒童開始寫學習單。個人解題的過程當中，也出現了竊竊私語、交頭接耳的情形，節錄如下：

龍：好了，寫好了（然後把學習單轉到背面）

（龍將身體轉向正）

正 > 龍：你算完了？

T > 樂：樂你是上次忘記帶聯絡簿

（藉抬頭看龍、正、樂的學習單）

（樂抬頭看正的學習單，龍在背面畫東西，樂看龍的行為笑了一下）

正：我寫完了（也把學習單翻到背面）

杰 > 正：你寫什麼？

正：下面要寫什麼結論？

杰 > 正：必勝或必敗？

（藉把正的學習單拿過去看）

（正搶回來）

杰 > 正：你寫了什麼啦？

正：我還要寫結論嗎？（翻過來寫）

龍：字寫得太醜了（擦掉）

(樂也在後面畫畫，拿給蒞看)

正：寫太大了(擦掉)

這一段自發性的互動，我看到兒童關心著任務，所以會互相核對或是詢問彼此的作法與結果，也有人關心字寫得好不好，也有完全與任務無關的畫畫行為出現。另外雖然只有短短的時間，我也看到兒童們互相的模仿學習，〔龍〕率先做了把學習單翻到背面的動作、畫畫、提到「字」的書寫問題，之後〔正〕〔樂〕也出現同樣的行為。

個人解題時間結束，老師詢問大家的結果，得到一致的答案「必勝」，這個分析任務就結束了。

事後，我拿到兒童的學習單，每個人的填答都相同，我加上說明後呈現如下：

表 4-2-3 {1、2、3} 科學系統分析

原始局面 (老師出的)	對手可能的下法 (老師給的)	我的下法 (兒童自己填寫)	判斷
{1、2、3}	{0、2、3}	{0、2、2}	我贏
	{1、1、3}	{1、1、0}	我贏
	{1、0、3}	{1、0、1}	我贏
	{1、2、2}	{0、2、2}	我贏
	{1、2、1}	{1、0、1}	我贏
	{1、2、0}	{1、1、0}	我贏

\* 判斷結果：{1、2、3} 是必勝殘型

由這個系統分析可知 {1、2、3} 的殘型不論對手接下來怎麼下，都會導致「我」的勝利，所以是「必勝殘型」。另外，從兒童在學習單上的填寫與判斷也可以發現，兒童已經將先前發現的 {0、n、n} 的必勝原則

熟練的應用，只要看到符合原則的型態如 {0、2、2} {1、0、1} 等，無須下到最後一顆棋子拿光，就能夠判斷勝敗了。

### {1、4、5} 的科學系統分析 (第一次)

老師又給了一個殘型 {1、4、5}，請兒童利用學習單的背面做科學系統分析（《拈的遊戲》記錄紙 2），這一次老師減少了支持，沒有事先列出對手可能的下法，所以兒童必須先找出所有對手可能的下法，然後再下一手棋，到最後下判斷，都要自己完成。

在開始之前，兒童提了兩個問題，包括「要寫在哪裡」〔正〕「紙要用橫的還是直的」〔龍〕，老師則以「沒意見」作為回應。這兩個問題都與分析方法無關，而是因為這一次，老師請兒童利用學習單的背面解題，也沒有像上一張一樣事先畫好格子，所以出現了這類型的提問。事後，我拿到這一張記錄，發現大部分的人都仿照了學習單的寫法，紙拿直寫且由上到下，只不過他們幾乎都省略了格子，只有〔樂〕還用尺畫上格子與學習單的版面最為相近，唯一一個將紙橫放書寫的，是提出這個「橫寫、直寫」問題的〔龍〕。

在兒童各自解題的時間，老師進行行間巡視，走到了〔正〕的旁邊，〔正〕對老師說「老師，好幾種耶」，老師走向〔龍〕……

### 發現極盡的規律 (第二次)

老師走到〔龍〕的旁邊，〔龍〕對老師說「ㄟ，老師，就跟我剛剛說的一樣……」老師以「噓！」示意叫他不要講，老師又繼續走向〔杰〕，〔龍〕站起來跟過去，然後走到老師的身邊，小聲的說：

龍>T:(小聲)我覺得這不是巧合

T：你覺得不是巧合你就要說明理由說服我  
（龍又回去了）

### {1、4、5}的科學系統分析（第二次）

上一段插曲，除了〔龍〕之外，似乎沒有人在意，仍繼續做{1、4、5}的分析，在分析的過程中，一樣有交頭接耳的情形，湊著頭或是站起來看看別人所寫的，也嘰嘰喳喳的說自己算出幾種必勝，這類討論課程內容的私語，張老師通常都不會制止，不過接著〔龍〕跟〔正〕玩起了「剪刀、石頭、布」的遊戲，於是老師就將個人解題時間結束，拉到了團體討論的型態，詢問兒童分析的結果，這一次大家的結果有些不一致，不過剛要繼續討論時，〔龍〕的發現終於改變了討論方向。

### 發現極盡的規律（第三次）

就在大家討論著{1、4、5}的殘型，對手有幾「種」下法是必勝時，〔龍〕順勢說：

龍：有一「種」不是巧合

T：有一種不是巧合？

龍：就是  $1+4+5=10$

龍：然後找到的剛好有十種

〔龍〕好像故意用「種」這個字來形容他的發現，讓討論可以順勢導向他企圖的方向。終於在這一次，老師暫停了原本的討論方向，探究〔龍〕所提的討論的話題。

於是，這個發現經歷了「質疑」的階段：

正：可是好像是巧合

也有幾次的「說明」：

- \* 龍：1 如果能拿的話只能把 1 拿掉，如果要拿的話把 1 拿掉，是 {0、4、5} 就是 1 的一種
- \* 龍：中間那個 4 可以改變成 {1、3、5} {1、2、5} {1、1、5} 跟 {1、0、5}

中間穿插著老師詢問大家是否聽懂的問題

漸漸已經有人「瞭解」了：

〔正〕也幫忙著解釋

正：{1、4、5} 拿掉 1 就變成 {1、3、5} {1、4、5} 也可以拿掉 2 就變成 {1、2、5} {1、4、5} 再拿掉 3 就變成 {1、1、5} {1、4、5} 再拿掉 4 就變成 {1、0、5}

大家也都「認同」了的這個發現。

而〔正〕插出另一個方向「十種的話你也不能說是哪十種啊？」，他質疑這個發現的功能不大，不過沒有延續。

接著，老師要大家應用〔龍〕發現的方法，算出 {2、4、8} 的殘型對手所有的下法會有幾種。當大家回答出「十四種」時，剛剛提出「功能」議題尚未解決的〔正〕，趁著這個時機，又再提出一次「你知道是十四種，可是你知道是哪十四種？」，終於在老師的「裁決」下這個議題進行討論，兒童開始應用排列組合的方式，先固定三堆棋子當中的兩堆，然後依序改變另外一堆棋子的數量，這樣就能夠有順序的毫無遺漏列出對方所有的解法。

討論結束後，張老師給了〔龍〕以及所有的兒童鼓勵，但仍以「這個題目目前不是我們目前要探討的問題」結束整段討論。

這一段過程中，我看到了當兒童有想要探究的議題時，會即時提出，但若在團體情勢無法配合的狀況下，他會願意等待，但在等待的過程中他仍繼續探究（就像〔龍〕利用{1、4、5}的例子更加確認發現），並且會把握時機和情勢將此議題推到公開討論的檯面上（例如〔龍〕的議題試了三次；而〔正〕的議題試了兩次）；不過在課堂中，老師似乎才是最主要的裁量者，控制著課程的進行順序、決定什麼任務可以出現、又什麼議題可以浮上討論的檯面。

### 每個人的十種都一樣嗎？

張老師再以{1、4、5}的局為例，問「我們找出十種對不對？你們確定你們找到的十種都一樣嗎？」問題一出，每個兒童都斬釘截鐵的表示一定是一樣的，就算張老師以懷疑的口氣再次詢問，兒童仍信心十足的表示「確定」，老師又再問了一次「那如果老師要你做……，你現在都覺得是一樣嘛，那老師要你們更仔細一點確定，組長請問你們這組怎麼確定這十種一樣？」《T》，然後企圖引導兒童以「互相核對」的方式來檢核確定。可是兒童在那次〔龍〕發起的任務中，已經知道{1、4、5}的棋局排列組合的方式就只有十種，每個人寫出來的十種當然會相同，所以跟老師說「可是能變的就只有這十種」〔龍〕。也許是在預定的教學順序下，張老師一時也沒有意識到這句話的意義，仍「堅持」互相核對，且要求兒童討論「核對的方法」。或許是師生的權力有差距，面對老師的要求，兒童自己卻覺得不需耗費力氣的行為時，他們的反應是「迅速」的拿著彼此的學習單交叉比對，眼睛一掃之後陸續發出「一樣」、「完全一樣」、「完全吻合」、「都一樣」……的話語，看似有點「配合」著完

成這個交辦任務。在兒童帶點敷衍意味的行動後，張老師未做延伸也沒有統整就停止這個議題，這有點不像她平常的教學習慣，我想，可能意識到兒童不熱衷這個議題吧。

我覺得這個現象十分有意思，雖然老師允許之前那場意外的討論發生，卻沒有意識到那個非在她預設順序的討論，已經將她預定最後才要呈現的議題以更接近數學專業的排列組合方式（而非她所預期的互相核對方式）討論過了。

### {1、4、5}的科學系統分析（第三次）

又回到了{1、4、5}這個殘型的科學系統分析任務，延續剛剛預備進入的團體討論階段，因為小組對於這個殘型的勝敗有不一致的結論，所以有人提出了他認為會導致失敗的下法，團體一同做判斷，節錄一小段討論：

樂：我覺得{1、4、2}那局會輸

龍：{1、4、2}可以改成{1、3、2}啊

正：真的耶

正：那全贏，全盤皆贏

龍：{1、2、3}不是跟{1、3、2}一樣嗎？

正：對啊，順序不一樣而已

這一小段討論中〔樂〕提出來會敗的局{1、4、2}，〔龍〕解釋只要下成{1、3、2}就會贏了，而整段討論中{1、4、3}這個局也被提出來，這個局也是下成{1、3、2}就會贏了；而小組成員沒有判斷誤差，多是像{0、4、5}這類可以下成{0、4、4}原則的棋局。我想或許是因為{1、2、3}的必勝殘型剛剛才學到的，所以有些兒童還未將其組織入他的經



驗基模中，所以無法快速的覺知應用。

這段討論還沒結束，不過〔龍〕跟〔正〕在上述節錄的文字中最後兩句話談到了三堆棋子擺放的順序，張老師抓住這一點，詢問兒童「順序不會影響嗎？」，於是又轉換到新的討論議題。

### 位置會不會影響？

老師問「順序不會影響嗎？」，大家立刻肯定的說「不會影響」，因為此時已打下課鐘，老師要兒童回去想一想。過了一個星期的上課，張老師預備討論 { 1、4、5 } 的殘型判斷，但〔龍〕急著說「老師你上次好像叫我們回去想 { 1、2、3 } 跟 { 3、1、2 } 的位置」，雖然沒有記錄，但這個議題還放在他心裡。

就在大家仍表示「兩者沒有不同」時，老師開始介入，帶領大家澄清這個「記錄符號」{ 1、2、3 } 與其所代表的「操作」時的三堆棋子的關係，並且在黑板上利用磁鐵片操作：

圖 4-2-5 { 1、2、3 } 棋局

這三堆棋子可以寫成 { 1、2、3 } 也可以寫成 { 3、1、2 }，因為這兩種寫法都是代表三堆棋子，其中一堆有一個棋子、另外一堆有兩個棋子、另外一堆有三個棋子，就像在第一章學習單介紹遊戲所說，三堆棋子沒有順序的關係。經過老師的提問確認，兒童都確實瞭解符號與操作物的對應關係。

接著下來老師把具體操作的棋子做了變動，拿掉中間那堆中的一顆棋子：

拿掉中間  
一顆變成

圖 4-2-6 示範 {1、2、3} 棋局取棋轉成記錄

然後老師再詢問兒童，變動後的棋局把它寫作「{1、1、3} 跟 {3、1、1} 是一樣的意思嗎？」，此時兒童就表示兩者是不一樣的。在故意製造出這樣的矛盾後，老師更突顯的將之兩兩相比，持續追問著：為何 {1、2、3} {3、1、2} 改變位置無所謂，而 {3、1、1} {1、1、3} 改變位置卻不可以。我摘錄兒童的回應：

- \* 菡：因為 {1、1、3} 就變成 3 拿掉二，但是 2 多了一個啊
- \* 樂：第二個就是要說減少，可是改變位置就不會減少
- \* 龍：第一個可以改變位置，可是第二個已經定下來就不行了
- \* 正：因為 {3、1、2} 到 {3、1、1} 和 {1、1、3} 不一樣

他們的理由都說出，因為第一次的寫法只是表示三堆棋子的數量，所以位置無所謂；而第二次的寫法是要顯示出如何改變，位置當然不能不同。

這一段討論還是協助兒童更澄清了「具體操作」轉換到「抽象符號」的對應關係。除此之外，我也看到了張老師在鷹架學生的思考時，會想辦法製造衝突的現象，讓兒童比較差異做區辨。

### {1、4、5}的科學系統分析(第四次)

又再次回到了{1、4、5}的科學系統分析這個任務，張老師或許忘了之前分析的進度了，所以企圖從「極盡對手所有可能的下法」開始，帶領兒童做完整的科學系統分析。此時〔正〕和〔龍〕都跟老師表示「不需要將對手所有的下法都列出來」，理由是「只要下有些人覺得是勝的有些人覺得是敗的」，只需提出小組中判斷不同的下法即可。老師認同這個方法，於是請兒童將判斷有歧異的幾個局寫在白板上，並請兩位兒童上台操作，最後判斷出{1、4、5}的殘型，無論對手的下法為何，都能勝利，所以為必勝殘型。

### {2、4、6}的科學系統分析

老師再發下一張學習單(《拈的遊戲》學習單6)，請兒童利用科學系統分析判斷{2、4、6}殘型的勝敗。

同樣先是各自解題的階段，過程中兒童一樣也竊竊私語、交頭接耳，或彼此對話或湊著身體看別人的，這時老師說了一句「不要討論」，老師的這一句話，停止了兒童之間的對談，但有趣的是「無聲的」身體移動現象沒有停止。

結束各自解題，老師帶領大家進行團體討論。依照科學系統分析的步驟，先要列出對手所有的下法，這一次老師請每一個人輪流到白板上寫出2-3個對手的下法。輪流的順序是依照座位的位置，所以大家都知道前一個人寫完後換誰上去，但老師仍在兒童上下台之間，穿插著「某某人寫完了，某某人換你」話語，偶爾也在兒童書寫時指示著「寫過來一點」、「接著那邊寫」等，也偶會重複著兒童的言談或行為，例如：〔龍〕對〔正〕的寫法提出問題時，老師也說「正，有人對你的寫法有疑問」；或是最後一個上台的

〔杰〕，先核對了大家所寫的之後，找出沒寫過的對手下法寫上時，老師說「杰找的了」。

當對手可能的下法都列出來之後，接下來，要判斷棋局的勝敗了，這個任務，老師請組長來主持，以下節錄一段言談：

龍：這幾個裡面你們認為必勝殘局是哪幾個？

（沒人回應）

正：全部

龍：那就是說沒有必敗殘局囉？

（沒人回應）

T：OK，那接下來組長怎麼做？

龍：那你們怎麼證明？

T：來，你們組長要你們證明

杰>T：要怎麼證明？

T：我不知道，你們可以問他（指組長），杰你可以舉手問他

（杰舉手）

杰>龍：要怎麼證明？

龍：就是你們可以上來寫你們寫的下一手棋

（杰上去寫）

T：有沒有人你下的第一手棋就已經定勝負了？

正：有啊

（正舉手，立刻站起來）

（蒞好像也有，站起來也想走到前面，也想跟老師說）

T>蒞：不要跟我講，你們組長……

T>蒞：蒞，你要上去寫？我們有好幾枝筆啊

（樂也上去寫了）

T：最好你們打一個箭號，才不會東西通通混在一起

從這個例子也可以看到，即使是「組長主持」的時間，老師仍然幫忙決定方法、重述兒童言談與行為；但不同的是，因為這是「組長主持」的時間，所以當有兒童跟老師說話時會提醒他應該「跟組長說」。

我發現，整個「科學系統分析」的任務（排除掉中間轉移的任務），從{1、2、3}到{1、4、5}，再到{2、4、6}的殘型，張老師所設計的教學方式是從最多協助開始，然後漸漸減少協助。先給足所有對手可能的下法，兒童只需要寫出下一手棋並做判斷；然後讓從窮盡對方的解法到判斷出勝敗都由兒童自己完成；最後甚至連公開討論的主持，都讓兒童來帶領。

#### 四、推論規律

##### 1.從{1、2、3}和{1、4、5}推論規律

掌握了更多的必勝殘型後，老師企圖引導兒童尋求規律，因為不是每次的題目都恰巧是經驗過、判斷過的型態，就像〔正〕說的「要是題目都不是這一些的話，還是有可能會輸啊！」。引出了尋求規律的重要性之後，接著張老師提示兒童，之前得出{0、n、n}的規律，也是累積多個棋局後所做的推論。

##### 個別棋局的推論

老師提示的話才一完〔龍〕就舉手說話：

龍：2跟3嘛，不是都是，{1、4、5}，2跟4都差2，3跟5也差

T：嗯

龍：那代表 {1、6、7} 也是必勝

正：試試看啊

〔龍〕立刻就從 {1、2、3} 和 {1、4、5} 這兩個殘型的關係，推論出一個新的殘型 {1、6、7}，他猜測這個殘型也為必勝型，而〔正〕也立刻表示要進行檢驗，於是接下來就該利用科學系統分析判斷勝敗了。於是，兒童開始討論，老師則是在白板上將兒童的下法寫下來，我節錄一段討論時的言談：

