第二章 文獻探討

本章針對研究主題，探討國內、外相關研究，藉以了解已有的研究成果並形成本研究之架構。本章共分四節，第一節探討數學解題歷程；第二節探討加減應用題問題基模；第三節探討表徵與基模圖示表徵之相關理論與研究；第四節探討解題表現的評量方法。

第一節 數學解題歷程

壹、數學解題的意義

關於數學解題的意義，學者曾提出幾種見解。Lester(1980)認爲數學解題是指個人面臨一種沒有把握哪種算式可以保證獲得解答的情境，在此情境中，個體必須利用所擁有的相關訊息去獲得問題解答的歷程(涂金堂，民 83)。Kilpatrick(1985)從心理層面來描述數學解題，將其定義爲個體在情境中，爲了克服障礙達成目標，使用數學概念、原理方法尋求答案的過程，亦即把解題看成”人爲了達成某種目的而做的一些活動”。Mayer(1987)認爲問題有已知數（given）、目標（goals） 和障礙（obstacles）三個特質，而解題乃是由已知狀態轉移動到目標狀態的歷程。綜合上述，研究者認爲數學解題即是個體

在面臨一時無法獲知答案之數學問題時，運用自己的數學知識與經驗排除障礙，求出解答目標的過程。

貳、數學解題的歷程模式

數學解題歷程的研究是認知心理學家或數學家瞭解學習者如何解決問題的重要方法之一。最早的解題歷程模式由 Polya 於 1945 年提出，其指出解題歷程分成四個階段：（1）瞭解問題；（2）擬訂計畫；（3）執行計畫；（4）回顧解答（Polya，1945）。後來的學者以 Polya 的四階段解題歷程為綱，相繼提出各種模式，各種解題模式亦都包含多個次階段之歷程。茲分述如下：

一、Polya 的解題歷程模式

Polya(1945)將解題歷程分成四個階段，每一階段內包含一些策略：

（一）瞭解問題：瞭解問題的事實、已知數和未知數的關係。

（二）擬訂計畫：運用學過知識找出已知數與未知數關係，並擬定解題計畫。

（三）執行計畫：依據計畫執行演算，並檢核每一步驟。

（四）回顧解答：檢核所得的答案是否正確，嘗試使用不同方法檢核答案。

除了上述四階段與解題策略外，Polya 對如何想出解題計畫提出一些建議策略，包括：是不是所有的資料都用過了；問自己知不知道相關的問題；畫圖試試看；試著重敘問題；嘗試解答某一部分問題；試著想出可幫助自己找出未知數的其他訊息；看看能不能逆向解題等(Polya, 1957)。

二、**Schoenfeld的解題歷程模式**

Schoenfeld（1985）強調數學解題的研究方向需要考慮資源（resources）、捷思（heuristics）、控制（control）、與信念系統（belief system）四個變項，此四個變項形成之解題架構如圖2-1-1。在此架構中，資源是指解題者擁有有關解題的相關數學知識，包括數學事實、程序及技巧。捷思是指能幫助解題者解題之一般性技巧或方法，如簡化問題、畫表格等。控制則是聚焦在解題者解題時，如何決定計畫、選擇目標、及如何監控與評估結果等方面，相當於心理學的「後設認知」(metacognition)概念，是一種監督的作用。信念系統則是指解題者對數學觀點，包括決定選擇何種策略去處理這個問題，如何去使用該策略或是執行它會有多困難等，它是建立在資源、捷思和控制之上。

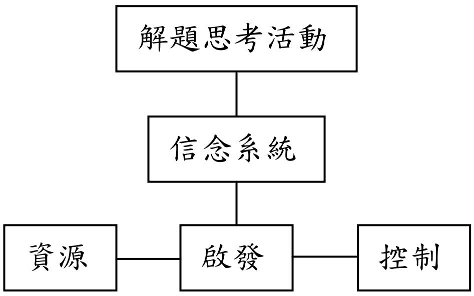


圖 2-1-1 Schoenfeld的解題架構圖

資料來源：Schoenfeld（1985）

Schoenfeld（1985）指出上述四個變項中，以相當於後設認知概念之控制變項為解題的關鍵因素，其從控制的觀點提出包含六個階段的數學解題歷程模式：

（一）閱讀（reading）：受試者開始閱讀問題；

（二）分析(analysis)：受試者將問題簡化或重述，以便更瞭解問題。

（三）探索(exploration)：受試者尋找已知條件、未知條件以及與問題目標彼此間的關聯性。

（四）計畫(planning)：受試者擬定解題計畫，並檢視計畫是否與問題解決有關，以及評估計畫的適當性。

（五）執行(implement)：執行計畫並檢視是否依計畫執行。

（六）驗證(verify)：受試者檢視解題結果是否合理與正確。

三、Garofalo 和 Lester 的「認知-後設認知」數學解題歷程模式

Garofalo 和 Lester（1985）也重視後設認知對數學解題之影響，故其提出與 Schoenfeld 類似的數學解題歷程模式。其模式所涵蓋的解題歷程如下（引自邱上真等人，民 84）：

（一）定向（orientation）:解題者評估及瞭解問題；

（二）組織（organization）：解題者發展解題計畫並選擇解題策略；

（三）執行（execution）：解題者規範自己的解題行為以配合計畫；

（四）驗證（verification）：解題者評鑑上述三個歷程。

四、Mayer 的解題歷程模式

Mayer（1985,1992）對數學解題歷程及其所涉及的知識作了結構性的分析。他將數學解題歷程分爲問題表徵與問題解決兩大階段。其中問題表徵階段又包含問題轉譯與問題整合兩個成份；問題解決階段則包含解題計畫及監控與執行解題兩個成份。茲將兩大階段、四大成份，以及其所涉及之各種知識分述如下：