正：就是把 {1、6、7} 變成 {0、6、7}

龍：不行 {0、6、7} 我 {0、6、6} 就會輸

正：第一個是對手下啊！

龍：再該我 {0、6、6}

正：對啊，那我們就贏了

龍：所以這種局面不用再多考慮

T：然後呢？

杰：然後 {1、5、7}

T：{1、5、7} 還要怎麼樣？

杰：{1、4、5}

正：{1、4、5} 對！

龍：{1、5、4} 啦！

正：贏了！

正：{1、4、7}

龍：{1、4、7} 不用討論，因為 {1、4、5}

正：對啊！

正：{1、4、6}

龍：{1、3、6}

正：等一下 {1、3、7} 才對  
 （杰趴下來）  
 龍：{1、3、2} 就可以了  
 正：對啊 {1、2、3}  
 正：{1、2、7}  
 正：就變 {1、2、3}  
 正：{1、1、7}  
 //龍：{1、1、0}  
 //正：就變 {1、1、0}  
 正：{1、0、7}  
 正：根本不用討論  
 龍：{1、0、7} 不用討論  
 T：{1、0、7} 為什麼不用討論？  
 //杰：（頭抬起來）就 {1、0、1} 嘛  
 （以下省略一大段）  
 \* \* \* \* \*  
 （一直討論到最後，把十三種對手可能的下法都討論完畢）  
 //正：穩贏了  
 //龍：這樣子就沒有了  
 T：所以呢？  
 正：所以是必～勝

從這一段言談來看，除了前三句是〔正〕和〔龍〕在澄清下棋雙方的次序外，其餘都是有人先提出一個下法，然後有人再提出一手棋做判斷。這樣的討論順序與之前由老師所帶領的討論不盡相同，老師帶領的討論都是先(1)列出所有下法，(2)然後依序一個一個判斷；而兒童的討論是「提出一個下法後就立刻做判斷」，將兩者合併，省去了一道功夫，不過他們下法提出的順序，仍是依排列組合的方法。

我在上述言談中，標「 $\square$ 」代表提出一個可能下法，標「 $\square$ 」則是判斷出勝敗。整段言談，我看到從 $\square$ 到 $\square$ 的話語間隔愈來愈少，代表兒童判斷的速度愈來愈快，甚至到最後，提出一個下法後，根本無須提下一手棋，就直接判斷了。

接下來，我注意到老師的介入，這段討論中老師的介入相當少，一直到整段討論結束也只有七次，其中一次是在我節錄中有出現的「詢問為何可以判斷的理由」，一次是誇讚兒童「速度愈來愈快」，其他五次都是如「然後呢？」「還有呢？」等話語。

最後我在看到兒童的參與，討論中「發出聲音」的大部分是〔龍〕跟〔正〕，而〔杰〕和〔樂〕也各有提一兩種下法，或是提出一兩次判斷，還有幾次〔菡〕和〔樂〕也同時小聲的說。表面上，似乎全心參與的只有〔龍〕跟〔正〕，但我想，除了這兩人之外，其他三位兒童應該也有思考，只是未出聲音而已，因為〔杰〕能在老師詢問理由時做回答；〔杰〕和〔樂〕所提出的對手下法，也都依照著排列組合的順序；〔樂〕和〔菡〕的小聲說話，也都是跟上的。

最後，整段討論就在〔正〕裁決「必勝」後結束。

### 不需要用科學系統分析的判斷方法

殘型 {1、6、7} 的討論結束後，〔龍〕又提出了一個新推論，「{1、8、9} 也是啊！」，老師把白板上的討論過程擦掉，只留下已經必勝的三個局，且將新提出的 {1、8、9} 寫上去：

{1、2、3}
{1、4、5}
<u>{1、6、7}</u>
{1、8、9}

圖 4-2-7 白板上所呈現個別棋局推論的書寫



新推論提出後，依慣例應該是進行科學系統分析判斷勝敗的時候了，  
在老師要求進行分析時，〔龍〕提出了一個新想法：

龍：(龍舉手)老師等一下，我發現一點

T：好，你說

龍：你看嘛.....

T：{1、8、7}？

龍：{1、8、9}

龍：那個 234567 剛剛好

正：(看著白板) 2、4、6、8

龍：你只要其中無論下到 234567 其中一個數，變成這些，如果是  
1 也可以

正：老師.....

T：什麼？什麼？什麼？你們聽得懂他(龍)說的嗎？

樂：(舉手)老師我知道我知道

T：好，你來

樂：(樂上台指)就是說{1、8、9}因為我們前面這些都可以了，  
所以{1、8、9}只要下到{1、6、7}一定贏、{1、4、5}一定  
贏、{1、2、3}一定贏。

T：喔

〔龍〕累積了多個必勝殘型後發現它們之間的關係，因為{1、8、9}  
這個殘型，無論對手怎麼下，都會落入之前的{1、2、3}{1、4、5}{1、  
6、7}的殘型內，舉例來說，如果對手拿掉第三堆中的兩個，變成{1、8、  
7}，那我就下成{1、6、7}，若對手拿掉第二堆中的三個變成{1、5、9}  
我就下成{1、4、5}。因為{1、8、9}這一局最大的數是9，所以無論怎

麼下，都不脫 1、2、3、4、5、6、7 其中一個數（龍在第六句話所說的「234567 剛剛好」還有後來補充的「1 也可以」就是這個意思）有了這樣的發現之後，根本無須作科學系統分析，就可以判斷勝敗了。但是老師似乎對這樣的說法還不太瞭解，所以不斷的換人解釋，跟老師做說明，最後老師認同了他們的作法。

### 原則性的推論

上述那段言談中，〔正〕有兩次的說話被打斷，於是討論結束之後他又立即舉手提出「還有好像第二排都是 2 的倍數嘛，下去那要怎麼推論，就是 2468 『10』啊，然後 10 『11』」，原來〔正〕剛剛看著白板的書寫口中念的 2、4、6、8 是這個意思，或許因為白板上的書寫方式，讓他產生這樣的發現，所以他以「排」稱呼每個棋局中的第二堆；之後〔正〕又提到第三排是「1、3、5、7」，而〔杰〕更統整的告訴他那就是「奇數」，另外，第一排都是「1」〔正〕老師在白板上寫下「推論（一）」並將剛剛的說法在數字下頭標上（圖 4-2-）因為這一個觸媒，從此就不再是「單一棋局」的分析，「原則性推論」的討論就開始了。

推論（一）	{ 1、2、3 }
	{ 1、4、5 }
	<u>{ 1、6、7 }</u>
	{ 1、8、9 }
	1 2 奇 的 數 倍 數 數

圖 4-2-8 白板上所呈現原則性推論的書寫

接下來，展開一段討論：

(龍舉手)

T：來，第二個推論，有人提出第二個推論

杰：(指龍)老師他有問題

T：來(請龍說)

龍：第一排是 1 沒錯

T：第一排是 1 (寫白板)

龍：如果第二排呢是  $n$  的話

T： $n$  (寫白板)

龍：然後第三排的數就是  $n+1$

T：比如說什麼呢？

龍： $\{1, 2, 3\}$

T：比如說  $\{1, 2, 3\}$  (寫白板)

樂：喔~~我懂了

龍：第一排就是 1，二的话就是，第二個就是 2，第三個就是  $2+1$

正：那這樣還不是  $\{1, 2, 3\}$ ？還不是一樣

T：你這樣還是  $\{1, 2, 3\}$  啊？

龍：就是說這樣啊

正：根本就沒有改變

樂：老師我懂了

(T 做手勢請樂說)

樂：他的意思是說，他舉個例子來說，是  $\{1, 2, 3\}$ ，他把它講一次第一個是 1，第二個是 2 的倍數沒有錯，第三個就是  $2+3$

龍： $2+1$

樂：對不起  $2+1$

正：喔~~2 的倍數然後加 1

正：第二個比如說.....

T：2 的倍數加 1 嗎？沒有啊？

正：比如說是 18 嘛，那旁邊那個就是 19

T：等一下喔，這兩個地方……

正：(小聲) 噢~~等一下喔

T：你們要先去澄清一點，這兩個地方，你們要先澄清一點，你們這兩個推論一樣嗎？

正：不一樣

T：不同點在什麼請你們討論一下，這兩個推論，你的  $n$  代表什麼  
(正：無限) 要不要先定義？

龍：未知數

T：任何未知數？

蔣：(小聲) 可以被 2 除的

正：500

龍：只要 2 的倍數

T： $n$  你下的是只要 2 的倍數

正：那呢？

樂： $n+1$ ……

T： $n$  在數學符號裡使用，上次老師跟你們解釋過， $n$  代表什麼？……自然數喔，OK，因為你們現在沒學到這裡，所以你假設  $n$  為 2 的倍數我接受，一般如果你到了跟人家溝通數學，共通語言的時候，當你提到  $n$  我們就會說什麼？

正：自然數

T：自然數，從 1 到無限大的正整數，這是我們上次有講過的

T：所以剛剛老師一直在問說，你這個  $n$  代表什麼，當你下一個這麼大的未知數的定義的時候，你一定要說清楚  $n$  代表什麼意義，你一定要賦予它說明，所以當我在說的時候，我們會說這裡叫做  $2n$ ，為什麼？

龍：就是 2 的倍數

T： $n$  是從 1 到無限大 (正：到無限大) 的正整數，我這裡的  $n$  乘以 2 就變成 2 的倍數，對不對？

正：喔~~~

T：所以我這裡會變成什麼？

龍： $2n+1$

正：2 的倍數然後.....

T： $2n+1$ ，OK

這段討論，將開始〔正〕所提出的「原則性的推論」更精緻化了，先是〔龍〕提出以符號「 $n$ 、 $n+1$ 」表示，然後〔樂〕將這個數學符號，與〔正〕的推論再結合一次，接著老師告訴兒童，數學溝通符號約定成俗的定義與用法。凝聚大家的力量，所完成的必勝原則推論就是  $\{1, 2n, 2n+1\}$ ，兒童將這個推論記錄在學習單上。

## 2.與他組同學玩「拈的遊戲」

利用一次的團體課時間，張老師準備許多題型，讓不同時間上課的各小組競賽。每一輪，一組派出一個代表，進行抽題競賽，然後記錄各組的輸贏，獲勝次數最多的組別為冠軍。

## 3.繼續尋求規律：不斷的歸納與演繹、發現與檢驗

這個單元，到了中後期就變得不是那麼線性的在進行，由兒童所發起的任務愈來愈多，且任務間的轉換或合併愈來愈快，愈來愈跳躍，我無法很線性的來呈現它，所以統稱它做「不斷的歸納與演繹、發現與檢驗」，就像下面我所舉的例子：

前次與別組的競賽，這一小組輸在對手  $\{2, 4, 6\}$  的棋局，他們開始對  $\{2, 4, 6\}$  這個殘型進行分析，的確是必勝的殘型（其實之前就已經分析過  $\{2, 4, 6\}$  的殘型了，不過兒童好像不記得，所以會因為這一局而輸，而且又重複進行一次分析）。這個殘型開啟了一段老師幾乎沒有

介入的豐富討論，我在這裡節錄一小段，較完整的過程還有我的初步詮釋放在《附錄 3》中：

龍：{2、4、6}的話，既然{2、4、6}是，那{3、5、7}是不是？

T：有人問我？{2、4、6}是必勝的局那{3、5、7}是不是？  
我不知道，你不要問我，這要靠你們去做

樂：(小聲對龍)奇數偶數

T：為什麼你會去提{3、5、7}你要不要寫起來(龍上台準備寫)，  
為什麼你會從{2、4、6}你會想到{3、5、7}是什麼樣的理由？

正：因為它，三個都奇數，三個都偶數

T：三個都奇數，三個都偶數

正：{2、4、6}然後{3、5、7}，「1、3、5、7」啊！  
(杰本來趴著把頭抬起來)

(龍上台寫下： $\{2(+2), 4(+2), 6(+2)\}, \{3(+2), 5(+2), 7(+2)\}$ )

(正轉頭看黑板)

龍：那2到4是加2=

樂：(小聲)對啦！對啦！

=到6也是加2；(正走上台)那3到5也是加2，5到7也是

正：(對龍)那下下看就好啦，下下看會不會是必勝  
(隨即拿起筆準備與龍下)

正：換你(正寫下{3、5、7})

龍：(對正)應該是該你，我弄成這個局面然後該你【意思是{3、5、7}是龍設的，所以正應該下下一步】

【正寫下{3、4、7}龍在接續下，整個過程在白版上呈現如下：

龍 {3、5、7} 正 {3、4、7} 龍 {3、4、5} 正 {1、4、5}

龍：{3、4、5} 不行的話.....寫錯了

正：(笑)

龍：就只剩 {3、4、6} 了 (龍寫上 {3、4、6})

蒨：(小聲){2、4、6}

(正寫下 {2、4、6})

【整個過程在白板上呈現如下：**龍 {3、5、7} 正 {3、4、7}**

**龍 {3、4、6} 正 {2、4、6}**】

龍：那這個也不行

正、蒨：(笑)

正：那把前面這兩個改掉就好啦【意即剛剛龍都沒有改 3、4，只改第三個數字，現在嘗試改前兩個數字的下法】！可是這樣的話，那就必敗了啊

蒨：那就必敗了啊

龍：{2、4、7} 的話.....

正：等一下，這是必輸的【指 {3、5、7}】，那這是必勝的 {3、4、7}

龍：這個應該是必勝【指 {3、4、7}】

正：可是為什麼 {3、4、7} 會是必勝？你下下看

T：他現在好像推翻，你認為不是 {3、5、7} 是必勝而是 {3、4、7} 是必勝是不是？

龍：不是，那如果這個不行的話，那這個是奇數【指 {3、5、7}】，這個是偶數【指 {2、4、6}】，既然奇數不行的話，我再試一個偶數的

(龍在黑板上寫 {4、6、8})

//正：(跟著龍所寫的唸出來){4、6、8}

正：好，來吧！

蒨：{2、4、6} 為什麼變成 {4、6、8}？

龍：這樣子都是差 2，既然奇數的不行就用偶數的來試看看

樂：奇數必敗

由這個例子可以看到學生能夠主動的對發現進行檢驗；利用確認的必勝殘局數字間的關係作為推論另一個必勝殘局的基礎；也會從一個必敗殘局下棋的過程中，找到中間對手致勝的局，作為必勝的判斷；會因為反例縮減原本較大的推論範圍；會找出許多例子的共同規則形成適用性更廣的推論；會主動的提出實例和反例來確認發現……，但是這個討論的進行方式並不是線性「發現 澄清或質疑 檢驗」，而是可能發現之後跳過澄清階段直接進行檢驗；也可能是發現之後尚未檢驗，另一個發現又出現，然後新發現可能先經過檢驗，才又回頭檢驗舊發現。

## 五、單元結束與回顧

### 1.這個單元的結束：

這個單元的結束方式也很有趣，老師詢問兒童想不想繼續推演。

\* 一開始，是這樣的情形：

龍：老師，要繼續推下去

杰：我不想推耶

正：我想繼續【新】單元

樂：我也是

杰：繼續【新】單元、繼續【新】單元

T：怎麼樣？你們不想繼續……把它推了……

禧、正、杰：不要，不要

龍：你們都不推了喔？

除了〔龍〕之外，其他兒童都不想繼續推演下去，對話內容都是在表明自己的立場。



\*〔樂〕想到一個做決定的辦法，她提議要先聽聽看下個單元的內容是什麼：

樂：老師，下禮拜是什麼？下禮拜是什麼？

龍：老師，我們先看我們喜不喜歡

正：( 搗住耳朵 ) 不要~~~

龍：老師你先介紹

正：上新的，新的單元

樂：新的單元是什麼東西？

〔正〕搗住耳朵，表明他即使不知道下個單元的內容他還是要上新單元，〔樂〕後來則表示她又想上拈的遊戲，也想進新的單元，不知如何選擇。不過，這個先知道單元再決定的提議被張老師否決了。

\*〔龍〕想了一個妥協的辦法：

龍：老師，我有辦法，一堂課上新單元一堂課上拈的……

杰：太浪費時間

\*〔龍〕又想到一個各取所需的雙贏辦法：

龍：那讓他們四個去跟 E 組上，我去跟另外三個上

樂：ㄟ

正：好啊，好啊

杰：好，老師這是個好主意

菻：讓他換好了

正：老師他拋棄我們，我們也拋棄他了

菻：他組長耶

他決定拆組，把這組的人合併到另外一個組別，而他自己跟別組也想繼續推演的同學再組成新的一組。不過老師也不答應這樣拆組的提議，但她告訴大家，如果誰有興趣，可以自己一個人利用額外的時間來做，不過小組還是要有共同的決議。

\* 這個時候〔正〕提高音量大聲的說：「 龍，四比一，你-認-輸-」

\* 不過事情好像又有轉圜的餘地：

正：老師，除非他說理論【意即理由】說服我們

正> 龍：你說！你說服我們（笑）

T：那給你們，給你們五分鐘作個決定，那張老師尊重你們，這樣好不好？

於是，接下來的時間，〔龍〕就說了好幾個應該繼續上下去的理由，包括：現在放棄是前功盡棄、新單元可能不好玩等。並且他也要求不願意繼續推演的人要說出理由，所以其他人也說出：手很酸、若不上新單元會追不上其他組等，就這樣討論了很久。

討論中間有一段有趣的過程是：

正：來啊（提高語調）說服我們啊！趕快說服啊，說服我們這個，我們就繼續上啊，只要說服兩個就好啦！趕快「ㄝ×ㄟ」吧

（樂笑）

樂：睡覺（趴下來作勢要睡覺）

正：睡覺吧，睡覺，快點睡

（樂、蔣、正、杰都趴下，做睡覺狀）

最後還是決定不繼續推演要進入新單元了，我大致能理解為什麼多數兒童選擇不再繼續，因為一直思考的過程的確蠻累人的，而且這個單元已經進行了兩個月，顯得有點疲乏了。

張老師用這樣的方式結束，將課程決定的權力，釋放一部份給了兒童；而且或許也讓兒童感覺到，拈的「規律」是還有繼續探究的空間的，所以現在所獲得的知識可能只是暫時的，若發現更多的例子後還有可能再歸納出新的推論或是推翻現在的推論。

另外，在這一段討論的過程中，兒童所表現的不是固執的堅持己見，而是保有解決問題的彈性，也產生很多變通的辦法，以及理性的進行溝通協調，且整個過程中維持著高度的幽默及愉快的氣氛。我不知道這是不是就能稱做心智習性，但至少我看到兒童除了對於知識內容的思考外，也將思考方法應用在做決定與解決問題上。

## 2.回顧：學生對課程的後設觀點

同樣的，我也是呈現及歸納學生的單元日誌：

### 〔樂〕的單元日誌

我覺得這個遊戲很好，這個單元的四大重要部分是這些：

- 1.科學系統分析：這是在於判斷對手可能下的每一步棋所做的判定，如果全都對，就沒錯，但如果不完全是就一定要再修改。
- 2.如何形成推論：先找一個必勝的目標，然後去討論它，再記錄並找出反證。
- 3.拈的遊戲這個遊戲就是不但玩，而且要用 { , , } 的符號把它記錄下來
- 4.書面記錄就是要把拈的遊戲討論、修改的過程記錄下來並標示，還要能讓沒有參與討論的人能看懂。

單元日誌歸納：

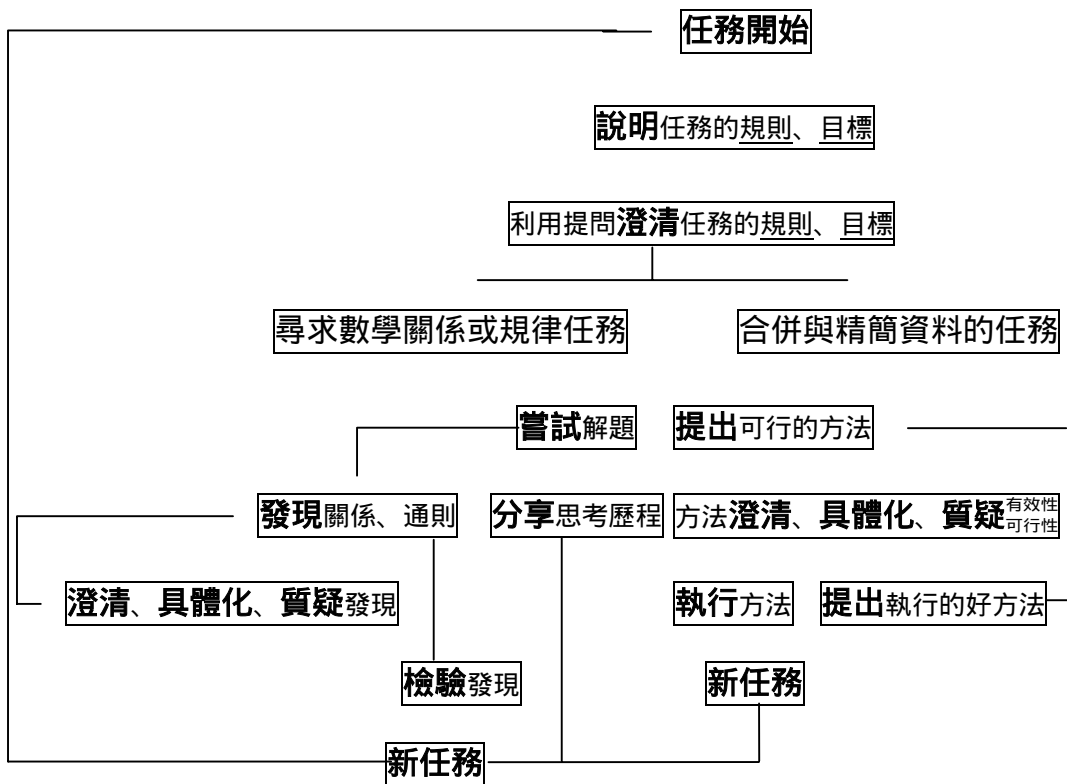
表 4-2-4 《拈的遊戲》單元日誌歸納表

感受	<p>非常有趣可是有一點累（正）</p> <p>拈的遊戲很好玩（杰）</p> <p>只要能找到規律，則成為「拈」的棋王就不是一個遙遙可及的夢想了（龍）</p> <p>我覺得這個遊戲很好（樂）</p>
區辨必勝局和必敗局。	<p>調查哪一手棋可以反敗為勝，哪一手棋可以必勝（正）</p> <p>什麼是必勝殘局什麼是必敗殘局（蒨）</p>
形成必勝局,推論的方法	<p>把對手必勝的棋來當作我們這一組參考，然後分析為什麼必勝。（正）</p> <p>先找一個必勝的目標，然後去討論它，再記錄並找出反証（樂）</p> <p>形成推論必須先分析下一手棋，先把不可能的去掉，再把可行的棋一一試著，確定無誤後就可以成立。Ps.推論是從兩個以上的必勝殘局中取得共通點。（龍）</p> <p>要怎樣才能贏（蒨）看一個局下的過程在討論每一步棋。（蒨）</p> <p>我們還有給兩個人下，然後我們討論他們哪裡下錯，要怎樣下才會贏。（杰）</p>

小結：

### 課堂進行方式

縱覽整學期的課堂進行跨時間的加以歸納，可以看出整個課程的進行方式（可參《附錄 2：課堂大事記》的最右欄，我將上課大事簡化成「進行方式」的概念呈現）。這個數學課堂的進行是以任務作為憑藉，由參與的老師與學生共同建構而成，而所謂的任務，除了該數學遊戲的內涵大部分所指的都是老師引導的方向。我先以下圖呈現這個數學課堂上典型的課堂進行方式，再以文字說明：



註：寫在同一欄位者，意即可能是單一個發生，或交集的兩個、或是三個同時發生。

圖 4-2-9 典型的課堂進行

在每個任務一開始的時候，張老師會先「說明」，可能說明規則、也可能說明目標；然後參與者會藉由提問來「澄清」這個規則或目標。而這個課堂上的任務大致可以分為兩種類型，第一種類型是「尋求數學關係或規律的任務」；另一種是「合併、精簡資料的任務」。

在第一種「尋求數學關係或規律的任務」說明與澄清結束後，就會開始各自「嘗試」的階段；嘗試結束，老師便會要求兒童「分享思考的歷程」。在這段過程中，或許就會有兒童「發現」了數學上的關係或通則。發現的時機可能是在嘗試的過程中；或者是在分享的階段，透過別人分享的啟發或是因為自己必須思考如何表達而再思，而產生發現。不過若是在嘗試或分享過程中都沒有兒童發現數學的關係或定理，那麼老師便讓這個任務就會在這裡結束，換到下一個新任務。若是在嘗試或分享的階段有人發現數學的關係或規律，那所提出的發現，就會接受老師或同儕利用提問來「澄清」而將發現更「具體化」，也有可能受到老師或同儕的「質疑」那麼提出發現的人就必須再次解釋或提出證據或是修正他的說法。在澄清、質疑與具體化之後，就會進行「檢驗」的工作。在檢驗的過程中，也有可能產生新的「發現」，這時該發現又會經歷前述澄清、具體化或質疑的歷程。檢驗完畢之後，老師就會開啟另一個新的任務，這個新任務有可能以之前的發現作為基礎的延伸任務，當然也有可能是一個與前面討論比較無關而是老師事先設定的任務。任務下達，就又開始進入歷程中。

另一種出現在這個課堂中的任務類型目的是「合併、精簡(小組中各成員或較零散無結構)的資料時」這種性質的任務在經歷「說明」與「澄清」的階段後，進行的方式就與前述的任務不同，為了能夠達成合併或精簡資料的任務，兒童便會在老師的要求下或是自發性的思考有效的方法，於是就會有兒童提出「可行的方法」。接著這個方法也會被老師或同儕的提問而「澄清」並且「具體化」，當然也有可能有人「質疑」這個方法的可行

性及有效性。澄清或質疑的過程，也許有人就在討論的過程中思考出新方法，那麼這個新方法也會進入討論的歷程中。方法經歷了澄清質疑與具體化的階段後，老師便會帶領兒童進行一個簡單的「確認同意」或是「進行選擇」的過程，決定所採用的方法。方法決定之後，小組成員便開始「執行」合併與精簡資料的任務。在執行任務的過程中，也會有人思考出更有效率的方法，那麼這個方法也會經歷前述的階段。

### 第三節 資優兒童的思考

在上一節中我依據時間順序來敘述，以展現兒童在課堂中的思考流動，在這個部分，我想進一步概念化資優兒童思考的特徵，於是把焦點放在兒童，依著數學探究的脈絡追蹤資優兒童的思考。

在這個數學探究的課堂，從任務出場之後，資優兒童的思考就會一直纏繞著任務。而在這個課堂上主要的任務來自於老師的要求完成的目標以及老師進行的引導，因此在討論資優兒童在任務下的思考之前，我先將情境中主要的任務來源-老師的要求與引導，做簡要的呈現。

#### 老師的任務引導

這個課堂進行的整體圖象是由老師與學生互動所構成的。在《附錄 2：課堂大事記》最右欄，我將啟動改變進而影響課堂進行的人標示出來，可以看到大部分啟動改變影響課堂進行方向的人是老師，這個改變即為老師的任務引導。接下來我進一步的歸納課堂中張老師的任務引導的型態。

在這個數學課堂，張老師企圖營造的是一個由數學符號與規則所構成的意義世界，而在這個世界中是以語言溝通為主要的習得、創造與傳遞意義的媒介。

首先談到老師利用數學符號與規則構成了怎樣的意義世界？張老師選擇了兩個她認為屬於「純數學」的單元，相較於一般強調與生活作連結或是應用性的數學，這門數學課的確是較為單純，探究的焦點在尋求數學關係與規律。

《數字推理》單元，擺放出符合兩維數字的花片即定義為成功。所以兒童必須同時關心兩維數字以及花片擺放的數量，再透過解題者與出題者



角色的轉換，進而發現遊戲中數量的關係；《拈的遊戲》單元，呈現三堆棋子，兩人分別拿取，拿到最後一顆棋子的人則定義為獲勝。於是為了求勝，必須尋求必勝的規律。兒童在過程中，先從遊戲的經驗中發現必勝的個別棋局，累積多個必勝的個別棋局後，經由歸納找出更上一層的必勝規律，再累積多個必勝規律後，又歸納成更上一層的規律，不斷層疊。所以整個課堂進行的歷程，就是根據事實、發現關係、形成假設、進行檢驗、得到新事實的不斷循環歷程。

這兩個由數學符號所構成的意義世界，張老師皆稱之為「數學遊戲」，既然以遊戲的面貌呈現，自然也隱含著有秩序規準及玩樂挑戰意味的性質。張老師的教學引導就是不斷在規則限制與開放玩樂挑戰的空間中拿捏，畫出每個任務的任務空間讓兒童去搜尋。例如，在《數字推理》單元中，主要的規則在於花片同時符合兩維數字的要求，在符合這個主要規則的大架構下，張老師的任務引導包括，限制兩維數字相同，開放尋求更多的解法；限制兩維數字，開放設計條件；限制一維數字，開放設計另一維數字等。因為有所限制，又必須完成任務，於是思考便有了挑戰。

除了在大架構下調整問題空間除了是增加思考的挑戰外，課程還有一個終極的目標，是希望兒童透過在任務空間中不斷的搜尋，能夠發現這個由數學符號構成的世界裡所隱含包含更廣的規律，例如在《數字推理》單元中，透過每次成功擺放的觀察，進而發現兩維數字之和相等；在《拈的遊戲》單元中則是透過每個個別必勝棋局的歸納，找出必勝的原則，再透過每個個別必勝原則的歸納，找出必勝的定理。所以整個課堂中老師的任務引導，就是佈下多個遊戲中的個別例子，誘導兒童觀察每個例子之間的關係，進行歸納發現可能的原則與規律，這個發現稱作假設，還必須透過檢驗的歷程才能確認，於是張老師便會引導兒童演繹出更多符應假設（原則）的單一事件（例子），並且測試其是否能得到正確的結果。

若將這樣的任務引導轉換到兒童的學習。這兩個與生活經驗較無相關的抽象數學意義世界，有其既定的規則與使用的符號，沒有日常生活經驗為思考提供有意義的脈絡，所以兒童必須習得這個世界中的規則；然後將所有的符號依據這個世界定義的規則予以意義化；而最主要的活動，就是利用這些有意義的符號在任務空間中搜尋，進行發現關係、形成假設與檢驗假設的探究活動。這就是老師所營造的是由數學符號與規則所構成的意義世界。

在這個意義世界中，主要用來操弄的符號是語言。這樣的設計來自於張老師的理念，希望能夠讓許多高能力同儕的「互相激盪」，而且也希望在必須溝通的要求下，兒童能夠有更多的「後設澄清與辯證」(訪-〔師〕-92.10.14-錄音)。要能促成溝通，首先個人內在的想法必須先以語言形式呈現於外，所以在課堂中老師會要求兒童將想法說出來，於是課堂上出現解題後的分享以及理解時的表達等言談活動；而產生溝通對話的另一個前提，是對於語言符號意義的共識，於是課堂上提問澄清與互相詮釋的言談活動。當話語出現且對於話語的意義形成初步共識後，便展開進一步的溝通，經由溝通又會形成進一步的共識，再接續著意義擴充、含意更廣的溝通，這就是這個課堂上透過表達到澄清的溝通循環歷程，在溝通中老師所扮演的引導角色，就是藉由對話讓課堂上的溝通更臻精準；而這個數學課堂的溝通目標即是尋求上述由數學符號所構築的意義世界所隱含的規律，於是課堂上出現發現關係、形成假設、進行檢驗等言談活動。所以我說這門數學課是以語言溝通做為主要的習得、創造與傳遞意義的媒介。

## 壹、兒童思考的基本型態

將焦點回到本研究所欲探究的主角-資優兒童，任務出場之後，資優兒童的思考就會一直纏繞著任務。

### 一、任務分析決定思考的方向

一些資優兒童會因為任務的出現凝聚注意力，再經由分析、確認任務的目標之後，就會將思考聚焦在幾個方向。

在《數字推理》單元「尋求更多解」的任務，老師下達的是「好，現在同樣這一題，條件一樣，請你找愈多愈好，紙張如果不夠再跟張老師拿，五分鐘，我要開始囉！」，兒童每人拿到了一張白紙後，便開始他們找更多解的任務。在這段各自解題時間內，老師完全沒有介入，兒童一如往常的竊竊私語、交頭接耳，產生一些言談與行為的互動，從這些自發性的表現，可以看出他們對於任務的分析與解讀：

- 1 俐：還有什麼解法？
- 2 俐 > 綦：你已經開始畫囉！
- 3 鴻 > 綦：有什麼解法？你怎麼從邊邊畫？
- 4 綦：要你管喔，老師又沒有說一定要
- 5 鴻：我沒有說怎樣啊，你很奇怪！
- 6 豪：我找到一個解法
- 7 俐：(自言自語) 其實有一點相像
- 8 豪：(自言自語) 好多種的感覺
- 9 豪：(看大家的) 每個人都找出不一樣
- 10 俐：會有 16 種
- 11 豪：你怎麼知道？
- 12 俐：4、4、16 啊！

13 豪：(笑)

14 俐：簡單

15 豪：ㄟ 又找出一種(拿給鴻看，鴻沒有要看的意思，豪抬頭看

16 看大家)

17 綦>鴻：給我看你的.....

19 鴻：不要想偷窺

20 俐：我又算出一個(轉頭看綦)

21 俐：我畫的好醜

22 俐：好了！

23 (俐把她寫的拿給綦，俐跟綦兩個人對了起來)

24 鴻>俐、綦：有重複的嗎？

25 俐：老師，有16種對不對？

26 T：你們都找不到其他的嗎？

27 俐：有啊

28 //鴻：有啊

29 //綦：有啊

30 T：有就繼續找啊！我不知道到底有幾種啊，不過你們有五分鐘的

31 時間，都對好，再找出全部的

32 綦：老師現在還有幾分鐘？

33 T：時間到我會跟你說你不要擔心

34 豪：我又找出一種，(拿起紙)綦，我跟你混合對

35 (綦未回應)

36 俐：老師可是我們都畫的很醜耶！

37 豪：(拿起紙)綦我跟你混合對

38 綦>豪：唉呦，不用管這個啦！

39 俐>綦：你一共幾個？(湊過頭去看)

40 (T走過去看大家寫的)

T>鴻：幾個？

(觀-92.09.03-錄影)

我歸納這段言談的焦點，並與老師所下達的任務作比對。或許因為任務傳達的目標是「愈多愈好」，兒童這一段言談或個人或互動的聚焦在「有什麼解法」，也關心「有多少種解法」，並且也自然而然的想要看看別人的解法，產生與別人核對的行動企圖，希望能從不同人的不同解法中累積解法的數量。

除了這兩個比較凝聚的焦點外，還有一些短暫且沒有定論的言談，例如，〔鴻〕和〔綦〕在的言談(3-5行)，〔鴻〕關心的「從哪裡畫起」，〔綦〕卻不認為這是任務的限制，所以回應〔鴻〕說「老師又沒有說一定要」；而〔鴻〕解讀任務為「個人解題」的，所以〔綦〕要求「給我看你的」時，他回應了「不要想偷窺」；而老師的任務傳達中有「五分鐘」的限制，讓〔俐〕關心的問到「現在還有幾分鐘」；還有〔俐〕出現了兩次關於「畫得很醜(20、35行)」的言談，花片畫得好不好，似乎也是她認定的任務要求之一。在任務出現之後，每個人便會開始分析任務確定達成任務的思考方向。

## 二、從任務分析畫出思考的範圍

另外，兒童也會企圖找出思考的範圍，希望能夠掌握局面以能夠精準的解題。就像上述求解的任務，任務只下達愈多愈好，但是「愈多愈好」這個沒有給範圍界線的模糊狀態，對兒童來說是不安的，若能先知道「總共有多少種」解，似乎就能「掌握」局面了，因此〔俐〕和〔豪〕的言談(8-14行)就是關心這個議題，而〔俐〕(10-12行)還從「方陣兩維各有四格，總共可對應出十六個格子」來推測應有十六種解法，主動的從現存的表面現象找可能的線索做推測。

另外，在《拈的遊戲》作科學系統分析的任務中，必須分析對手所有可能的下法，為了避免遺漏，所以〔龍〕思考到了棋局的棋子數與下法的數量之間的關係，有了這樣的關係，就能夠掌握局面了。

而在《數字推理》單元「改條件」的任務中出現的言談，也間接顯露出兒童企圖掌握範圍的思考。方陣【橫 3644、直 5543】這個題目原本的條件是「每格可以擺放的花片數量不限」，張老師要求兒童進行「改條件」的任務，其實要說出成功達成任務要求的條件，應該很容易，但兒童卻不這樣反應，提出一個沒有構成限制的「6」以及無法解的「1」。兩次的回應，兒童看似「故意」的不給「正確答案」，〔鴻〕說因為這樣比較「好玩啊」（訪-〔鴻〕-92.11.25-錄音），兒童似乎試圖點出那個沒有意義或不能成立的極端，來達到他們所謂的好玩；但從另外一個觀點來看，兒童好像有更多的思考層次，故意說出了限制的兩端，也間接圍出了正確答案存在的空間，或許也是為了掌握範圍的一種方式，而且這確實比說出「正確答案」要花更多的思考。

### 三、從任務分析擬定思考依循原則

另外，經由任務分析兒童還會產生思考原則，然後依據原則進行解題。

在《數字推理》單元中「求出一個解」的任務，兒童利用先「平分」擺放，再把多出來的花片放在數字「比較大」的格子內的原則來解題，即使他們也直觀認為這個問題會有「很多」解法，但此次任務中只要求「一次成功的解題」，所以思考出平分的原則；在《拈的遊戲》中「科學系統分析」的任務，兒童們思考出「先固定其中兩堆，然後另外一堆的數字依序減少」的排列組合原則，來找出對手所有可能的下法，有了原則之後，就能較精準的解決問題，而不會像無頭蒼蠅一樣的胡亂嘗試。