（一）問題表徵：指解題者將數學問題之文字或圖案轉換成心理表徵。

1、問題轉譯

問題轉譯是將數學問題中的每個句子轉換成內在的心理表徵，在此歷程解題者需要具備「語言知識」（linguistic knowledge）以了解題目中的文字；此外，還需具備「語意知識」（semantic knowledge）以了解題目中的含義。

2、問題整合

問題整合是問題中所陳述的資訊整合而成連貫一致的問題表徵，在此歷程解題者必須能夠認識問題的類型，也就是需要基模的知識（schematic knowledge）來進行問題整合。此外，能夠選擇有用資料、用圖示或圖畫來表示問題等策略也都有助於解題者將問題中所有的陳述整合成連貫一致的表徵。

（二）問題解決：爲解題者選擇解題程序並執行計算以得到答案的過程。

1、解題計畫及監控

解題計畫及監控是指計畫解題步驟之順序並監控之，在此歷程解題者需要具備策略知識，能將問題分成較小的次目標。

2、執行解題

執行解題是指應用算數法則來執行解題計畫以求得最後答案，在此歷程解題者所需之知識爲能正確及自動化執行計算工作的程序性知識（procedural knowledge）。

由上可知，Mayer（1992）數學解題包含兩大階段，涉及四種成份，解題者需具備五種類型知識，茲將其解題歷程模式之內涵以表 2-1-1 表示，並舉例說明之。

表 2-1-1 Mayer 的解題歷程模式

例題：冰箱裡有 146 顆水餃，媽媽又買了 60 顆水餃，問冰箱裡現在有幾顆水餃？

階段	成份	知識類型	舉例說明
問題表徵	問題轉譯	語言知識	能瞭解「冰箱」、「媽媽」的意思
		語意知識	能瞭解「又買了」的含義
	問題整合	基模知識	能知道此題爲「改變」類型求結果量之問題
問題解決	解題計畫與監控	策略知識	能選擇使用加法策略
	執行解題	程序性知識	能應用算術的程序法則計算 146+60 答案

(資料來源：研究者整理自 Mayer,1992，自行舉例)

五、Krulik 和 Rudnick 的解題歷程模式

Krulik 和 Rudnick（1989）也提出一套解題歷程模式，該模式發展的目的在於為高中教師設計各式各樣的數學活動，藉以配合在數學解題歷程各步驟中所含括的解題技巧教學，故此模式最大的特點在於其詳列各解題步驟的子技巧（sub skills），其解題模式架構如表 2-1-2 所示:

表 2-1-2 Krulik 和 Rudnick 的數學解題歷程模式

閱讀與理解問題→	探究問題→	選擇策略→	執行解題→	回顧與驗證解答
			能運用計算或代數技巧	決定答案是否有意義、是否合理、是否回答了問題的要求
子技巧 1.能辨別包含在問題內的各資料片斷及其組合。 2.能用自己的話重述問題。 3.能辨別同義詞、相反詞。 4.瞭解語詞在數學上的意義。 5.能找出題目中的問題是什麼。 6.能從題目中找出所提供的重要事實。 7.能針對所提供的答按設計問題。 8.能記住題目中所提供的訊息以及所要問的問題。 9.能利用圖片所提供的訊息運用想像力設計問題。	子技巧 1.能分辨題目中哪些是解題時所需用到的訊息，哪些是不必要的。 2.能從圖表中讀取訊息。 3.能用觀察或簡單調查蒐集資料，並用表格或圖表來表示此資料且能解釋之。 4.能從圖表中讀取資料並回答問題。 5.能將問題繪製成圖表。 6.能將文字轉換成符號或數式。	子技巧 **認識模式** 1.能認識題型 2.能分辨不同題型 3.A：B=C：D 提供 A、B、C 時能指出 D。 4.能歸納題意找出題型。 **簡化與變形** 5.能簡化數據減少演算程序。 **實驗與模擬** 6.能依據問題進行實驗與模擬。 **推測與驗證** 7.能預估數值、推測可能答案。 **邏輯推演** 8.能從一組資料中獲得結論。 **編製表格** 9.能編製表格 **逆推法** 10. 當結果已知時，能利用逆推法求出未知的初值。能找出通則、能找出問題相異處、能進行類推與類比。 11.能列出算式	子技巧 1.能找出欠缺的資料，並完成運算程序。 2.能進行兩階段或多階段性的運算程序。	子技巧 1.能比較估計值與計算值。 2.能利用估計值判斷計算值的合理性。 3.能利用計算值判斷估計值的正確性。 4.能選擇最合理的答案。 5.能判斷答案是否正確。 6.能找出錯誤的運算或答案。

(資料來源：Krulik & Rudnick，1989；引自邱上真等人，民84，80頁。)

參、小結

綜觀上述幾位學者對數學解題歷程模式，可發現其相同之處在於均對解題活動進行認知結構分析，視解題為一包含多個步驟與多元成份之歷程；其相異處在於各個學者所強調重點或有不同：Polya的解題歷程模式具原創性；Schoenfeld、Garofalo和Lester將後設認知融入數學解題的認知歷程中，強調控制因素在解題歷程的重要性；Krulik與Rudnick依照解題所需的數學技巧，發展成教學模式；Mayer從認知心理學的觀點，探討解題者對問題形成表徵的過程，再依其表徵形式形成解決問題的計畫。

在上述的解題歷程模式中，Krulik 與 Rudnick 的解題模式是以高中學生為對象而設計，其將解題的歷程模式分成閱讀與理解問題、探究問題、選擇策略、執行解題及回顧與驗證解答六個步驟，內容精緻而豐富，且詳細羅列解題的各種子技巧，適合作為高中數學老師教學設計之參考，而本研究之對象為國小三年級之學生，故不以其作為本研究之解題模式理論依據；而在 Schoenfeld、Garofalo 和 Lester 之解題歷程模式中，兩者都強調解題歷程之後設認知因素，因後設認知涉及較複雜的認知技巧，且本研究並不特別強調後設認知，故僅作為輔助參考。相對於此，由於 Mayer 之解題歷程模式具有簡單且明確之結構性，對於解題階段、解題成份及相對應所需知識類型也有具體詳盡之分析，故可依照此理論進行教學步驟設計。

綜上所述，本研究以 Mayer 解題歷程模式為本研究之解題課程教學之解題歷程的理論架構，依其理論解題歷程分為問題表徵與問題解決兩大階段，其中問題表徵階段又包含問題轉譯與問題整合兩個成份；問題解決階段則包含解題計畫及監控與執行解題兩個成份。

第二節 加減應用題問題基模

國內外對於探討解題歷程的研究中，有相當多是以簡單加減應用問題作爲研究題材（e.g., 古明峰，民 86；吳昭容，民 79；林淑玲，民 88；林秀燕，民 93；馬祖平、蔣治邦，民 92；翁嘉英，民 78；徐文鈺，民 81；張馨尹，民 90；許家驊，民 82；黃美華，民 93；葉雪梅，民 79；鄭人豪，民 93；謝毅興，民 80; Fuson& Willis,1989; Jitendra & Hoff,1996; Jitendra, Griffin, & McGoey,1998; Jitendra, DiPipi, & Perron-Jones, 2002; Jitendra,2002; Xin, Jitendra, & Deatline-Buchman, 2005; Willis& Fuson,1988)，Carpenter(1985)指出，簡單加減應用問題會成爲應用題的研究重心的原因包括其問題題目型式單純、容易於釐清題目與題目之間的差異。此外，此類題目有多樣的類型，有利於於發現解題策略和錯誤類型的變化。茲就加減應用題之結構、問題基模及評量方法之相關研究進行文獻探討如下。

壹、加減應用題之結構

加減應用題則是一種利用文字敘述的加減計算題形式。Marshall 於 1987 年認爲，應用題的內容依問題句型的不同包含三部分（林淑玲，民 88）：

一、陳述句(assignment)：說明人事物與數量間的直接關係

二、關係句(relation)：說明人事物間在數量上的對應、互動或比較的關係

三、問題句(question)：表示問題中所要求的目標。

例如：在「哥哥有 20 顆彈珠，送給弟弟 5 顆後，哥哥還有幾顆彈珠？」此例題中，第一句陳述哥哥與彈珠數量的直接關係，第二句表示哥哥與弟弟的贈送關係，第三句則提出本題目所要求的解題目標。

貳、加減應用題之問題基模

基模為Piaget認知理論中的基本概念，係指個體用以認識周圍世界的基本模式（張春興，民78），依Piaget的觀點其是指可以重複使用或進一步推廣的運作系統。不論是活動的類型或是心智上的動作，它們是用來改變情境的狀態，作為同化（assimilation）的工具。當學生進行解題活動時，除了外顯的解題行為外，內在的解題運思亦同樣跟著進行。而運思所提取的基模，即是曾同化過後的情境（張淑怡，民84）。

數學應用題的解題歷程是數學教育的重要主題(Lewis,1989)。較早期的研究偏重問題情境中特殊情節事件所產生的作用，如題目中關鍵字的運用，或數字大小的影響等，這些研究偏重問題的表面、機械的方法，而忽略了問題概念理解在解題過程中的重要性(Ginsburg &Yamamoto ,1986 ; Peterson ,Carpenter & Fennema,1989)，學生往往缺乏解題歷程所需運用的問題基模，致使其不容易將應用題文句的陳述意義及概念表徵，轉譯成有效的計算，以致解題失敗(Mayer,1985,1992)。

而解題歷程所需運用之「問題基模」係指個體用以認識應用問題問題類型的基本模式。Riley等人（1983）認為解題的過程中，解題者需要使用問題基模來理解問題情境，其依照問題的語意關係結構，將簡單加減應用題分為

「改變」、「合併」與「比較」三類之問題基模類型，其可再依加減法情境及未知數性質再分成若干類（Riley et al.,1983)，茲分別說明如下：

一、改變類型的問題基模

指一個數量經過增減改變之後，形成另一個數量的問題基模類型，對於問題內數量的增減行爲作動態描述。其依加減法改變情境包括「變多」（增加）和「變少」（減少）兩種問題基模類型；依未知數性質可細分爲「結果量未知」、「改變量未知」和「起始量未知」三種問題基模類型。

二、合併類型的問題基模

探討一個大集合和兩個互補子集合之間的關係，對於問題中兩個數量作靜態描述。依未知數之性質可分爲兩種問題基模類型，第一種問題基模類型是先給大集合的總數和其中一個子集合的個數，求另一個子集合的個數，此爲「子集合未知」之問題基模類型；另一種問題基模類型爲先給兩個子集合的個數，求大集合的總數，此即爲「總數未知」的問題基模類型。