為了能夠精準的解題，兒童會企圖掌握局面，所以面對任務時就會思考找出方向、畫出範圍也擬定原則，我或許可以說這就是兒童思考的基本型態。論文內容大致底定時，我把所寫的描述給學生閱讀，請他們給予回饋，〔杰〕看了範圍的那一段後心有戚戚焉的表示「我不知道要找多少的話，我-會-亂-掉-」，很用力且慢速得說出我會亂掉四個字，表現出他尋求掌握的需求。關於擬定原則這個思考，兒童們皆不認為自己會先思考出原則，而是「自然想到的」，但〔龍〕在閱讀求範圍的那一段後說「嗯，就如果不知道要寫到怎麼樣，我會一直寫下去，重複都不知道」，〔杰〕也隨即補充「還有可能有錯誤、有漏掉」，所以或許只是對於原則定義的不同，他們的確不希望沒有方向或原則的胡亂嘗試，因為那可能導致重複做或是錯漏的狀況。

但是並非所有的任務兒童們都可以輕鬆掌握，比較難擬定原則的現象出現在範圍太大不易掌握的局面中，例如，在《數字推理》求出不同解法任務中，因為  $4 \times 4$  的方陣可組合出的解法實在太多，即使兒童們有企圖想畫出範圍（就像〔俐〕作推測），但這個範圍大到是這個年紀的兒童「無法掌握的數量」（對-〔師〕-93.07.29-筆記），所以看到兒童們的記錄紙呈現出無原則的嘗試也看到許多塗改的痕跡，透過訪談〔鴻〕和〔豪〕也告訴我，他們是「亂寫的、亂想的」〔鴻〕，「反正就試試看，如果不對就擦掉換地方擺」〔豪〕（訪-〔鴻〕〔豪〕-92.11.25-錄音），用嘗試錯誤的方法解題，不過這個嘗試真的向他們自己形容的這麼「亂」嗎？我發現〔鴻〕雖然表示他是亂寫的，但是他在學習單上所呈現的解法，空格數逐漸增加的，從原本為了平分原則的分散擺法，似乎有規律性的將空格數增加成為集中的擺法；而〔豪〕也提到，他在「亂試」的時候，會「這填一個、那填一個」，但遇到 6（數字比較大）的那一格，他會「一次就先放兩個」，雖然無法掌握全盤，但他們還是在

能掌握的範圍內擬出原則。我拿兒童的解題方法，與剛從師大數學研究所畢業的兩位老師討論，他們也表示這樣的解法就數學這個領域的要求來說的確還不夠精簡，可能是範圍太大了（與張老師的看法相同）。於是在學期末時，我邀請這兩位老師到班上進行數學教學，他們所佈的題延續這個求出不同的解法任務，但縮小到  $2 \times 2$  的方陣。縮小範圍之後，兒童的掌握性相對增加了，於是我看到兒童解題時的思考原則出現了，他們會先固定某一格，然後依排列組合的方式，依序遞移花片擺放的位置，求解的方法有了原則；另外，也能夠計算出共有多少解，畫出範圍了。

## 貳、任務引導下的思考

接著，我就從任務的聚焦在任務下的兒童，我想要瞭解這些面對任務時兒童的思考，如何在任務引導的情境下展現。

### 一、任務引導的結構與思考的延展

任務結構的不同使得兒童對於任務的掌握能力也會有所不同。方向不清、範圍模糊、結果多樣的任務，兒童較不易掌握，所以也不易畫出範圍或擬定原則了。但兒童企圖掌握局面的需求還是存在的，面臨模糊、複雜的任務，使得他們無法用既有經驗掌握局面，思考於是產生。就像在面對  $4 \times 4$  方陣尋求更多解的任務時，即使因為範圍太大兒童掌握得不夠好，但在尋求掌握的過程中，〔俐〕觀察表面存在的現象（ $4 \times 4$  的方陣所圍出來的格數共有十六格），並以之當作線索進行推測（解法會有十六種），這個過程中的思考是比她第一次只要求出一個解的思考是更豐富的。Bartlett(1958) 稱這類企圖整合經驗的狀況為「落差填補(gap filling)」，因為落差造成的模糊不易掌握而必須靠思考去填補的狀況，就是促使學生進行思考的起點。



我再比較一些例子來瞭解這段落差對兒童思考的影響。

課堂中幾次為了理解定義時，老師會安排強結構的閱讀理解任務。例如在《拈的遊戲》單元「定義殘型」的任務，老師安排兒童先閱讀一段文字：

「殘型」的意義：

不管開始的時候，三堆石子的數目有多大，玩到最後，三堆的石子數量會開始變得很少，這時候三堆石子所成的型態，我們稱之為「殘型」。

當遊戲進行到某階段石子較少，而勝負已定的清楚局面，如果比賽的兩個人都具有相當的水準時，按照正確的走法則誰勝誰負都呈定局，所以拈的殘局可以分為必勝殘型和必敗殘型兩種。

當你佔有了必勝殘型後，如果在以後的幾步都按合乎的邏輯拿法，則不管對手如何拿，他都注定會失敗。反過來說，當你佔有必敗殘型後，如果你的對手以後的幾步都按合乎的邏輯的拿法，則你注定會失敗。

（《拈的遊戲》學習單 4）

閱讀結束後，老師詢問兒童的理解：

T：我們先聽〔正〕，請問你第一個部分，什麼叫做殘局？

正：殘局就是-殘局就是-殘局就是-已經看得出來-

杰：輸！

正：看得出來還是贏。

T：殘局一定要是看得出輸贏才可以叫做殘局嗎？

正：不是

杰：剩一點點，剩一點點

樂：很大的數玩到，一直玩一直玩，玩到很小

龍：很小的時候

T：喔！玩到比較小的數的時候

樂：才能看得出來

正：殘就是所剩下的

T：殘嘛，我們看殘這個字嘛，就是一定是說有東西被拿掉了才價做「殘」。那其實〔正〕的不完全不對，殘局就是可以看得出來輸贏，因為殘局一般來講，剩下比較小少的棋子才叫做殘局，那它比較容易看得出什麼？

A：輸贏

T：好，所以殘局的定義你們清楚了

(觀-92.10.09-錄影)

雖然「殘型」這個名詞對兒童是全新的經驗，但閱讀資料的文字淺顯易懂，兒童能夠自行理解。而當閱讀理解的經驗形成後，老師要求兒童將他們的理解說出來，從「理解過渡到表達」就是一段落差，所以兒童必須思考如何用語言來表達他的理解。從這段對話來看，兒童先提出了「輸贏」的概念，且此概念提出的過程中〔正〕和〔杰〕互相填補，不重述對方的話且讓陳述完整，他們使用的詞彙與閱讀資料的詞彙不同，這表示他們經過了轉換，從舊經驗中提取了同義詞來表達；接著幾個兒童又提出「棋子數剩很少」的概念。到這裡已經說出「殘型」應有的兩個部件（石子較少、勝負已定），殘型的概念都填補完整了。然後〔正〕說解釋「殘就是所剩下的」，又將用來表達的詞彙與資料的文字作了意義上的連結。到這裡，這一段過渡算是完整了，所以老師也在這裡做結束。不過，這個任務很清楚，兒童從理解到轉化為表達幾乎沒有歧異，也沒有需澄清之處，所以這段公開討論只花了短短兩分鐘就結束。

課堂中這類只需理解表達的任務，通常出現在進入一個新單元或新階段時；任務內容多在說明「先決條件與規則」或是建立「溝通語言」的共

識；進行的方式通常是老師提出說明，兒童陳述他們的理解。

《拈的遊戲》單元「從例子過渡到原則」的任務（進行過程請參單元介紹），落差就較大了些，且在討論過程中老師也一直以「例子的不完整性」來突顯落差，所以兒童必須不斷澄清及擴充概念，從單一棋局，到數字相同，再到規則不變，概念漸趨完整。

另外，在「位置會不會影響」任務，則是從「具體操作過渡到記錄符號」（進行過程請參單元介紹），張老師製造了矛盾的現象（同樣是位置改變為何時而可行時而不行），並刻意將矛盾的兩者並置以突顯落差，於是兒童為了填補落差，就必須去區辨、釐清兩種記錄符號的位置改變使用時機的不同。這幾個的任務，我看到兒童在面臨落差時，思考必須更精緻且更精準適切的歷程。

再看一個更弱結構的任務，在《拈的遊戲》中關於必勝規律的討論（詳細討論內容參《附錄 3》），這場討論由兒童發起的，從導致他們輸別組的棋局 {2、4、6} 開始延伸討論，共同的任務目標是「找出必勝的規律」，一個最終的目標，從現存的經驗出發還有非常大的落差填補空間。在這個弱結構的任務下，兒童的思考似乎延展了更多的面向與層次。兒童透過敏銳的透過觀察、歸納、假設、檢驗、推論來回思考，尋求的規律不斷精緻化也更臻精準。即使是已經經過檢驗的推論（足以稱作事實，且能作為下個推論的基礎），但是當新的訊息出現後，兒童又會發現之前推論的不完美，然後回頭增修限制或改變條件，所以探究所得的訊息愈多，就愈發現之前的不完整，也知道必須做的改變與調整，因此體會到即使經過檢驗得到的事實也都該視為暫時的，如此開放了更多彈性，保有探究的空間，而這樣的體會似乎也增加了再次重組的可能，所以整段過程就在這樣層層疊疊的推問中進行，一直到張老師現身將討論結束，以下是整段討論的最後幾句話：

龍：這樣子呢，這樣子呢，我想證明這個推論……（話未完被 T 打斷）

T：好 OK，來，嗯，其他三個知道他們兩個在做什麼嗎？

A：知道

（觀-92.11.13-錄影）

由〔龍〕的話語看來，他們似乎還沒打算停止這場探究活動，〔龍〕還想提出另一個推論，但他的話還未完就被老師打斷了。張老師告訴我，她會在這裡要求停下來，是因為她判斷此時應該「要去界定他們的問題，因為同時遇到了很多點(省略一段)這樣問題才不會很散」(對-〔師〕-93.07.29-筆記)，因此老師一個個問兒童「剛剛所討論的是什麼」，〔蓓〕的回答是「這個【第一個數】是『奇數』，這個【第二個數】是『奇數加 1』，然後、【第三個數】『加起來等於最後一個』」，這個推論並未出現在前述那段討論中，而是將討論的內容作了延伸，我回顧了一小段「那段討論」，再說明〔蓓〕的回答所代表的意義。

〔正〕提出檢驗的實例 { 5、6、11 }，然後說明他的推論：

正：所以一個是奇數、一個是偶數，加起來等於這個【第三個數】

（正笑）

樂：正再講一次

正：好

T：（小聲默唸）一個是奇數一個是偶數

//蓓：那為什麼那個 { 2、4、6 } 呢？

//正：奇 + 偶……

//龍：等一下

正：因為 { 2、4、6 } 這樣……（話還未完被龍打斷）

龍：奇數的位置一定要擺在最前面嗎？

正：對啊，最小

樂：那如果擺在後面？

蒨：那那三個偶數的呢？

正：中間變成 { 6.....

蒨：那三個偶數的呢？

(觀-92.11.13-錄影)

〔蒨〕所提的 { 奇數、奇數+1、前兩數相加 } 這個推論，把〔正〕所說的推論 { 奇數、偶數、前兩數相加 } 填補的更精準了，而且也回應〔龍〕〔樂〕連續提出的關於數字位置、大小排序的質疑。其實若把這個小任務切割開來看，老師只問了「剛剛所討論的是什麼」屬於記憶與理解的強結構任務，但〔蒨〕或許還在流動的思考脈絡中，所以思考繼續延展，不單單只是記憶與理解式的反應而已。在確認每個人都理解後，老師說便企圖引導兒童將每個推論個別的「一個一個」做線性檢驗，兒童也的確接收到了老師的訊息，就回到了老師帶領之下的線性反應中。本來在討論情境中出現的許多推論與事實，可以互相累加、拆解與重新組合，因而又再次萌發成新的推論與事實，但現在被當作一個一個單獨事件後，任務的空間縮小，就只能在既有的個別推論下進行檢驗，其落差就只停留在單一棋局的正確性，減少了重組與創新的可能。所以填補落差除了使思考更加精準之外，也往往促成了思考的重新組合而繼續延展。

Bartlett(1958)也進一步的解釋，思考者會採用三種方式去填補落差，包括插補（去填補訊息中遺漏的邏輯順序）、延伸（擴展不完整的論證）、重塑（重新整理訊息產生新的解釋）。

從上面的例子可以看到，在老師將任務結構放弱、落差增大的情境（從理解到表達、從例子到原則、從操作到符號等）要求兒童思考後，兒童就會利用各種方法（可能包括插補、延伸、重塑或是更多）去填補這一段落差。

## 二、主體性的任務遭遇

不過說兒童是在老師製造的任務結構與任務要求下做反應，似乎也不是那麼完全，因為填補落差不只是因為外界的要求，也是他們自發性追求精確、精準的需求，或許兒童不太能接受模糊不清或曖昧的說法，所以他們面臨模糊的狀態，就產生了需求想辦法填補，以下我舉一些主動想要填補落差的例子：

在「窮盡 { 1、2、3 } 棋局對手可能下法」的任務，老師請每一個人提出一種下法寫在白板上，接著發下一張她事先寫好所有對手下法的學習單，然後說：

T：接下來的【學習單上】這六種棋請你對照一下，老師下完的這六種棋，跟你們歸納出來的六種棋有沒有一樣？

A：有

正：有，一樣，只是順序不同

(觀-92.10.09-錄影)

雖然〔正〕肯定這六種下法與老師所寫的是一樣的六種，但為了符合「一樣」這個詞義的精確要求，必須達到形容詞和被形容的型態完全一致，他才能滿足，所以他補充了一句「只是順序不同」來填補了這個誤差。

還有一次，兒童已知把握「一堆棋子是 0，另外兩堆棋子數一樣」的原則就會獲勝，老師只想再陳述一次，並連結到數學符號「n」的介入：

T：好，我們用一個英文符號來代替這個數，因為老師說它可能很大也可能很小，對不對？那你們要不要同意說，只要這兩個數是一樣的，不管它多大或是多小，都會是後下的人贏？

正：對！

樂：沒有，要下的人是棋王

（觀-92.10.09-錄影）

〔樂〕仍把此命題成立的假設前提「下棋的人要是棋王」說出，加強這個說法的精準度，這類「一定要敘述假設前提」的要求來使敘述更完整的現象，在整個觀察中出現了好幾次，這似乎就是 Bartlett(1958)所說的用以填補訊息中遺漏的邏輯順序的「插補」。

從這兩個例子看來，即使沒有老師任務引導的要求，兒童仍然力求精確，並以話語做意義上的填補。

### 1.老師的任務 vs.自己的任務

不過有些時後，兒童對於任務的要求與老師不同時，似乎不是填補一個語詞他們就能夠滿足了，兒童還會企圖改變討論方向，於是課堂上偶爾出現師生對任務處理方式不一致現象。

進行教學之前，老師會先將教材分析組織後，再切割成段落依序呈現給兒童，企圖引導兒童依循著某種順序做思考，也就是說在一個較大的任務要求之下，老師會先將分析成較小的次任務，然後要求兒童依照老師鋪陳的次任務順序進行；但是兒童所擬定的次任務進程，未必全然與老師的安排一致。這樣的不一致，讓課堂的進行時呈現出些許不流暢。就像下例是《拈的遊戲》單元中進行「科學系統分析」任務時的情景：

表 4-3-1 科學系統分析任務中師生的任務解讀

言談內容與任務		現象說明（我的詮釋）	
老師預期的： 「判斷必勝必敗」的任務	兒童啟動的： 「窮盡會有幾種」的任務	老師	兒童
T：然後老師要教你們用一個科學化的方式去分析它，就是說，猜測與我隨便下，我們很怕是哪一個型我沒下到就造成是一個錯誤的推論。所以我們用科學化的方式來推論，把它每一種對方下棋的方法都把它推論出來，極盡每一種方式畫每一種方式。		老師啟動預設的話題	
T：所以我們來看對方如果要下一個棋他可能怎麼下？{1、2、3} （之後老師點名輪流的請每一個學生說出一種對手可能下法，找出全部的下法共有六種） T：所以他的第一手棋共有幾種可能 A：六種		老師帶領兒童練習如何判斷棋局的勝敗	
	龍：（龍舉手）我發現他 $1+2+3=6$ T：他說什麼？ A：說 $1+2+3$ 是 6		〔龍〕發現棋子數量與其能夠組合出的下法總數之關係
	T：是 6，跟這個有關係嗎？ 正：不知道，應該是湊巧 T：應該是湊巧 T：沒關係，等一下沒關係，老師會請你去觀察	老師預留討論空間	〔龍〕說出此發現引起了〔正〕的懷疑
（發下學習單 {1、4、5} 的殘局請兒童判斷必勝或是必敗） T：好，現在呢，跟剛剛一樣，老師給你一手殘局，為什麼老師給你的是殘局呢？也就是說這是人家下到一半的棋了。請你先猜測這個局是必勝殘局還是必敗殘局？然後請你分析，跟我們剛剛的分析一樣，分析對方的第一手棋有幾種狀況？然後你再去怎麼樣？		老師仍將討論拉回預設的主軸。並給予第二次判斷必勝必敗的練習題目	〔龍〕的發現被老師的「等一下」暫時壓下來



言談內容與任務		現象說明 (我的詮釋)	
老師預期的： 「判斷必勝必敗」的任務	兒童啟動的： 「窮盡會有幾種」的任務	老師	兒童
正：下 T：下！分析之後，再給老師一個結論，剛剛到底是必勝殘局、必敗殘局？還是這一個根本無法判斷？			
(兒童開始實作)			
	龍：「老師，就跟我剛剛說的一樣…… T：噓（示意叫龍不要講） 龍：就是……就是剛才……		〔龍〕用{1、4、5}的殘局驗證剛剛的發現，不過因為老師的「噓」又打住了
	(龍站起來到 T 身邊小聲的說話) 龍 > T：(小聲)我覺得這不是巧合 T：你覺得不是巧合你就要說明理由說服我	老師比之前更開放討論的可能，只要他「有理由」	〔龍〕仍不放棄說明
T：好，請問一下…… 正：有六種必勝，四種必敗 T：有六種必勝，四種必敗？		實作後，老師問「棋局勝敗的判斷結果」這是老師設定的任務	
	龍：有一種不是巧合 T：有一種不是巧合？ 龍：就是 $1+4+5=10$ ，然後找到的剛好有十種		〔龍〕好像故意用「種」這個字來形容他的發現，讓討論可以順勢導向他企圖的方向
	正：可是好像是巧合 龍：不是，你看嘛，1 就可以有 0 跟 1，那 1 如果要變的話，不可能，一定要拿一個，所以拿成 0，所以就只有一種		〔正〕的質疑讓〔龍〕有了說明的機會
	T：你們懂嗎？禱你懂龍在說什麼嗎？ 禱：懂 正：懂，因為他不可能維持那一個，	老師拉其他同學參與〔龍〕的話題	〔正〕不但瞭解且能為這個話題作說明了