三、比較類型的問題基模

比較兩個數量大小或多寡的問題，問題中兩個數量屬靜態描述，依未知數的性質可分爲「差異量未知」、「被比較量未知」和「參照量未知」。

茲針對上述加減應用題問題之分類各舉一例題整理成表2-2-1。

表2-2-1 加減應用題的問題基模類型與例子

問題類型	依未知數分類	例　　子
改變類型	結果量未知（變多）	哥哥有 100 元，爸爸再給他 200 元，請問哥哥現在有幾元？
	結果量未知（變少）	哥哥有 100 元，買文具花掉 20 元，請問哥哥現在有幾元？
	改變量未知（變多）	哥哥有 100 元，爸爸再給他一些錢後哥哥就有 200 元，請問爸爸給哥哥幾元？
	改變量未知（變少）	哥哥有 100 元，買文具花掉一些錢後剩下 50 元，請問哥哥花掉幾元？
	起使量未知（變多）	哥哥有一些錢，爸爸再給 100 元後哥哥就有 200 元,請問哥哥原來有幾元？
	起使量未知（變少）	哥哥有一些錢，買文具花掉 20 元後就剩下 100 元，請問哥哥原來有幾元？
合併類型	總數未知	哥哥有 100 元，爸爸有 200 元，請問哥哥和爸爸共有幾元？
	子集合未知	哥哥和爸爸共有 200 元，爸爸有 100 元，請問哥哥有幾元幾元？
比較類型	差異量未知	哥哥有 100 元，爸爸有 200 元，請問哥哥比爸爸少幾元？
	被比較量未知	哥哥有 100 元，爸爸的錢比哥哥多 200 元，請問爸爸有幾元？
	參照量未知	哥哥有 100 元，哥哥的錢比爸爸少 200 元，請問爸爸有幾元？

(資料來源：參考翁嘉英，民77，8頁，題目由研究者舉例。)

在 Riley 等人(1983)探討學生問題基模發展與問題難度的研究中，使用三個計算技能相同（2+4=__）的加減應用題爲研究材料：

改變類型問題：小喬有兩顆彈珠，湯姆又給小喬四顆，小喬現在有幾顆彈珠？
合併類型問題：小喬有兩顆彈珠，湯姆有小喬四顆，他們一共有幾顆彈珠？
比較類型問題：小喬有兩顆彈珠，湯姆比小喬多四顆，湯姆有幾顆彈珠？

Riley 等人的研究結果發現不同類型之問題難度有差異，幼稚園至國小三年級的兒童在不同類型問題的表現有所差異：全部的兒童在改變類型問題的表現都很好；幼稚園和一年級的兒童在合併和比較類型的問題表現不佳，二、三年級兒童的表現就很好。Riley 等人對此研究結果提出的解釋爲：年紀較小的幼稚園兒童只具有改變類型的應用題基模，相對的，年紀較大的兒童已具備較多類型的問題基模，因之，學生在比較類型問題產生較多的錯誤乃是因爲學生缺乏適當的基模，非因其缺乏適當的計算技能（Riley et al.,1983)。

由上述可知問題基模在數學解題中之重要性，當學生缺乏問題基模知識或是使用錯誤基模來組織問題時，即使學生具備熟練的數學計算技能，其還是會產生解題錯誤。相對的，若學生已具備若干問題基模時，其可藉其組織相似問題，在面對新問題時，其認知結構中問題基模亦可作爲同化新問題情境的工具。因之，在數學解題教學中，發展學生的問題基模是不可或缺的。據此，本研究在進行解題課程設計時，特別將問題基模的發展納入課程內涵，以「認識加減應用題之類型」爲課程的主題之一，期能透過實驗課程來發展學生的加減問題基模知識，使學生得以藉此問題基模知識對加減應用題之題目進行辨識、分類，並以此作爲發展問題基模圖示表徵的依據，進而提升數學解題表現。

參、問題基模的評量方法

關於問題基模的評量，研究上常以分類作業（sorting tasks）作爲評估問題基模的方式（鄧少林與蔣治邦，民 82）。也就是爲了探索學生對不同問題情境的理解，要求學生對問題進行分類，學生必須先透過問題的某些特定訊息，再決定以何種基模整合問題。以此方式進行評量的目的在於探知學生理解問題時所依賴的訊息，並藉此推論出背後的問題基模。Morales,Shute 和 Pellegrino（1985）以國小三、五、六年級的學生爲研究對象，要求他們對 16 題加減應用題進行分類作業，藉以分析兒童的問題基模與其解題表現的相關，其分析結果顯示不同年級的學生表現出不同的分類結果，其發現以三年級的學生的問題基模最缺乏。

承上，本研究在進行問題基模與基模圖示表徵解題課程教學後，亦將以分類作業的方式來評量學生加減應用題問題基模的形成情形；在分類作業中包含三種應用題之問題類型，分別是「改變變多」、「改變-變少」、「比較」三種應用題類型，藉以探知學生在三種問題類型之問題基模形成的情形。

肆、小結

綜合上述，可知問題基模在數學解題佔有重要地位，其可作爲解題者同化新問題情境的工具，若解題者缺乏問題基模時則容易產生解題錯誤。據此，在本研究的課程設計中，將先以「認識加減應用題的問題類型」課程主題來進行加減應用題問題基模教學，使學生先具備加減應用題的問題基模知識，以作爲後續「基模圖示表徵解題教學」的基礎，並於教學實驗後使用問題基模分類作業來瞭解學生問題基模形成之情形。

本研究之「認識加減應用題的問題類型」課程主題，僅針對改變類型及比較類型加減法文字題來進行問題基模教學。其原因在於本研究的研究對象爲三年級學童，如果三種類型的題目一起進行教學，恐其對三年級學生造成認知負荷過重的情形；但是如果只有針對單一問題類型來進行教學，學生也有可能僅使用上課所學的單一方法來解題，因而不易探討學生究竟是真正習得基模圖示表徵解題技巧，或者只是套用習得技巧而已。因此，本研究僅以以「改變-變多」、「改變-變少」及「比較」類型問題爲研究材料。

此外，在「認識加減應用題類型」的課程中，爲了使三年級學生更能瞭解未知數的性質，將以更適合三年級認知發展的語詞來介紹說明；在改變類型問題中以「原來的量、改變的量、結果的量」之名詞來替換「起使量、改變量、結果量」；在比較類型問題中，以「多的量、少的量、相差的量」未知數之名詞來替換「被比較量、參照量、差異量」。期能透過實驗課程來發展學生的加減問題基模知識，使學生得以藉此問題基模知識對加減應用題之題目進行辨識、分類，並以此作爲發展問題基模圖示表徵的依據。

第三節 表徵與基模圖示表徵

壹、表徵的意義與數學學習

表徵爲認知心理學研究重點之一，由數學解題歷程模式分析可知其在數學解題上具有重要性，也是數學學習不可忽略之能力。在認知心理學上，表徵係指將外在現實的事物以另一種較爲抽象或符號化的形式來代表的歷程；訊息處理觀點上，則認爲表徵是個體在訊息處理中，將訊息編碼後，轉換成另一種形式，以便儲存或表達的歷程（張春興，民 78）。

許多研究學者對於表徵的意義與特性功能曾提出一些看法，游自達（民 84）指出表徵是人類學習的重要媒介，藉由「表徵」作用，個人得以理解外在世界、簡化思考過程、進行運思，並與他人溝通；Rumelhart 和 Norman (1983) 曾把表徵看成是一種「替代事物的模式」，亦即「用某種事物來取代另一種事物的效應」；所以表徵即是以圖形、表格、符號、心像等不同型式來代表存在心中的事物；蔣治邦(民 83)認爲表徵即是用某一種型式，將事物或想法以另一種較爲抽象、型式化、符號化的方式來代表，並將他重新表現出來，以達成溝通之目的；美國數學教師協會(NCTM,2000)也主張數學表徵是一種數學概念的呈現方式，代表人們對於數學概念的理解與運用；蔣志邦（民 83）認爲表徵是個人對於問題的理解所形成的一種轉譯方式，用來幫助思考、溝通、以及解決問題，表徵具有作爲「運思的材料」與「溝通的媒介」的兩種功能。

貳、數學表徵的分類

關於表徵，由於所持的角度不同，學者對於表徵的分類出現不同的觀點，以下針對較常為表徵研究者所運用之三種分類觀點敘述說明：

一、由「運思材料」觀點來分類

Bruner認為人類經由認知表徵的過程獲得知識，其由運思的觀點，將運思的材料分為三種表徵形式，分別是動作表徵(enactive representation)、圖像表徵(iconic representation)、符號表徵(symbolic representation)。動作表徵是指個人必須藉助實物或具體物的操弄活動來進行運思。圖像表徵是指當具體物消失時，兒童在腦中能依據實物的影像，自己製作心像而進行內在運思活動。符號表徵則指運用符號、語言文字為依據認識外界事物（Bruner,1966）。依據Bruner的觀點，兒童數學運思的材料乃是從使用具體的實物（如三個花片）逐漸轉換為畫圈（○○○）進而使用抽象符號（3）來表徵，且不再依賴外在刺激；但在使用抽象符號之前，學生仍必須從具體的活動中學。

二、由「溝通媒介」觀點來分類

Lesh et al.(1987)是表徵為數學溝通的媒介，其由此觀點重新描述了表徵的類別，認為數學概念有五種不同的表徵形式，其彼此間有轉換關係且為平面網狀式的互動發展，描述如圖2-3-1。五種表徵形式分述如下：

（一）實物情境

由真實情境或知識來解釋與解決類似的問題情境。

（二）具體操作

如算數積木、圓形分數、花片板等教具。

（三）圖形與圖表

靜態的圖示模式，如：面積圖、數線等。

（五）語言符號

日常生活中常用的口語符號，如：二分之一。

（六）書寫符號

常用的數學算式或數學符號，如：5＋4＝9。

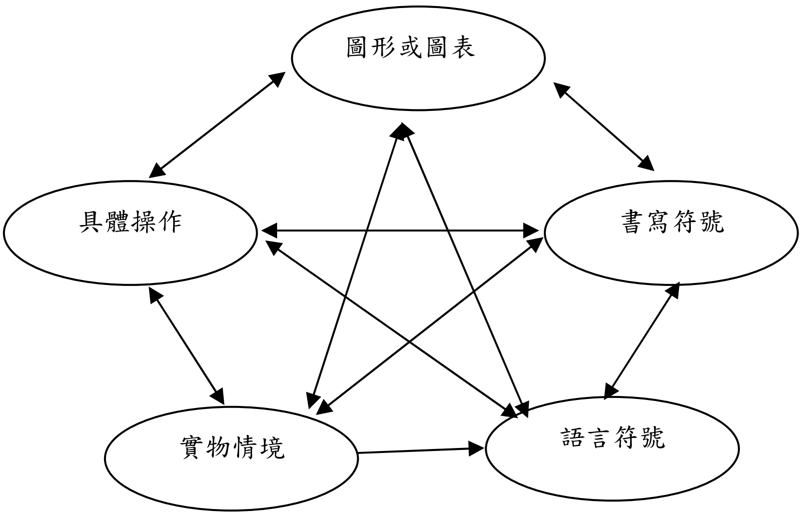


圖 2-3-1 表徵系統的交互作用模式

(資料來源：Lesh, Post, ＆ Behr,1987，p.34)