言談內容與任務		現象說明（我的詮釋）	
老師預期的： 「判斷必勝必敗」的任務	兒童啟動的： 「窮盡會有幾種」的任務	老師	兒童
	不可能,比如說是剩一,他不可以...		
	(〔龍〕開始說明) T: 蒞,你那個後面先暫緩一下	老師停掉預設的任務,請大家一起參與〔龍〕的任務	
	(針對這個任務作了一連串的討論,〔龍〕說明了他的發現,且兒童也一起進行了驗證)		大家討論〔龍〕的發現
	(之後〔正〕更延伸出這個發現的功能性的議題討論) 正: 十種的話你也不能說是哪十種啊? (在檢驗 {2、4、8} 時〔正〕又再次提起此議題,問「你知道是 14 種,可是你知道是哪 14 種呢?」)		〔正〕針對此發現提出延伸性的議題
	(為了解決〔正〕提出的問題,兒童花一些時間討論利用排列組合出對手的下法,摘錄如下:) {2、4、8} 的殘型 * 龍:(指 2) 能變成只有 1 跟 0, 那兩個數 (4、8) 再填上去【意即變成兩種型 {1、4、8} 和 {0、4、8}】 * 龍: 8 也可以寫成 7654321 正: 可是..... 蒞: 還有 0 啊 (龍補上 0)(討論結束)		大家對〔正〕所提的新議題做思考
T: 那我把這個題目擦掉,這個題目目前不是我們目前要探討的問題。 T: 我們要給龍一個鼓勵,他很棒,那你們自己也很棒,因為他一講你們都瞭解了,那給他一個掌聲,他很棒。(大家鼓掌)		老師肯定這個發現與討論,但仍表示這不是要探討的,回預設的討論中	

這段過程中第一個不流暢之處是「老師預設的任務並不等於兒童心理的任務」，老師所設定的任務是先「判斷勝敗」，而〔龍〕在聽到任務傳達的訊息後，判斷所面臨第一個次任務是「極盡對手所有可能下法」，為了能夠掌握範圍，且追求後續分析可依循的原則，所以花心思找出次序與規律，以避免像無頭蒼蠅一樣胡亂搜尋，因而發現了「{ a、 b、 c }」棋局的對手可能下法為「 $a+b+c$ 」種，並企圖影響老師原本預期的討論方向。

這段過程結束後還引發了第二個不流暢的現象。張老師以 { 1、 4、 5 } 的局為例，問「我們找出十種對不對？你們確定你們找到的十種都一樣嗎？」問題一出，每個兒童都斬釘截鐵的表示絕對一樣，就算張老師以懷疑的口氣再次詢問，兒童仍信心十足的表示「確定」，張老師又再問了一次「那如果老師要你做……，你現在都覺得是一樣嘛，那老師要你們更仔細一點確定，組長，請問你們這組怎麼確定這十種一樣？」，連續三次的要求後，隨即企圖引導兒童以「互相核對」的方式來檢核。但兒童在〔龍〕發起的任務中，已經知道 { 1、 4、 5 } 的棋局排列組合後只有十種下法，所以回應老師「可是能變的就只有這十種」，在預定的教學順序下，張老師可能一時也沒有意識到這句話的意義，所以「堅持」討論核對方式的議題。或許因為師生權力的差距，面對老師的要求自己卻又認為不需要時，他們妥協之下的反應是：迅速的拿著彼此的學習單交叉比對，眼睛快速的一掃之後，陸續發出「一樣」、「完全一樣」、「完全吻合」、「都一樣」……的言談，彷彿有點「配合」的完成這個交辦任務，張老師或許也意識到兒童的不熱衷，所以也未做延伸或統整，就快速結束這個討論，這不像她一般的教學習慣。

我覺得這個現象十分有意思，雖然老師允許那場「意外的討論」發生，卻沒有意識到那場討論，已經將她預定之後才要呈現的議題以「排列組合」的方法討論過了，造成了這個有趣的現象，而且這個方法似乎比她原本預設的「互相核對」方法更接近數學的專業方法。

當老師與兒童在任務進行方式的解讀若產生歧異時，兒童根據自己的任務分析來思考；而當老師發現兒童「走偏」了，則會企圖拉回她預設的思考順序；但若兒童表現出強烈的改變企圖，老師也會適度的放手，但仍會適時拉回她設定的「主線」；兒童面對老師的要求，即使思考不同仍然會配合演出，但帶著一點點被動的、抵抗的行動。

我再比較這個任務下老師與兒童安排的解題順序。老師先安排整體的任務出現，接著切割成小段落呈現，複雜度是逐步累加的，協助是逐漸減少的；對兒童來說，在任務出現時，兒童就已接受到此任務的最終目標，為了掌握局面，找出依循的原則，所以確認問題從窮盡對手的下法開始。下圖 4-3-1，左邊是老師設定的順序、右邊是指兒童進行的順序，我以阿拉伯數字以及箭頭方向代表處理的順序：

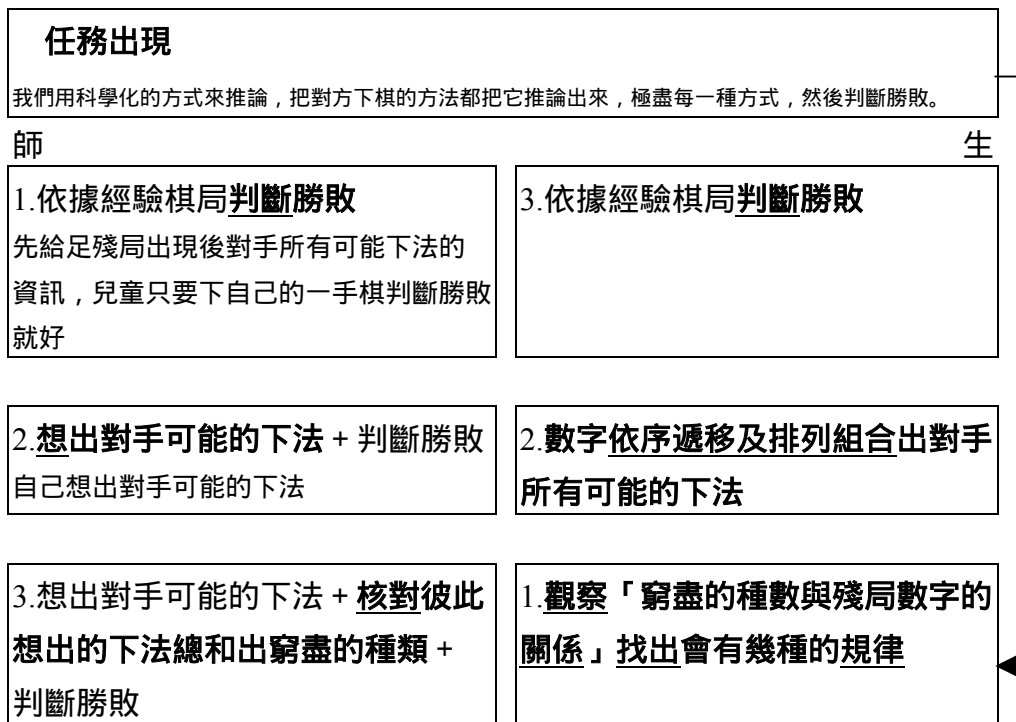


圖 4-3-1 科學系統分析師生任務進行順序

比較師生的思考，可以發現一個幾乎完全相反的進行順序，仔細推敲其中所需運用的思考成分，兒童尋求掌握所激發出的思考，比老師安排累加的任務進程能掌握局面，方法也更精簡。

發現師生不一致的現象，讓我意識到兒童並非只是等待老師介入引導，而是主動的任務進行思考，且若發現自己的方法較老師階段性介入引導更為精進時，兒童傾向選擇自己的方法。

## 2.任務引導的突破，追求精進的需求

所以在有所選擇的情況之下，兒童傾向選擇較精進的作法，也就是說，他們為了滿足追求精進的需求，會去突破任務引導。但是這個推測我無法獲得兒童直接的回饋，不過〔龍〕在閱讀我的描述後在回饋表的寫到「不要老古板，一定要按照教學程序」的建議，以及描述他的思考方式是「我喜歡先從精再求量」，似乎對我的描述他也心有戚戚焉，不過這畢竟還是從我的描述去引發的思考，我不能確定這樣的推測是否正確，我繼續從其他歸納出的現象作瞭解。

另一個例子是「科學系統分析」的任務，除了第一次出現時，在老師的引導下，從「按部就班」的進行過一次後就沒有在團體中完整的進行過了。我所謂的按部就班的方法是指老師所教的方法：先窮盡對手所有的下法 針對每個下法一一分析 判斷勝敗。科學系統分析第一次出現是在 { 1、2、3 } 的殘型，在老師的帶領下完整進行過一遍；第二次出現是在 { 1、4、5 } 的殘型，大家先各自分析，然後團體討論，在團體討論時發現小組成員在勝敗判斷上有歧異，於是老師帶領全組一起分析，並企圖引導兒童按照步驟先將對手可能下法列出，但是〔龍〕跟〔正〕都表示不需全列，只要提出小組中判斷歧異的下法即可，所以就省略了第一個步驟；

來到 { 1、 6、 7 } 的殘型時，老師讓兒童自主的作團體分析，兒童使用的方法是「將提出對手可能下法及判斷勝敗兩個步驟交錯」將兩道手續合併進行；後來出現 { 1、 8、 9 } 的殘型，老師又企圖引導兒童做科學統分析，但〔龍〕發現 { 1、 8、 9 } 的殘型無論怎麼下一定會落入他們曾經經驗的殘型中，所以根本無須分析了，因此連第一步驟都尚未開始，判斷就完成了。可見兒童快速的組織經驗，以避免重複的、多餘的工夫。面對老師企圖介入引導下，他們仍選擇較為精進的方法，即使那要花更多時間跟老師解釋（就像在解釋 { 1、 10、 11 } 不用分析的理由，花了很長的時間且每一個人用不同的方式跟老師解釋），並且要得到老師的同意後才能進行。

在《數字推理》「統計全組共有幾種解法」的任務中，師生討論到該用什麼方法核對彼此的解法由沒有重複時，我也看到了兒童突破引導追求精進的傾向：

經過了個人的解題後，現在要找出全組所有的解法有幾種，  
「用什麼方法找出」是現在討論的焦點，〔俐〕提出「兩個兩個檢查」的方法，老師對這個方法提出質疑：

T：好，老師現在問一個問題，我聽不懂的就是在說，你們兩個兩個檢查你們兩個兩個檢查，最後拿出一張，那那一張裡面會包含所有找到的嗎？你們都是兩個兩個檢查，再拿一張給這一組比對不對……

俐：啊！那我知道了，就是啊，我們兩個檢查（綦俐），然後再我們兩的（豪、綦）檢查【第一次調整】

豪：再他跟他（鴻俐）檢查

俐：那這樣檢查檢查（手亂指彼此）呵呵呵呵（笑）

T：那這樣有沒有辦法找到全部的，就是找出你們這一組總共找出多少種？

（兒童靜默）

T：那我這麼問好了，你們兩個（指蓁、俐）檢查的時候有沒有要做什麼動作？

俐：有啊，就是一起看

T：一起看？那看的時候怎麼知道你們兩個不同的解法有幾種？

俐：看過的打一個勾 **【第二次調整】**

T：看過的打一個勾，打一個勾代表怎麼樣？

//俐：看過了

//蓁：看過了

T：那打一個勾帶表示同一個解法還是不同的解法？

俐：不同的

T：你們都同意嗎？打一個勾代表不同的解法

（T 轉頭對鴻豪）

T > 鴻、豪：可以嗎？

（鴻、豪點頭表示同意）

T：那我們就先一步一步來好了，因為老師比較笨，要一步一步來

俐：要不要畫到黑板上給大家看？ **【第三次調整】**

T：畫到黑板上給大家看看什麼？

蓁：就是……大家一起

俐：就是讓大家檢查自己的

T：喔，你們現在要，你們現在推翻了是不是，這個意思是不是推翻你們兩個兩個檢查囉，是大家一起來囉？

俐：對啊！

（觀-92.09.03-錄影）

這一段討論中〔俐〕將她提的方法調整了三次，前面兩次是因為老師提出了質疑，〔俐〕將方法調整成具正確性（第一次調整）又具計畫性（第二次調整）。但第三次，老師沒有提出質疑，同學也表示同意了，在這樣

沒有外在挑戰來刺激的狀況下，〔俐〕還是調整了方法。而且除了老師質疑的正確性及計畫性之外，〔俐〕在注意到方法的效率問題。所以〔俐〕不只是因應老師或同儕的質疑才做調整，她似乎也主動的追求精進。

在請兒童給予這篇論文回饋時，〔俐〕在閱讀到這一段描述後，形容她自己這個行為是為了「挑釁老師」，所以才繼續講(回饋-〔俐〕-94.01.12-錄音)，我再進一步追問，她只再重述了一次就沒有解釋，於是我自己思考「挑釁」的意涵，指的是「挑戰」嗎？如果是的話，他們會為了追求精進而挑戰老師的引導。因為〔俐〕用了這個詞來表示她的行動，所以我把我這一段的標題從原本「任務引導的擴充」改成「任務引導的突破」。

### 3.主體性的任務遭遇

兒童會主動對任務作分析，然後依據著自己的解讀來思考，他們即使在強結構的引導下也會尋求突破（指的是突破老師的引導），且會組織經驗來使得解決問題更有效率，可見資優兒童的思考常是主動的，而且含有主體性的感受。

我在閱讀思考相關文獻時，多把兒童面臨的情境稱為「任務」，在本研究裡我也這樣使用；而在問題解決的相關文獻中則稱之為「問題」，我覺得這兩個名詞似乎都不足以顯出兒童思考時的主動性與主體性，因為兒童不是這對這個客觀的「任務」或是「問題」做思考，而是主動解讀任務，轉化成主體性的任務後針對「自己的任務」做思考。

我閱讀到 Rollo May 所撰寫的創造的勇氣一書（傅佩榮譯，民 90），其中一個章節提到創造力與遭遇（encounter），他說「創造力出現於一個遭遇行動中，並且要理解它，就需以此一遭遇為核心」，我覺得若用「遭遇」這個詞，好像能更貼切的形容這群資優兒童在情境下的主動詮釋，從心裡出發去感受、理解外界的刺激，感受情境也感受自己；相反的，如果



沒有主動的感受，即使面臨同樣的情境，也不至於產生遭遇。所以他們不只是接受任務而已，而是主動的、機警的從內心出發去感受、去遭遇整個情境。這樣我好像就更能理解資優兒童的思考了。接下來我就使用「遭遇」這個詞彙來形容兒童主體性的「自己的任務」。

兒童既然是主動的個體，強調主體性的感受，所遭遇的當然就不只是老師所下達的「說出來」的任務，情境中發生的一切，包括：老師的要求、發生的事件、各種感官刺激等，也都影響著兒童，都有可能成為他們的遭遇。那麼，究竟怎麼樣的情境較能夠引起兒童的遭遇，產生思考的企圖，我想從幾次由兒童主動產生的遭遇，而非老師下達的要求來瞭解。

是怎樣的情境會引發強烈的遭遇呢？我回想到那一段在「科學系統分析」任務下出現的不流暢情景，過程一開始張老師用了些理由強調「科學系統分析」的重要性，而且張老師告訴我她故意用了「科學系統分析」這個「呼嚨出來的」的名詞，希望「權威式語言」營造情境讓兒童產生強烈感受，覺得這好像是很專業的方法（訪-〔師〕-93.11.15-錄音）。所以張老師的教學除了傳達任務引導外，也有意安排情境式的感受，讓兒童產生遭遇。但這個「權威式語言」的給兒童的刺激，似乎沒有面臨「掌握局面」的需求時所引發的遭遇來的強烈，因為遭遇模糊，想要尋求掌握的需求，讓〔龍〕產生「窮盡會有多少種」的思考，並企圖影響討論方向的過程。

在《數字推理》單元「統計全組有多少解」的任務，兒童交互核對有沒有重複的解法，〔豪〕核對得特別快，其他兒童主動的詢問他的方法，我想這或許是在團體情境下遭遇到別人對的比較快的事件，而引發了追求效率的需求，產生這樣的思考行動。

另外，在《拈的遊戲》那段「不斷的歸納與演繹、發現與檢驗」的豐富討論（附錄 3）又是什麼引起他們強烈的遭遇？那一次上課，張老師沒有宣布任務，而是〔蓓〕一進教室來，就說「老師，然後呢……好像…… {2、

4、6}也是必勝」,[正]也肯定的應和著「是!(肯定的語氣)看對方的,已經知道了」,是前一個禮拜他們和其他組別進行拈的遊戲競賽,因為對方的一手{2、4、6}的棋,讓他們輸了比賽。其實,在這個競賽之前的一次上課,張老師就已用一如往常的方法,佈下{2、4、6}的棋局請兒童分析,也已確定這個棋局是必勝了。為何第一次{2、4、6}的分析,兒童不但沒有延展思考,甚至根本不記得曾經做過分析。而是在「輸了」之後,揚起了分析的需求,或許就是這個「輸」的事件引發了他們的遭遇吧!