三、由「認知歷程」觀點來分類

Kaput(1987a,1987b)從認知歷程的觀點，將數學的表徵分爲四類，第一類爲認知與知覺的表徵(cognitive and perceptual representation)：個人內在對於知識與訊息的表徵，也就是個人腦中訊息儲存與轉換的形式；第二類爲解釋性表徵(explanatory representation)：爲連結自然語言或心像與其他數學符號間關係的系統，用以描述心理結構的模式，也就是心理學家所建構的一種假設性實體，用以說明個體的內在表徵；第三類爲數學內的表徵(representation within mathematics)：以數學的某一結構呈現另一結構特性的系統；第四類爲外在符號表徵(external symbolic representation)：是以外在的符號來表徵數學概念的系統，透過外在符號表徵個人得以進行數學思考並與他人溝通數學觀念，而數學概念的存在並不受外在表徵符號改變的影響。

整體而言，此四類表徵可分成兩種，前三類爲「內在表徵」，第四類爲「外在表徵」。內在表徵是指透過不同的編碼而存在個人心中或腦海中的心智運作。而外在表徵則是將內在表徵外在化，用不同的型式表現出來。個人對於外在表徵的應用，反映出知識的內在表徵； 相對的，個人對於數學知識及數學關係的內在表徵也受到外在表徵的影響。換言之，外在的情境及表徵形式影響內在認知表徵。

綜合上述學者的看法，可以將這三種不同觀點的表徵分類整理如下表2-3-1：

表 **2-3-1** 不同觀點的表徵分類

不同觀點	提出學者	表徵分類形式
運思材料觀點	Bruner	動作表徵 圖像表徵 符號表徵
溝通媒介觀點	Lesh et al.	實物情境 具體操作 圖形與圖表 語言符號 書寫符號
認知歷程觀點	Kaput	認知與知覺的表徵 解釋性表徵 數學內的表徵 外在符號表徵

（資料來源：研究者自行整理）

四、小結

由上述文獻可知Bruner(1966)、Lesh et al.（1987）與Kaput(1987a,1987b)都在研究中討論不同的表徵形式，不過他們的分類觀點有所不同。承上，本研究之基模圖示表徵以問題基模知識爲基礎，融合Bruner的圖像、符號表徵，包含Lesh等人所提出之圖形、書寫數字符號等表徵形式，屬於Kauput觀點之外在表徵，透過基模圖示表徵的設計與教學，探討基模圖示表徵對加減應用題解題表現的影響。

參、基模圖示表徵相關研究

目前，國內外有許多運用表徵策略教學來提升學生數學解題表現的研究（e.g., 林淑玲，民 87；林香，民 91；徐文鈺，民 81；張熙明，民 92；陳雯貞，民 93；楊淑芬，民 89; Cobb, Yackel & Wood, 1992; Goldin & Shteingold, 2001; Lesh et al.,1987）結果指出，適當的運用表徵教學策略對於學生數學解題表現是有幫助的。在兒童是否能自行產生圖示表徵方面，Dufour-Janvier et al.(1987)指出若要兒童從文字或符號轉換到圖形、圖示等外在表徵並不容易；謝毅興(民 80)之研究也指出要求二、三年級學童對應用題進行圖示表徵時，可能會因增加認知負荷而對增進解題表現沒有成效。由上可知多數學者肯定教師運用表徵策略教學對數學解題表現具有正面影響，然而，若要進一步要求學生自行產生表徵圖形的話並不容易。

除了上述考量表徵策略對解題的影響之研究外，國內外有些解題教學研究結合了「表徵策略」與「問題基模」因素來探討其對加減應用題的解題影響(e.g., 古明峰，民 86；吳昭容，民 79；謝毅興，民 80; Fuson& Willis,1989; Jitendra & Hoff,1996; Jitendra, Griffin, & McGoey,1998; Jitendra, DiPipi, & Perron-Jones, 2002; Jitendra,2002；Willis& Fuson,1988; Xin, Jitendra, & Deatline-Buchman, 2005），其爲一種結合問題基模知識且以基模爲基礎的表徵策略教學，也就是本研究所欲探討之「基模圖示表徵」策略，大多數研究結果顯示結合基模知識的圖示表徵策略能夠協助學生更容易轉譯、整合應用題的訊息，進而促進解題表現。Jitendra（2002）進一步指出基模圖示表徵與一般表徵的差異在於它更能夠幫助解題者組織問題訊息而促進問題轉譯與問題解決。茲將國內外幾個重要的相關研究簡述如下：

一、國外研究

（一）Lindvall 與 Tamburino 的基模圖示表徵系統

Lindvall 與 Tamburino 結合問題基模知識與表徵策略而發展的基模圖示表徵系統，其係依據 Briars & Larkin(1984)對加減法應用題的分類知識來設計表徵圖示，適用對象爲幼稚園及國小低年級兒童，該系統共設計出八種圖(如圖 2-3-2)。並以一年級兒童爲研究對象，針對此八種問題類型進行訓練課程後，研究結果發現兒童不只在 20 題類似的測驗上提高正確率 3.4 題外，其效果還能遷移到其他類的題目上（引自 Greeno,1987)。國內鄭人豪（民 93）曾以此圖示系統之比較類圖示進行研究，研究結果發現其對學生的解題表現亦有提升效果。