在訪談時[正]跟我說到他記得那一次他們跟別組比結果「爆彈了【輸了】」,然後他們本來是「自己在台下想」變成「五個人都在想啊」(訪[正])

我：喔，那為什麼之前就自己想，然後比賽以後就一起想

正：因為，因為輸了啊，所以才要一起想那一個

我：喔，因為輸了……

正：就要一起想說「為什麼啊？」，因為，為了避免其他人，也被這種輸啊！

我：什麼叫做其他人也被這種輸？

正：因為，好像，就是五個人都要跟人家下

我：喔，所以避免你們小組裡的某一個人……

正：某一個人，再跟我犯一樣的錯，他也不知道的話，也跟我一樣錯在那裡。

我：喔，避免你們小組的某一個人代表你們這一組的時候，因為不知道會輸了？

正：嗯！

我：就是這樣？

正：嗯！

(訪-[正]-93.10.12-錄音)

「輸」的事件，引起強烈「找出贏的規律」遭遇，產生解決問題的需求，繼而開始思考行為。這幾個例子，我看到的是在面臨模糊情境，以及有比較或競爭的情境下，能夠引起兒童強烈的遭遇。

那麼這些情境又為什麼能引發遭遇呢？在分析資料時，我感受到兒童那種不得不去做的急迫感，似乎是一種內在的需求，然後想要獲得滿足。進一步閱讀關於「需求」的文獻，莊耀嘉（民 84）整理的 Maslow 的論述，提到人有「認知」與「審美」兩種需求，他將這兩種需求與「動力」需求中的自我實現，並列為人的高層次需求。其中認知的需求與我們對所觀察到的事物賦予意義有關，這似乎就是為什麼兒童會產生遭遇的原因了，因為他將所觀察到的事物賦予了意義；而審美的需求則是和追求系統、追求規律、追求完備有關，這好像也能解釋兒童為何會求原則、求精確、精準等行為。也許就可以這麼說，是天生的需求，讓他們在面臨情境時影強烈的感受，於是遭遇產生。

May(1969)在創造的勇氣一書中提到「遭遇的明顯特色，就會產生很高的熱情，雖然是時間短暫的經驗都可能為一個人的敏感帶來可觀的意涵（傅佩榮譯，民 90）」，看完這一段話，我回想起我與指導教授討論那一段從輸了比賽開始的豐富思考，我讚嘆著兒童怎麼會有如此高的記憶力，在不用紙筆記錄的狀況下，還能夠記住每一個不同的推論，在快速的橫向跳躍之後，還能回頭來直向的檢驗。指導教授告訴我，這也許不只是記憶力，還要他們的專注和靈活，專注在討論的焦點上，所以才能靈活的、快速的覺知（93.07.14 論文討論）。的確，即使是那麼短暫的經驗，也許只是某個人講出的三個數字，或許根本不用三秒鐘，但是因為他們對目標有極高的熱情，以及對關係的敏感度、靈活度讓他們產生可觀的覺知，然後就像連鎖反應般，碰撞出豐富的思考。

我無法明確的指出是哪些需求、哪些情境交互作用產生了遭遇，但無

論如何，我知道，兒童是主動的在解釋他的世界，並順著這些解釋，進行他的思考行動。

### 三、主體性的情境遭遇與客觀的情境協調

#### 1. 情境改變，則因應情境而變產生不同遭遇

兒童的追求意義、追尋規律的需求，讓他們對情境有敏銳的感受，所以每次情境中的小改變，就會連鎖影響兒童遭遇的形成。

在《數字推理》單元同樣是「自己設計題目，且找出解答」的主要任務下，張老師第一次是開放兩維讓兒童自行設計數字，第二次則是一維的數字既定，另一維開放讓兒童設計數字。兩次的任務其實很相近，但在第一次的設計題目時，所有的兒童都先將兩維的數字寫上，然後再求出解；而第二次的設計，只有〔綦〕維持原來的的方法，其餘兒童都先根據那一維已經限制的數字先畫出解（他們稱這是「先寫裡面」），然後才對應的把花片總加後寫出另外一維的數字（這是「外面」）。我問〔豪〕他想要改變方法的原因：

我：為什麼當兩邊給你的時候你就先寫外面，可是只給你一邊的時候，你就先寫裡面？

豪：因為先寫外面比較簡單，先寫裡面要想，複雜

我：先寫外面比較簡單，是不是？

豪：對啊！先寫裡面還要考慮外面的

我：那在這個時候，老師給了你一個，為什麼你不先寫外面？

豪：看我的心情好不好（笑）

我：好

豪：因為我也不知道為什麼

我：好

豪：喔，老師，我知道了，因為，就是我想說……幹嘛寫（直掛數字）這麼麻煩，就先寫（中間的解答）然後再加起來

（訪-〔豪〕-92.11.25-錄音）

或許因為脫離了當下的情境，〔豪〕有點在想辦法合理化他的行為，但還是看的出來，即使重新再思考，他尋求的是一個比較容易（較不用花心思、較不費力）就達成目標的方法。其實弔詭的是，他們為了想出這個較不費力的方法，其實是需要較費力的思考（不沿用舊方法自然較費力）才想出來的。從這裡來看，即使是相似的任務，只要其中的條件有改變，兒童的思考就跟著改變了，因為任務不同，他就要「思考」出達成這個任務比較「不費力思考」的方法。

## **2.情境不變，主觀遭遇仍不斷與客觀情境互動**

即使任務沒有改變，情境的訊息也並非就在兒童產生主體性的遭遇後就被甩掉了。說兒童的思考是由需求出發與情境碰撞再產生遭遇而，似乎還不夠完整，小看了資優兒童在面對環境時的彈性。其實，兒童在情境刺激之下，產生遭遇後，力求精確的他們仍會回頭去確認、調整自己的遭遇與客觀情境的一致性。

就像每一次老師宣布任務之後，兒童會藉由提問來確認自己的理解與老師的要求是否一致；另外，在解題的過程中，兒童們也會產生竊竊私語、交頭接耳的行為，希望能從同儕的回饋中，確認理解的一致性，通常他們認為「一致」就等於「客觀或正確」。我先舉例來描述兒童用一致來代表正確的想法，再進一步說明兒童如何利用同儕對話來尋求一致性。

在《拈的遊戲》提出第一個必勝原則之後，老師要求兒童進行檢驗，兒童卻認為只要大家都認同就足以代表正確，所以無須檢驗：

T：你們這一組完全同意嗎？

正：同意

龍：不同意的舉手（正轉頭看大家）

正：誰不同意？

（沒有人舉手）

T：可以試試看，我覺得直接在這上面動手作【老師要求檢驗】

正：（舉手，大聲說）我！

龍 > 正：你不同意嗎？

正：同意啊！

龍：那幹嘛試？

正：對喔

（觀-92.10.09-錄影）

在《數字推理》單元的最後階段，兒童進行「解法分類」的任務，因為從四張記錄紙，整理歸類抄寫至學習單的過程有些混亂，所以每個人所的結果不太相同，於是兒童進行檢核的工作。在檢核過程中，兒童拿著彼此的學習單這個「二手資料」進行核對，且認為若多數人都一致的結果就是正確的，然後要求「錯」的同儕做修正，而忽略了比對原始記錄紙的「一手資料」。在老師提醒「多的就是對的嗎？這有爭議性喔！」後，兒童才認知到這個方法的迷思，應將原始的記錄紙與整理後的學習單一起檢核。

或許就是認知「多數人的理解（一致性）就是正確」，所以當兒童認定有一個客觀任務或是正確答案存在時，便會利用互相對話來確認理解與作法的一致性，及或答案的正確性，所以在解題過程中，這類確認一致的行為就常常出現。

接下來，我就以實例來說明兒童如何透過對話或其他溝通方式來尋求彼此之間的一致。通常在任務下達後和解題過程中，兒童就會展開溝通活動，希望藉由同儕的回饋來尋求一致，以理解「客觀」：

\* 在《拈的遊戲》執行 { 1、2、3 } 科學系統分析，並且判斷勝敗的任務時，在個人解題的時間內、〔杰〕主動詢問〔正〕：

杰 > 正：你寫什麼？

正 > 杰：下面要寫什麼「結論」

杰 > 正：必勝或必敗？

（ 蒨把正的學習單拿過去看）

（ 正搶回來）

杰 > 正：你寫了什麼啦？

（ 以下略）

（ 觀-92.10.09-錄影）

〔杰〕想要知道〔正〕判斷的結果，但第一次詢問時，〔正〕以為〔杰〕是對任務要求不理解，所以告訴〔杰〕「下面要寫結論」。於是〔杰〕又更明確的再問一次勝敗判斷的結果，但是被〔蒨〕的行為打斷，於是〔杰〕又心急的問了一次。

\* 在《數字推理》單元「求出更多解法」的任務時，兒童之間為了瞭解作法，也產生了對話：

鴻：（看綦）有什麼解法？你怎麼從邊邊畫？

綦 > 綦：要你管喔，老師又沒有說一定要……

鴻 > 綦：我沒有說怎樣啊，你很奇怪

\*\*\*\*\*（省略一段）\*\*\*\*\*

豪：（拿起紙）綦我跟你混合對

綦 > 豪：唉呦，不用管這個啦！

（ 以下略）

（ 觀-92.09.03-錄影）

\* 另外一次，在《拈的遊戲》單元殘型 { 2、4、6 } 的科學系統分析任務，兒童也出現交頭接耳的情形：

( 龍靠過去看正 )

( 龍顯出悠閒狀，晃來晃去 )

正 > 龍：你全部寫了嗎？

龍：我只剩下三個還沒寫

**T：不要討論**

龍：老師，背面可以拿來用嗎？

T：可以啊，你如果正面不夠寫可以寫背面

( 龍、杰、樂寫完 )

( 正、龍互看彼此的學習單 )

( 蓓、正寫完 )( 杰拿橡皮擦，塗塗改改 )

( 正拿之前的學習單出來看必勝殘局 )

( 正湊過去看龍的學習單，並對照自己的；龍也站起來與正核對；杰也湊了進去 )

( 觀-92.10.16-錄影 )

老師的一聲「不要討論」，停止了兒童間的「有聲對話」，但是湊著頭互相看彼此解法或是倆倆拿起學習單核對的「無聲行為」仍持續的進行，在符合老師「不要討論」的要求下，仍滿足他們想要尋求正確與客觀的需求所產生的溝通行為。有趣的是，其實這也是因應外界環境改變做的調整。

上述的溝通都有特定的對話或行動對象，但有些時候，兒童出現類似「自言自語」的行為，不過此行為的目的似乎也是為了得到同儕回饋而說，所以發訊的對象是整個團體：



\* 在《拈的遊戲》做 { 1、4、5 } 殘型的科學系統分析時，〔正〕就出現了  
自言自語的行為：

正：(自言自語)有好幾個都是必勝

(龍丟橡皮擦玩)

正：(邊點算自己的分析邊說)必勝、必勝、必勝

(龍丟橡皮擦玩)

正：(抬起頭來看看大家，比了手勢六)六個是必勝

(正站起來看杰的)

(龍也湊過去三人湊在一起，小聲說：就四個！)

(正走過去看菻、樂的)

(以下略)

(觀-92.10.09-錄影)

在沒有特定對象的自言自語後，〔正〕沒有得到任何同儕的回饋，於是  
他決定主動的站起來看〔杰〕的作法。

\* 在《數字推理》進行「求出愈多愈好解法」的任務時

豪：我找到一個解法

俐：其實有一點相像

豪：好多種的感覺

豪：(抬頭看大家的)每個人都找出不一樣

俐：會有 16 種

豪：你怎麼知道？

(以下略)

(觀-92.09.03-錄影)

〔豪〕在幾次沒有特定對象的言談之後，終於在第三次，〔俐〕給予了回饋，兒童之間的對話因而展開。

另外兒童會互相模仿他們認為「正確」(沒有被質疑)的行為：

龍：好了，寫好了(然後把學習單轉到背面)

(龍身體轉向正)

正>龍：你算完了？

老師問〔樂〕聯絡簿的事情

(菻抬頭看龍、正、樂的學習單)

(樂抬頭看正的學習單，龍在學習單的背面畫東西，樂看到龍的行為笑了一下)

正：我寫完了(也把學習單翻到背面)

〔杰〕跟〔正〕展開言語溝通

龍：字寫的太醜了(擦掉)

(樂也在後面畫畫，拿給菻看)

正：寫太大了(擦掉)

(以下略)

(觀-92.10.09-錄影)

〔龍〕率先把學習單翻到背面、畫畫，且提到了關於「字」的書寫問題，之後〔正〕〔樂〕也出現同樣的行為。我想或許是因為〔龍〕的行為沒有受到來自其他同儕或老師的質疑或制止，所以其他兒童對於任務的限制或要求有重新的解讀(或許解讀為可以在背面畫畫以及字的書寫品質很重要)，所以產生了看似模仿的行為。在團體情境中，先解讀客觀情境訊息的人會影響其他人的行為。

透過這些例子可以知道，兒童在面對較模糊的任務訊息或是不確定的解法時，就會主動的產生言語或是行動的溝通活動，並且透過同儕的回

饋，增加對於任務的理解，進而確認或是修正自己的作法，或產生類似模仿的行為，學習被認定為「正確」的行為。

不過，兒童為了協商確認客觀情境的對話，並非在每一次任務下達或是解題過程中都會出現。當任務容易理解，模糊性不高，就不易出現關於任務或解法的對話，此時出現的言談，多是「閒聊」，就像在《拈的遊戲》中認識「殘型定義」的任務時，就出現長達十三分鐘的聊天。

#### 四、任務引導情境下的探究

現在我從課堂進行的兩種主要的思考「發現」與「檢驗」活動，來整合的看兒童的思考如何在這兩類活動中出現。張老師所安排的教學目標以發現關係與規律為主，而課堂的探究模式大多先安排各自的嘗試，然後透過團體討論讓兒童說出從嘗試經驗中所得出的發現，然後在經過檢驗的程序，檢驗發現的正確性。

##### 1.發現

在《數字推理》單元中張老師希望兒童能從各自嘗試「解題」的過程中發現「兩維數字之和相等」的關係。但是從解第一道題目開始，到最後一道題目解題結束，兒童都沒有主動的說出關係，於是張老師認為兒童「沒有發現」。接下來是「設計題目並且求出解答」的任務，兒童各自設計結束，張老師要求兒童寫下在嘗試設計題目時的發現，但是兒童所寫的發現是關於求解方面的發現「每個題目都有很多答案」〔豪〕、「題目要慢慢推才有答」〔鴻〕；以及題目設計方面的發現「自己先試試看，如果不行，就一直改一直改，改到自己會為止！」〔俐〕、「我自己出的比老師的還難」〔藁〕，其實這也是「發現」，但不是張老師所設定的目標：發現數量關，所以張老師認為兒童還「沒有

發現」，這樣的現象讓張老師「臨時改了」教學設計，增加一個未在教學設計預期內的新任務「已知橫排數字，兒童要自行設計出直排數字，並且找出解答」，希望透過限制的增加，促使兒童發現，這也是突顯衝突、增加落差的引導方式。這個任務的確將兒童的焦點從解法及設計題目轉移至兩維的數字，而且因為有一維被限制，衝突更突顯了，關係也好像更容易發現了。

經過了一場關於如何想出直排數字的討論，〔豪〕清楚的說出了「兩維數字之和相等」的發現。回顧這一場討論（詳細討論內容請參《拈的遊戲》單元「一維數字既定設計一維數字的任務」）從〔鴻〕用直接把另一維的數字換過來的方法，到〔俐〕說兩維數字不能差太多，最後〔豪〕說出了兩邊加起來要相等的發現，從這裡看來〔豪〕的發現似乎是累積了同儕的說法，加上嘗試的經驗，逐漸凝聚而成的概念。透過大家觀點的分享進行思考，「發現」逐漸破繭而出。所以到這裡我似乎可以做個結論，促使兒童發現的條件，不但需要嘗試的經驗，更需要這個經驗能夠產生困難或衝突。

不過從這段討論看來，我總覺得這裡應該不是兒童「發現」的初始地，不然他們不會產生「靈感」、「想」法或是「猜」測。

我注意到另外一個事件，即使在〔豪〕提出「兩維數字之和相等」的發現經過公開檢驗確認無誤之後，〔俐〕還是覺得兩維數字之和只要「不要差太多」，不一定要相等也可以求出解，所以她提出「數字要差3以內」的假設，為了這個說法，課堂上又進行一段再次檢驗的歷程，證實她的推論是錯誤的，再次確認「兩維數字合要相等」的說法。結束了這段檢驗，張老師請大家交換解之前各自設計的題目，〔豪〕解到〔俐〕設計的題目，發現她所設計的題目兩維數字合不相等（差了2）所以解不出來，而〔俐〕卻表示她有求出解所以才這樣出題。原來〔俐〕在第一次設計題目時就算

錯了。那麼我似乎可以推測，〔俐〕之所以會提「數字合相差要在3以內」的推論，是根據她之前算錯的經驗而來的，如果是這樣，其實〔俐〕早在她說出發現前，就已經對兩維數字的關係有感覺了，而且這個感覺一直影響著她，如果發現是一個歷程，那麼張老師認為第一次設計題目時兒童「沒有發現」其實並不全然正確，兒童早就產生了感覺，只是或許當時沒有那麼具體，所以沒有說出來。

透過訪談我才知道，〔俐〕不是早一步發現關係的唯一一人，〔豪〕告訴我，在第一次設計題目時，他就已經把兩維數字加起來「算過」了，「所以他才敢這樣推論」（訪-〔豪〕-92.09.26-錄音）這麼說來〔豪〕不但有感覺，而且確實也已經將這個感覺具體化，達到發現歷程的關係最後階段了。我想若只根據外顯表現去理解兒童，確實容易低估了他們的敏銳的覺察能力，但是既然他發現了，為何當時沒有說出來，我回憶到〔豪〕當時在學習單上所寫的發現「每個題目都有很多答案」〔豪〕，是因為他的關注焦點還在「解題」上，所以他以為解題的發現才是任務的要求，而非數量關係的發現嗎？如果是這樣，那就是用來理解兒童思考的表徵工具未能讓兒童表現出所要求的思考，所以讓老師自己未能及時掌握兒童的狀態。

我很好奇，既然這些「前發現」在老師製造衝突、落差之前就產生了，那麼是什麼原因促使他們產生關係的發現？我用錄影帶請〔豪〕回顧他發現的歷程，〔豪〕也告訴我那就是「靈光乍現」，他還繪聲繪影的結合錄影帶上所看到討論當下的情景，說「就像牛頓【牛頓怎麼了？】沒有啦！【說說看嘛！】鴻拿橡皮擦丟我啊，就……啊（笑）【什麼？】牛頓被蘋果砸到，我被鴻的橡皮擦丟到，所以就想到了！（笑）」（訪-〔豪〕-92.09.26-錄音）。雖然無法透過對話得知兒童思考的緣由，但兒童善用隱喻的幽默感在這裡表露。張老師換了個方式由經驗詢問：