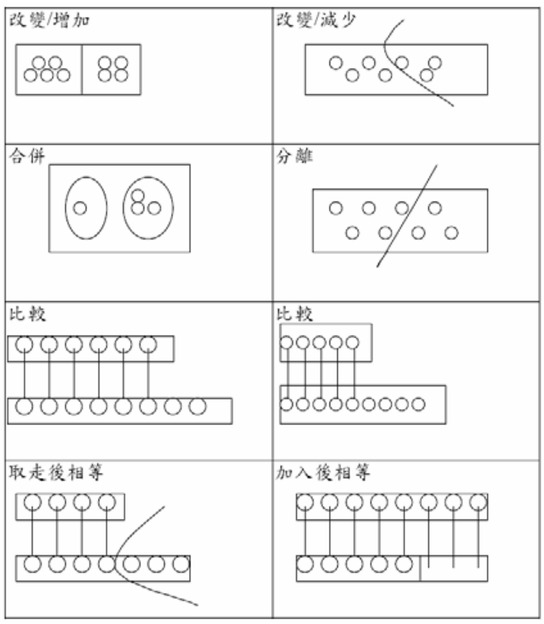


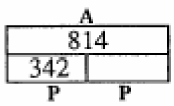
圖 2-3-2 Lindvall 與 Tamburino 的圖示系統

(資料來源：本圖引自楊淑芬，民89)

（二）**Fuson 與 Willis 的基模圖示表徵系統**

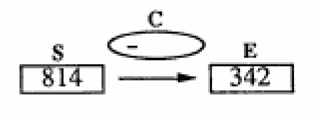
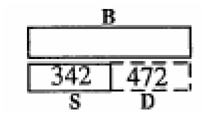
Fuson 和 Willis(1989)同時考量表徵策略與問題基模知識並將兩因素結合而發展一套「基模圖示」(schematic drawing)來協助小學二年級學生解單一步驟加減應用題，其將加減應用題依語意結構分爲四大問題類型（基模）：(1)合併、(2)改變—變多、(3) 改變—變少、(4)比較，每一類型問題可依未知數出現的位置分成三種，受試在接受了五個單元的教學以後，可以依不同的語意關係畫出問題基模圖示，且正確的圖示與正確的解題策略成高的正相關，前後測的正確率也達顯著差異。其問題基模圖示表徵方式舉例與說明如表 2-3-2 所示。

表 2-3-2 Fuson 和 Willis 的基模圖示表徵系統

基模圖示表徵舉例	說　明
	合併問題類型（基模）：第二部分未知 小英和小美共有 814 元（**A**ll:總數），小英有 342 元（**P**art:部分），請問小美有幾元（**P**art:部分）？
	改變-變多問題類型（基模）：起使量未知 小英有一些錢（**S**tart:起使量），小美給她 342 元（**C**hange:改變量）後，她就有 814 元（**E**nd:結果量），請問小英原有幾元？

（資料來源：圖取自 Fuson＆Willis,1989；題目經研究者修改。）

表 2-3-2 **Fuson** 和 **Willis** 的基模圖示表徵系統（續）

基模圖示表徵舉例	說　明
	**改變-變少問題類型（基模）：改變量未知** 小英有 814 元（**S**tart:起使量），小英給小美一些錢（**C**hange:改變量）後，她剩下 342 元（**E**nd:結果量），請問小英給小美幾元？
	**比較問題類型（基模）：多的量未知** 小英有 342 元（**S**mall:小的量），小美比小英多 472 元（**D**ifference:差異量）後，請問小美有幾元(**B**ig:大的量)？

(三)Jitendra 與 Hoff 基模圖示表徵系統

Jitendra 與 Hoff（1996）也同時考量表徵策略與問題基模知識對解題表現的影響。其以三位有學習障礙之三、四年級學生爲研究對象，以加減應用題爲教學內容，對學生進行基模圖示表徵解題教學，該研究以改變問題類型、合併問題類型、比較問題類型爲研究材料，其研究結果發現該教學實驗處理能提升學生解題的正確率。該研究強調學生具備應用題問題基模的重要性，學生在解題時應先能依據問題基模知識來辨識每個應用題是屬於哪種類型，然後以基模圖示表徵策略來整合問題的資訊，最後再進行解題活動。Jitendra 於 2002 年更詳細地指出基模圖示表徵策略可分兩階段，每個階段又

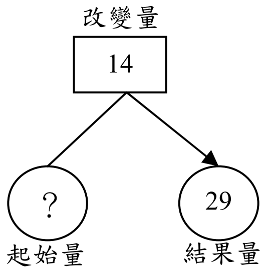
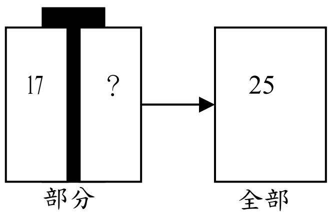
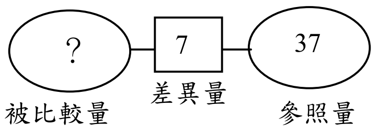
可再細分成數個子策略（Jitendra,2002）。茲將其基模圖示表徵策略的兩階段及各項子策略整理成表 2-3-3，基模圖示表徵方式舉例與說明如表 2-3-4 所示。

表 2-3-3 Jitendra 之基模圖示表徵解題階段與策略

基模圖示表徵階段	策　略
問題基模辨識與表徵	一、找出問題類型 1.仔細的讀題 2.自問該問題是改變、合併或比較問題的哪一種 二、使用問題基模圖示來組織並表徵問題之訊息 1.將已知的條件或數量標示在基模圖示上 2.使用「？」來標示未知數
問題解決	三、解題計畫 1.找出代表總數的量並標示 T 2.選擇運算策略為加法或減法 四、執行計畫 1.執行加法或減法的運算 2.驗算 3.寫答案