T：豪，你在做的過程，你做不出來的過程，有沒有發現哪裡有問

題，為什麼你做不出來？

豪：就是……數字沒有一樣嘛！就放不下

T：數字沒有一樣就放不下，哪裡放不下？

T：你有試過直排的圈圈，放完了嗎？你直排的還是橫排的先放完？

豪：直排的圈圈放到最後一個，就不能再放了，就放不下

T：為什麼放不下

豪：因為都滿了

T：橫排的要求滿了，但是直排的數字還沒放完？

（豪點頭）

（訪-〔豪〕-92.09.26-錄音）

若兩維數字合不同，就會產生一維數字的要求滿足後，另一維的要求還未達到，但是如果再放下花片，就會「放不下」，這個衝突是他們共同遇到的經驗，〔俐〕在也心有戚戚焉的說「大概都會碰到這樣」。因為放不下的衝突經驗，促使他們發現兩邊的和必須相等，這個經驗發生在老師製造落差之前，也就是說不一定等待老師突顯落差，兒童在嘗試的經驗中，自己就會產生落差然後利用思考做填補。所以光有嘗試的經驗是不足以成就發現的，嘗試也需要兒童主動性的知覺。在嘗試的過程當中，兒童不只求達到任務目標，還敏銳的觀察相互的關係，產生感覺，並且注意自己的這些感覺，讓感覺一直影響自己，這些經驗才能促使發現。

## 2.檢驗

在公開確認發現之後，張老師都會帶領兒童進行「公開檢驗」，就像前述兩維數字合相等的發現，也經歷了利用各個數字來檢驗的歷程。

透過歸納可以發現，若是老師提出的說法，通常兒童是在老師的要求下進行檢驗；若是兒童提出的說法，那麼要求進行公開檢驗的通常就是兒

童彼此，這或許是因為兒童認知到老師所給的例子都是「研究過了」〔正〕的：

我：你怎麼知道老師給的是她研究過的？

正：因為她如果沒有研究過，她不可能會跟我們講。

我：嗯。

正：而且那一個，一開始她給我們都是必勝殘局啊，沒有必敗的殘局。

我：喔，因為你發現，老師給的……

正：都是贏的，不會給我們輸的，因為一開始老師教的不可能教錯的。

（訪-〔正〕-93.10.12-錄音）

兒童不但「預期」老師一定事先經過研究，而且經歷一連串的經驗，他們也確實「發現」老師給的例子確實都是「勝」的，更加肯定了老師「不會教錯的」，那麼老師提出的說法，自然就沒有檢驗的必要了，所以課堂中老師提出來的說法，通常只有在老師的「要求」下，才會進行檢驗的工作；但是，若是提出的說法或發現換成是兒童，就不一定能得到同儕們一致的認定，於是就會遭受質疑或直接提出檢驗要求。

透過跟〔豪〕的對話，我才瞭解到從觀察時所得的表面現象的解釋，好像又簡化了他們的思考。因為〔豪〕不但在「說出發現」之前就發現了，而且他還告訴我他早就在心裡檢驗過了：

在回顧〔豪〕發現歷程時：

豪：我已經把兩邊加起來算過了，所以我才敢這樣推論

我：你怎麼算？

豪：我發現剛剛好，就加起來試試看，發現一樣，然後經過測試，就證明了！

我：你怎麼測試？

豪：拿其它數字試試看！

(訪-〔豪〕-92.09.26-錄音)

原來，這個發現不只是在「公開檢驗」之前，甚至是兒童「說出發現」之前，就已經在兒童的心裡送入檢驗了。而〔鴻〕在比較了普通班與資優班的上課方式後，提到「如果沒有實驗【即檢驗】就好像不是真的懂……半懂不懂……」(訪-〔鴻〕-93.10.05-錄音)，所以「檢驗確認發現」的精確性，不只是任務的要求，也是兒童主動的需求。

### 小結：

在任務引導牽引的情境脈絡下看資優兒童的思考，首先我看到兒童在面對情境時的主動性，所以在表面上跟隨著公開探究的線性邏輯（嘗試發現 澄清 檢驗）之下，其實隱藏著不斷遭遇後主動的思考循環式的探究，資優兒童的思考像是因應著情境「隨時可為起點」的循環式歷程，這是兒童與自己思辯的探究活動，因為他們力求精進的需求，有時這種內在思考活動進行的順序會較外界引導下所進行的還要早，所以會有所謂的「前發現」、「前檢驗」的現象；另外兒童也不斷讓內在的遭遇與外在的任務產生互動，透過這個歷程讓探究更為「客觀」也保持著「彈性」，這個歷程通常經由兒童與同儕或老師互動獲取回饋，或是兒童敏銳的知覺環境的變化的方式完成。

所以我彷彿看到兩種張力的拉鋸戰，一方面為了求精確，一直關注情境中的訊息，並讓自己保持敏覺的狀態，所以才能迅速的反應、彈性的調整，增加認知負擔；另一方面為求掌握局面，於是在複雜的情境訊息中找尋精簡精進，一直在降低認知負擔。下圖是我對這樣現象的描繪：



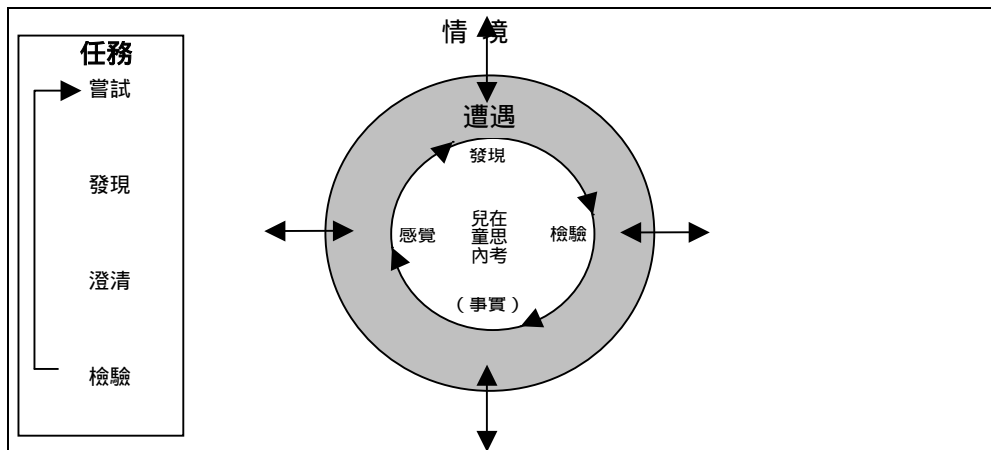


圖 4-3-2 任務引導情境下的兒童思考

所以在外在情境的任務引導之下，兒童主動的對任務作詮釋產生了遭遇（同心圓的外圈），並且主動進行內心思考的循環，但不一定每次思考的歷程他們都會說出來，只有在認知為「該說」的時候，他們才會說出思考。另外，他們也與情境不斷協調（雙向箭頭），也因應著彈性調整，所以內在思考（同心圓的內圈）的也是不斷的變動，所以我所繪製的這個圖，代表的只是一個暫時的狀態。

## 參、兒童對話中的思考

將「兒童討論」另闢一段落，是因為發現在老師鮮少介入下的討論情境中，兒童思考的展現與老師引領討論下的思考是不同的，所以這個部分，我把焦距再度縮小，觀看兒童對話情境下的兒童思考。

大部分的時候兒童在老師的「要求」下產生對話，為了回應、或者為了澄清，總之多是老師先開了個頭，然後兒童緊接著反應。就連最常出現兒童對話的時機「解題時的交頭接耳」也都是為了因應情境、尋求客觀一致而說。從前面的分析也發現，有些時候兒童主動的進行思考，但是因為老師沒有問，或是問的不對，所以他們沒有說出來，這樣看似被動的反應，什麼時候會主動起來，在沒有老師所帶領的任務引導的情境下，他們為什麼想要說話、又為什麼產生討論。

透過歸納，在這個課堂中兒童對話出現的時機，一是為了溝通，目的是希望促成相互理解；另外則是為了探究，透過觀點的交換與整合，以及討論脈絡的延展，促使兒童建構知識。

在展開書寫之前，我又回憶到〔正〕對於老師與同學的推論呈現出的不同反應，〔正〕認為老師所給的例子是「研究過了」的，所以不可能錯。我若將這樣的想法更延伸一些，或許兒童認為，與老師的對話只要等待理解、跟著反應即可；那麼，也許兒童之間的對話才更能創造出主動詮釋以及繼續深究的可能。

### 一、溝通目的：主觀想法的互相詮釋

在這個數學課堂中有一種話語是為了詮釋同儕的想法而說的，通常出現的時機是在一位兒童提出想法後，其他人就會透過詮釋來表示他們的理

解或是解釋給其他同儕理解，以達到溝通的目的。

\* 在《拈的遊戲》進行「推論規律」的任務時，〔正〕提出一個規律，而〔龍〕在進一步的賦予符號，但這個轉換〔正〕不太明白，〔樂〕則做了詮釋：

龍：如果第二排呢是  $n$  的話

T： $n$ （寫白板）

龍：然後第三排的數就是  $n+1$

T：比如說什麼呢？

龍： $\{1, 2, 3\}$

T：比如說  $\{1, 2, 3\}$ （寫白板）

樂：喔~~~我懂了

龍：第一排就是 1, 2 的話就是，第二個就是 2，第二個就是  $2+1$

正：那這樣還不是  $\{1, 2, 3\}$ ？還不是一樣

T：你這樣還是  $\{1, 2, 3\}$  啊

龍：就是說這樣啊

正：根本就沒有改變

樂：老師我懂了

（T 做手勢請樂說）

樂：他的意思是說，他舉個例子來說，是  $\{1, 2, 3\}$ ，他把它講一次第一個是 1，第二個是 2 的倍數沒有錯，第三個就是  $2+3$

龍： $2+1$

樂：對不起  $2+1$

正：喔~~~2 的倍數然後加 1

正：第二個比如說.....

（觀-92.10.16-錄影）

大家尚未理解〔龍〕所提出的符號與原本討論議題的推論之間的關係，所以〔樂〕就做了詮釋，將符號與實例做了結合。

\* 在《拈的遊戲》中討論到窮盡對手可能下法的規則時，〔龍〕在解釋後，〔正〕不但表示理解，也主動說出他的詮釋：

龍：不是，你看嘛，1 就可以有 0 跟 1，那 1 如果要變的話，不可能，一定要拿一個，所以拿成 0，所以就只有一種

T：你們懂嗎？舊你懂龍在說什麼嗎？

舊：懂

正：懂，因為他不可能維持那一個，不可能，比如說是剩一，他不可以.....

(觀-92.10.16-錄影)

\* 在《拈的遊戲》遊戲 { 1、10、11 } 勝敗時，〔龍〕說出不需科學系統分析也能判斷勝敗的方法，〔樂〕理解了之後，協助解釋：

龍：就是 { 1、10、11 }，然後呢，現在呢，當然不會有人會下到.....

現在大家都是棋王，當然不會有人下到 { 1、1、11 } 讓對方去贏，所以呢，他們一定要挑.....

T：對不起，為什麼我一定不能下 { 1、1、11 } 讓對方去？

樂：他的意思是說，(龍：因為.....)，不會有人會下那個，我們是以棋王身份來

即使經過一次的詮釋，老師還是聽不懂，所以〔樂〕又再協助詮釋一次，〔正〕好像也理解了，也做了補充說明：

T：知道嗎？真的喔，是嗎？真的喔，你們那麼快就懂了，我怎麼還有點迷迷糊糊的

T：跟 23456789 有什麼關係？

正：(笑)

龍：他只能拿成這 8 個數

樂：老師，他的意思是說，我們已經討論出來，那個 23456789，前面是 1 的，中間是 2 的倍數，不是已經講過了嗎，拿成那個就一定會贏，是必勝，所以把 {1、10、11} 拿成最後那幾個數，就一定會贏？

正：就算是顛倒過來

接下來，〔正〕又再詮釋了一次，其他人也跟著補充：

正：龍是說，他這兩個數（指 10、11），就只能下到 23456789

T：為什麼這兩個數只能下到 2、3……現在問題就在這裡？

//樂：因為我們……

//龍：因為他拿 23456789 只剩 1 跟 10 沒拿到

T：為什麼會勝 1 跟 10 咧？

龍：因為他就只能拿成這 10 個數……

正：這 8 個數

龍：不是，這 10 個數，但可是這 10 個數，可是這拿成 10 的話，就只有 11 可以拿成 10，可是這樣子的話，//就拿成 0

//正：0 就好啦

正、龍：{0、10、10} 啊

T：來慢一點，可不可以把它寫下來？

過程中，就一直換人用不同的說法作詮釋，最後老師終於懂了：

T：喔~~老師懂你們的策略了，終於懂了

正：(小聲)你現在才懂喔

(然後老師把他們的方式重新陳述了一遍，兒童也跟著回應)

T：喔，你們這倒是一個怎麼樣，很好的方式

正：老師，你終於懂囉？我還以為你假裝笨

(龍小聲對正老師在演戲)

正：老師你在演戲喔？

T：我演戲，我為什麼演戲？

正：你裝不懂啊

T：你們把我認為很聰明對不對？沒想到老師是這麼笨是最後一個才懂

正：(笑)假裝

禱：老師你怎麼不知道我們在講什麼？

正：老師，龍說你演戲演的很像

(觀-92.10.30-錄影)

兒童雖然不太相信老師真的不理解，但仍會嘗試用不同的方式去詮釋。大部分的時候這樣的詮釋是解釋給同儕聽讓同儕理解，而有時則是詮釋讓老師理解，解釋給老師聽似乎也象徵著某種程度權力與師生角色的移轉，從這段對話中，我看到老師欣然接受這樣的移轉，但兒童為了減低權力移轉所帶來的壓力，仍「相信」老師是在「演戲」，為了讓自己更清楚的說明而演戲。。

為了表示理解，兒童會詮釋同儕的說法，這或許達到了張老師使用討論的上課方式的目的之一「透過同儕的互動，讓兒童用『兒童的語言』，

來帶領大家」(對-〔師〕-93.07.29-筆記)。有趣的是，這種詮釋他人想法的話語，幾乎不會出現在師生之間。通常在老師解釋某種想法之後，兒童若理解老師的說法，在解釋的過程就會以點頭，或者是發出類似「喔~~」的聲音來表示，或是在老師詢問「懂不懂」之後做反應，但就只是簡單的表示理解，不會再進一步的詮釋老師的意思；即使有其他兒童表現或是表示出不甚理解的反應，其他同儕也只是靜靜等待老師的再次詮釋，也不會主動的用另一種方式詮釋協助其他人瞭解。

## 二、探究目的：公開探究的知識建構

前述為了溝通目的所產生的言談，目的只是為了解，而探究活動，才是建構知識的主要方式。在這個課堂中，大部分的探究活動，都是在老師帶領之下進行的，偶爾一兩次由兒童主導的公開探究歷程，呈現出另一種不同的風貌。

在《拈的遊戲》單元中，針對不同的棋局，做好幾次的科學系統分析。通常老師帶領下所做的科學系統分析活動，會要求兒童先扮演對手的角色，窮盡所有可能的下法，之後再扮演「我」的角色，針對對手所有可能的下法一一分析。而有一次推論一個可能必勝的棋局{1、6、7}後，兒童便針對{1、6、7}作科學系統分析，以檢驗這個推論是否成立，在這一段沒有老師鮮少介入，完全由兒童所主導的科學系統分析，進行的方式則是先扮演「對手」的角色，說出一個可能的下法；然後立即轉換成「我」角色，針對這個下法做分析判斷；判斷完畢，隨即又跳回「對手」的角色，設想另一種可能的下法.....就這樣一直循環下去，也就是說，兒童在這段探究過程中，快速的轉換思考的焦點，讓兩種角色交錯進行，而且沒有遺漏。如此快速的分析，當然或許也是在前面幾次老師的帶領後，兒童對於

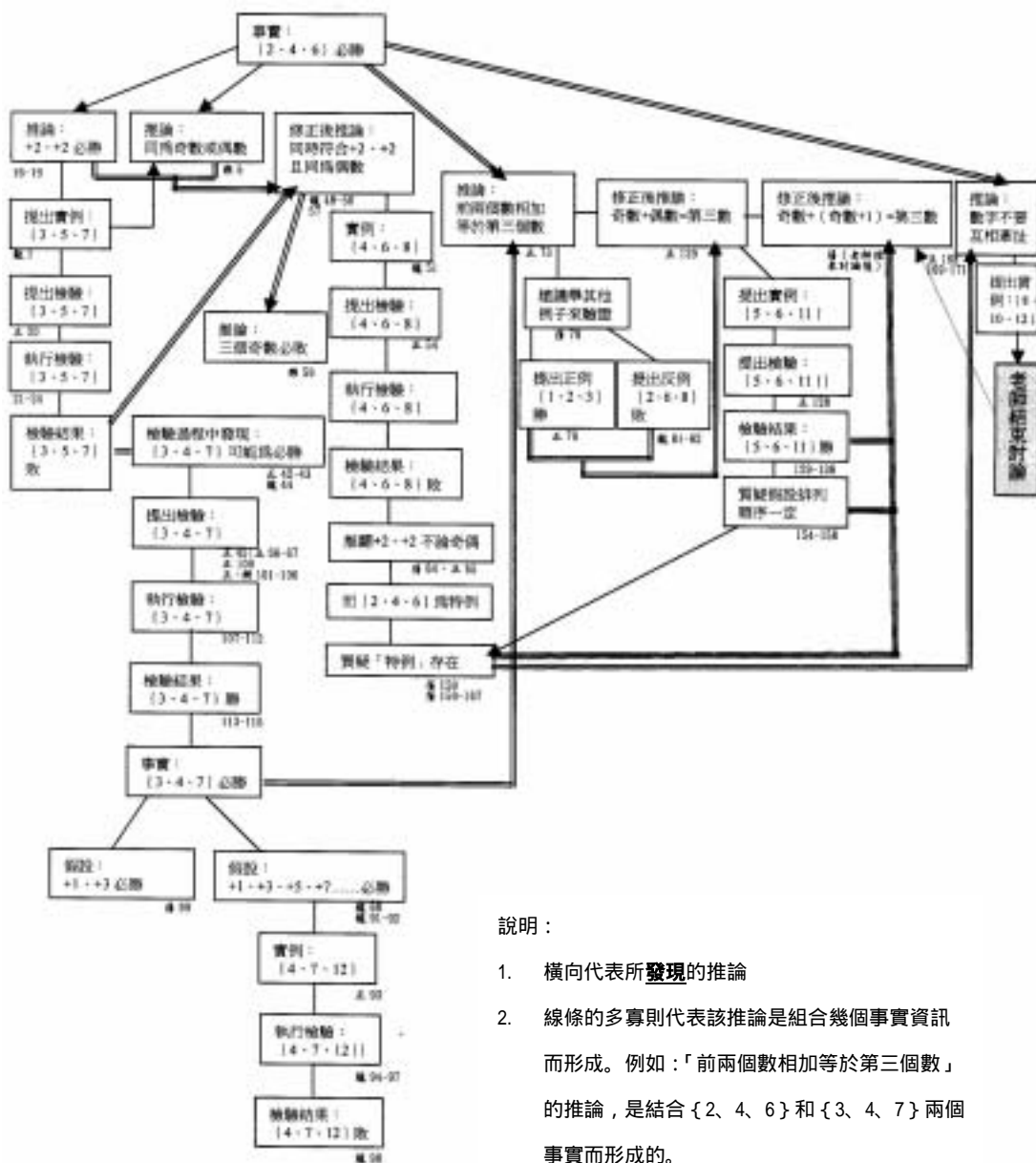
科學系統分析的方法已較為熟練，不過即使是因為熟練，他們也並非依照老師的步驟進行，在可主導探究的情境下，所顯現的應就是兒童的探究活動的樣貌。

除了數學的推理的活動外，在課堂當中，也有一部份是關於「做決定」的議題，在《拈的遊戲》單元的最後階段，老師讓兒童討論「要不要繼續推演下去」的議題兒童討論的歷程中，他們先各自表明立場、然後有人提議可以先聽聽下個單元的內容在依此做決定、接著有人提議採一堂課上新的一堂課上拈的遊戲的方法、又有人想到了可以各取所需的辦法、最後有人提出用說理的方式來說服同儕再做決定。我發現兒童做決定的方法，是「不斷變通」的，若是所提的方法有缺點或是不夠完整，兒童的作法是，不做停留的立刻跳到下一個方法。相較於老師帶領討論下的做決定，通常是在有人提出一個方法之後，因為老師的追問，兒童回應老師的問題做了方法的修正，或是回應老師的問題將方法更具體、精緻，這是一個「不斷累加」的過程；另外一種老師帶領下的做決定，是當有人提出一、兩個方法後，老師就會建議兒童進行「選擇」。兩種情境下的作法不盡相同。

綜合上述兩個例子，在兒童討論的情境下，思考是不斷快速的跳躍、變通的，但他們似乎仍能做邏輯性的判斷。

不過以上的例子似乎都太片段了，我想要透過一個更完整的歷程來看兒童討論情境下的思考。我想到在《拈的遊戲》中的一段兒童因為輸了與別組的比賽，從{2、4、6}開始的思考，實際的討論對話在《附錄3》呈現，這裡我將其歷程簡要的繪成下圖：





說明：

1. 橫向代表所發現的推論
2. 線條的多寡則代表該推論是組合幾個事實資訊而形成。例如：「前兩個數相加等於第三個數」的推論，是結合 {2, 4, 6} 和 {3, 4, 7} 兩個事實而形成的。
3. 直向代表推論檢驗的過程
4. 下方的人名代表該說法提出的人數字則代表該說法出現在文中的第幾行

圖 4-3-3 {從 2、4、6} 開始的規律推論

在這個兒童討論的過程中，透過互相的激盪，因為彼此觀點的不同導致思考的重新整合，或是因為他人的觀點架起了促發思考的鷹架，兒童的思考更豐富流動的更快速了，在這個部分，我利用這個例子也結合其他的例子來瞭解兒童如何與討論的情境脈絡互動。

### 1. 觀點的交換與整合、彼此的互補與鷹架

這一場由 { 2、4、6 } 所引發的一連串討論，最引起我注意的是兒童如何透過討論而「發現」新的推論。

在圖(4-3-3)中，我以線條數量的多寡來呈現新推論是整合幾個來源的資訊所發現的。從圖中可以看到，在剛開始的時候，兒童只有一個事實資訊「{ 2、4、6 } 必勝」，所以〔龍〕就憑藉這個資訊中數字彼此之間的「+2、+2」的關係（行 16-19），聯想出有同樣關係的數字 { 3、5、7 } 的實例（行 1）；而當兩組數字資訊「{ 2、4、6 } 和 { 3、5、7 }」出現後，〔樂〕又憑藉這兩組數字的關係推測〔龍〕的推論依據是「同為奇數或同為偶數」（行 5）；經由檢驗得到 { 3、5、7 } 必敗的事實資訊後，〔龍〕憑藉「{ 3、5、7 } 必敗」這個事實和之前的〔樂〕推論的「同為奇數或同為偶數」（行 5）結合，修正成為「同時符合+2、+2，且同為偶數」（行 48-50）的新推論。有趣的是，因為之前〔龍〕先說了他推論的實例（{ 3、5、7 }）而沒有說推論的理由「+2、+2」，所以〔樂〕才會做此猜測，也因此才會產生「同為奇數或同為偶數」的推論，而也由於有了〔樂〕猜錯理由所產生的推論，〔龍〕才有辦法再將之與新得到的事實結合。（中間過程一旦改變了一個環節（例如：〔龍〕若先說出推論的理由才舉出實例，〔樂〕就不會有之後的推論），後續所有的過程就會有所不同。

再回到討論的歷程中。就在〔龍〕結合了兩個訊息產生新推論的同時，〔正〕也根據因為{3、5、7}的敗，而發現過程中「{3、4、7}可能為必勝」(行42-43)的推論，但在這個推論「{3、4、7}為必勝」還未被檢驗時(執行檢驗是在行107-112)，就已經被用來當作後續推論的依據，例如：「前兩個數相加等於第三個數」就是以此事實做的推論(此推論出現在行73)。而過了一段時間，兒童又再回頭檢驗{3、4、7}的推論(行107-112)。

兒童不斷的累積事實，整合出新的發現(意即推論)，而這樣的累積，可能來自於一組新的數字棋局勝的事實，觀察一組三個數字之間的關係(如：+2、+2的假設，行16-19)；可能來自於由檢驗結果往回推到過程中的事實(如：檢驗過程中的發現，行42-43)；也有可能來自於經由兩組數字棋局必勝的事實推想彼此的關係(如：前兩個數相加等於第三個數，行73)也有可能藉由一組數字勝的事實以及另一組數字敗的事實，觀察兩組數字彼此的關係(如：前兩數相加=第三數，行73)或是將原有的推論整合一組特例，進而調整成新的推論(如：數字彼此之間不要牽扯，行168)，或是在整合更多事實、質疑、特例結合後修正既有的假設……，也會因為反例而縮減原本較大的推論範圍，或因為找出更多例子的共同原則形成比較大範圍的推論。另外產生新的發現的同時，兒童也會不斷的對於發現進行「檢驗」的工作，而檢驗的方法可能是提出做實際的嘗試；或會主動的提出符合假設的實例(例：行79)和不符合假設的反例(例：行81-82)。當然這些檢驗的結果，就會成為下一個發現的依據。

整段由兒童討論主導的探究歷程，因為彼此不同的觀點出現，兒童整合了不同的觀點而形成不同的或是更大範圍的論點，因此推論也更完整，就誠如標題所描述「觀點的交換與整合、彼此的互補與鷹架」。

## 2. 混亂的表象，理性的內在

接著，我再由這個探究歷程的進行順序來瞭解資優兒童的思考。在〔龍〕提出第一個例子（{3、5、7}），到他解釋推論之間（行16-19），〔樂〕藉由推測〔龍〕的假設產生的理由，又形成一個新的推論，此時同時存在了兩個推論，而〔正〕提議對第一個推論的實例 {3、5、7} 進行檢驗而且得到「必敗」（行21-24）的事實後，〔正〕立刻觀察到在檢驗過程中的其中一步 {3、4、7}（行42）可能為必勝，因此又提出了一個待檢驗的事實，隨即提出「檢驗」的行動（行45）。而幾乎同一時間，〔龍〕將第一個推論與〔樂〕所提出還未被檢驗的推論合併成為整場討論中的第三個假設：「同時符合+2、+2 又同為偶數」（行48-50），而基於第三個假設的提出，〔樂〕也將剛剛所檢驗過的事實合併成為一個結論「三個奇數必敗」（行59），〔正〕配合著第三個推論的，提出與〔龍〕一同完成假設檢驗的工作，接著他仍掛念著之前他所提的 {3、4、7}（行42）可能為必勝的事實需要檢驗，便再次提出檢驗的需求（行66-67），但未待檢驗，〔龍〕已經將這個可能的事實進一步的提出新的假設：「+1、+3、+5、+7」（行68），且完成檢驗的步驟，這時〔正〕又再回頭考慮未被檢驗過的事實，畢竟這是這個新假設的前提，因此第三次〔正〕再提出檢驗時（行100），完成了檢驗行動……。

就這樣一下子跳到新的推論，一下子又回頭檢驗舊的推論，兒童的討論好像不一定是完成一個循環之後，才轉到下一個循環，在敏銳的觀察力與不同觀點互相激盪之下，顯得非常跳躍；但他們仍然透過假設、檢驗的歷程將各個論點不斷精緻化，提出的說法也更臻精準。即使已經產生了一個經過檢驗的正確推論，當新的資料出現後，又會發現之前推論的不完美，進而回頭增修限制或改變條件，似乎愈是探究的多，事實累積的愈多，也就愈能夠發現可能需要的改變與調整，也因為知道還有更多的可能，學生就開放了彈性，讓「發現」的歷程保有探究的可能空間，這樣的體會也

增加了再次循環的可能。

大部分的時候，典型的上課型態是老師會掌握著進行的順序，所以多半看到學生依著老師所預期的方向進行思考，即使偶不同的小轉彎，但多會被老師拉回既定的道路，且兒童耗費心力的思考是在「理解」客觀情境。而這個例子所顯現的，就不是老師帶領之下的線性思考歷程，而是水平的發現與垂直的檢驗並進。在前一個部分所看到的兒童個人因應環境的思考循環歷程，在兒童討論的情境中，集合更多兒童的多個循環歷程後，因為累加、交疊，而形成了像是螺旋式的平移或擴大的歷程，看似順序混亂，但又有其邏輯，這就是資優兒童同儕討論下的思考流動樣貌。

### 3. 依賴討論脈絡的思考

又是一連串看似混亂的思考交鋒之後，老師「依慣例」請他們停下來一個一個探究，於是，〔龍〕先提出一個剛剛討論的論點，這個論點是〔杰〕在剛剛的討論中提出的。

T：來，杰，這是你剛剛提出的部分，剛剛杰提出來的部分是{ 2、

4、6 } 是偶數嘛 =

正：嗯

= 然後你們打算要進去的部分，杰你要不要把你剛剛還沒有講完的想法說出來

杰：沒有啊

//T：沒有，是怎麼樣？

//正：沒有嗎？

( 觀-92.11.13-錄影 )

發生了什麼事，〔杰〕忘記他自己提出的論點，那混亂討論情境中的記憶力呢？或許不是記憶的問題，而是因為之前在討論中的思考是「順勢」而來的，順著討論的延展、轉折而思考的，在抽出討論情境後，少了脈絡的線索，所以思考就無法延續了。這或許也能說明為何抽離情境之後，兒童常告訴我，他的發現沒有別的原因，就是「靈光乍現」所造成的。

討論的脈絡，的確是思考的重要橋樑，因為資優兒童的主動性，他們會主動的去組織脈絡、接受脈絡訊息。我回想到張老師在介紹數學符號「 $n$ 」時〔正〕的反應：

T：所以你們同意……這個是這樣，那如果，比這個還要大的數，

你們也同意是後下的人贏嗎？

正：同意

龍：只要兩個一樣

正：反正只要兩個一樣大，我還是構想後下的贏

T：無論他是一百萬，或者……

正：還是……

龍：一千億

T：都是……

正：我還是讓它變成 100

(T 在白板上寫  $\{0, n, n\} n=$

龍：未知數

(白板上寫  $\{0, n, n\} n=\text{自然數}$ )

//正：自……(跟著老師寫的，寫一個字念一個字)

//龍：自然數(跟著老師寫的，寫一個字念一個字)

正：自然數是什麼意思啊？

正：數不清嗎？

(觀-92.10.09-錄影)

〔正〕根據討論脈絡中老師所提到的「更大的數」的說法，以及一百萬、一千億等例子，進而推測了老師接續下來呈現的數學符號「n」可能就是代表「數不清」的意思。

脈絡對兒童思考有重要的影響，思考若要延展，就必須一直「在討論的脈絡中」，因為兒童離了脈絡，思路無法延續，似乎就只剩結果而沒有過程了。

不過，或許我們也不用那麼悲觀，從兒童對單元的回顧中以及我事後的訪談中，雖然兒童無法描述小細節的脈絡到結果的成形（例如：兒童無法說出他為何發現），但我還是清晰可見兒童將整個單元以及整門課程過程概念化了。

#### 4.討論情境中的個人

另外，在討論的情境脈絡中，也提供了個人延展思考的情境，先看一個例子。在單元一《數字推理》中關於如何核對彼此的解法的討論，因為前面兩個兩個互換的方法太麻煩了，所以〔俐〕提出一個新方法「讓大家檢查自己的」〔俐〕，這個說法似乎不夠明確，所以老師再追問具體的作法：

T：好，一起來要怎麼做？

俐：就是，譬如說像不要一個一個看，就是一個人把他全部……

咳……不行（喪氣狀）

T：我有點懂俐的方法喔，老師這次變聰明了，有沒有人懂俐在說什麼？

豪、綦、鴻：（幾乎同時說）就是把全部……（還沒講完俐插話）

俐：不能全部啦，我發現不能全部，因為這樣你們就不能對啦，

嗯……例如說先拿綦，再拿我的再拿你的（指豪），再拿你的

（指鴻）

（觀-92.09.03-錄影）

〔俐〕似乎一邊說著，一邊就想到方法的不可行，所以還沒有把方法說完全，就喪氣的放棄了說明。不過，似乎只有在說話的〔俐〕才想到方法的不可行，其他同儕雖然同時在聽她的說明，也表示理解，但卻沒有進一步想到方法的瑕疵。當其他人正要幫她把話說完的時後，〔俐〕就趕緊說了不行的原因，且在說的過程中，她又想到了新的方法，最後解決了問題。

這裡我看到的是自己跟自己的思辯所造成的思考流動，若把它重新放到情境當中來解讀，或許就可以瞭解，因為是處在一個「討論的情境」中，讓兒童必須說話、必須解釋自己的思考，解釋思考就必須靠後設認知，於是在說出思考的同時，後設認知即開始引導她調整與改變。

另外，討論的情境也提供了個人隱蔽的空間，其實，兒童也是害怕在團體情境中太過突顯個人的。例如：在《數字推理》單元「抽題求解」的任務時，因為〔豪〕說題目太簡單是小看了自己，於是老師表示要給他較難的題目時，他就立刻拒絕了，後續訪談〔豪〕告訴我，那是因為「如果你解不出來，【別人】就會說你不行（笑）」（訪-〔豪〕-92.11.25-錄音）；在最後回饋時兒童也告訴我，他們是喜歡挑戰的，但是要「大家一起討論比較好」（杰）因為「如果只有你自己，如果做不出來會被人家笑耶，想不出來，很尷尬耶」（杰）（回饋-〔杰〕-94.01.12-錄音）。所以若是隱身在團體中，不論是因為團體動力的影響或是共同分擔了責任，總之挑戰的勇氣增加了。

再回到那一場從 { 2、4、6 } 開始的豐富討論。在這場討論中兒童似乎脫去了「每一個個人」的角色，他們心中關心的只有那個企圖找出的規律，思考因之而流動，所以整段過程中，我很少看到兒童關心某個說法「是誰說的」，他們只注意「說了什麼」，又這個說法「對自己產生的什麼影響」，激盪出怎樣的思考，當討論的過程當中「沒有了個人，只有目標」之後，心靈似乎更自由了！



對照之前兒童還沒進入這種狀態時，兒童關心著「個人」，除了張老師每次都要注意到「每一個人」都有表達意見，就連組長上台帶領討論時，發現沒有說話的人時也會詢問「樂，你的意見呢？」；另外有一次張老師說到之前某一個論點有誤時，〔杰〕有點責怪的說「是龍提的」，〔蓓〕更追加一句「龍很奇怪耶！」；還有一次，在經過一場激辯之後的，下課後〔正〕很生氣的覺得「龍一直在否定他」，為此張老師還將〔龍〕和〔正〕兩人留下來談話了許久。對於〔龍〕這個被指稱為否定別人的兒童，張老師建議他要尊重每一個人的想法；而對於〔正〕，張老師提醒他要能夠接受別人對他的質疑，才會進步（觀-92.10.16-實地筆記）。就像黃幸美（民 93）提出數學課室裡促成討論的就是要形成尊重他人、公平安全的溝通環境。這的確是討論能夠成功的重要基礎，但我觀察兒童從注意個人到團體豐富討論的轉變，不只是學會了互相尊重，與聆聽的態度，重要的是他們對於議題的關心已經勝於對於個人的關心，也就是說當目標一致且強烈時，團體討論就容易形成了。兒童的合作學習，常常在老師的引領之下嘗試著「分工」，這樣固然表面看起來「每個人都參與了」而且參與的一樣多，但是在自由討論的氣氛中，我好像才看到兒童真正的合作。真正的合作並不是能力的互補或是責任的分工，而是自由的、流暢的為了目標互相努力著，就如同在訪談中〔正〕提到「他贏沒有關係啊！我輸的話就會討論為什麼要下成那樣，他會說我為什麼下成那樣，不管你贏或他贏都要討論」（訪-〔正〕-93.10.12-錄音），在討論的過程中，扮演著「對手」或「我」的角色，無論輸贏，都是為了最後找出規律的目標。

## 小結：

如果當兒童的討論可以成為公開探究的主要方式時，其探究的方式就會與教師帶領之下的探究呈現出不同的型態，若老師沒有將思路拉回線性的主軸上，兒童的討論便是不斷循環擴大的歷程。

兒童討論提供了個人兩個鷹架。首先，因為他人的不同觀點，經過整合，兒童可以爬的更高、更遠；再著，情境營造了個人得以延展或隱蔽的空間，脈絡讓兒童能夠依循著推演。最後這個兒童討論搭築出來的全貌，就是像滾雪球般的循環且擴大。

或許資優兒童是適合「討論」的，因為他們善於處理複雜的訊息，在團體中快速且複雜訊息下做的思考，可能比他一個人慢慢的、細細的思索還要好；也因為他們敏銳的覺知，在新訊息出現後，就能立即的重組，思考也就一直跳躍；如果有需要（就像過程中 { 3、4、7 } 的檢驗是後續推論的前提），他們也會回頭去拼湊那塊未完成的部分，但是有些跳過的議題，因為被後續更高層的推論所替代，就沒有回頭的必要了。這樣看似雜亂無章的討論，其實是有頭緒的。那麼，要忍受混亂的是誰？可能是老師。所以老師常會介入要求清楚的將個別議題分開一個個討論，但或許這樣的「分開」，每個議題都成為單獨事件後，似乎也就減少了拆解、整合、重組的機會了。