（資料來源：Jitendra,2002）

表 2-3-4 Jitendra 的基模圖示表徵系統

<table>
<tr><th>基模圖示表徵舉例</th><th>說　明</th></tr>
<tr><td>
</td><td>改變問題類型：起使量未知
賣氣球的老闆原有一些氣球，飛走 14 顆氣球後還剩下 29 顆氣球，請問老闆原來有幾顆氣球？</td></tr>
<tr><td>
</td><td>合併問題類型：部分未知
小英看見電線桿上有 25 隻小鳥，牠們 17 隻是麻雀和一些貓頭鷹，請問小英看見幾隻貓頭鷹？</td></tr>
<tr><td>
</td><td>比較問題類型：多的量未知
媽媽的年紀是 37 歲，老師的年紀比媽媽多 7 歲，請問老師的年紀是幾歲？</td></tr>
</table>

（資料來源：圖取自 Jitendra,2002；題目由研究者修改。）

二、國內研究

在國內的部分，吳昭容（民 79）曾以比較類的加減應用題爲研究材料，設計一套圖示系統，如表 2-3-5 所示。

表 2-3-5 吳昭容之比較類加減應用題之圖示系統整理表

未知量性質	語意關係	例　　子	表徵圖示
差異量未知	比多	小明有 8 顆糖，小華有 5 顆糖，問小明比小華多幾顆糖？	小明 ○○○○○○○○ 小華 ○○○○○
差異量未知	比少	小明有 8 顆糖，小華有 5 顆糖，問小華比小明多幾顆糖？	小明 ○○○○○○○○ 小華 ○○○○○
被比較量未知	比多	小明有 3 顆糖，小華比小明多 5 顆糖，問小華有幾顆糖？	小明 ○○○ 小華 ○○○○○○○○
被比較量未知	比少	小明有 8 顆糖，小華比小明少 5 顆糖，問小華有幾顆糖？	小明 ○○○○○○○○ 小華 ○○○∅∅∅∅∅
參照量未知	比多	小明有 8 顆糖，小明比小華多 5 顆糖，問小華有幾顆糖？	小明 ○○○○○○○○ 小華 ○○○∅∅∅∅∅
參照量未知	比少	小明有 3 顆糖，小明比小華少 5 顆糖，問小華有幾顆糖？	小明 ○○○ 小華 ○○○○○○○○

（資料來源：研究者整理自吳昭容，民 79）

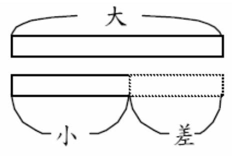
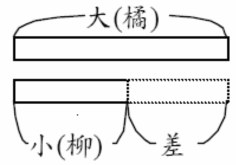
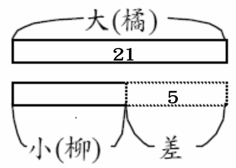
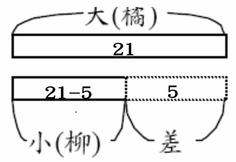
吳昭容使用上述圖示系統協助國小二、三年級學生進行比較類加減應用題的解題活動，結果發現經過 80 分鐘圖示教學後，學生並無法產生適當的圖示來幫助解題，其認爲二、三年級學生無法產生圖示的原因可能是因其圖示能力發展尚不成熟的緣故。

謝毅興(民 80)也是使用比較類加減應用題爲研究材料，其以國小二、三、四年級學生爲研究對象，利用吳昭容(民 79)的圖示系統進行圖示解題教學，並以葉雪梅(民 79)在題目中增加關係問句的語文教學作爲對照組，經過 80 分鐘的教學後，研究結果發現圖示教學的效果不如語文教學好。謝毅興認爲，圖示教學雖然能夠有效地使學生放棄使用錯誤策略(如關鍵字策略)，但因爲圖示系統本身具有相當程度的難度，以至於增進解題能力的效果不彰；而語文教學藉著講解比較語句的結構，直接幫助學生理解「比較」的語句，解題效果反而良好。

古明峰(民 86)以國小三年級學生爲對象，進行加減應用題語意結構圖示策略訓練解題課程，研究結果發現接受語意結構圖示策略教學訓練的實驗組在改變類及比較類應用題的得分，並未顯著高於未接受圖示教學策略控制組。古明峰認爲影響此研究結果原因可能是學生缺乏使用語意結構圖示策略的動機，導致學生解題時仍採錯誤表徵；剛從二年級進入三年級的學生以語意結構圖示策略解題的能力發展可能尚不成熟。茲列出古明峰之比較類應用題語意結構圖示策略教學流程如表 2-3-6 所示。

表 2-3-6 古明峰之比較類應用題語意結構圖示策略教學流程

題目：冰箱裡有 21 個橘子，柳丁比橘子少 5 個，問冰箱裡有多少個柳丁？

教學流程	學生表現
老師：請閱讀第二題	學生：閱讀問題
老師：問題中告訴我們哪些事？	學生：冰箱裡有 21 個橘子，柳丁比橘子少 5 個。
老師：問題中要小朋友回答的是什麼？	學生：冰箱裡有多少個柳丁
老師：橘子少還是柳丁少？	學生：柳丁少
老師：你能否用長條圖的長短來表示它們的大小？在較長的上面寫上大（數）代表較多，在較短的上面寫上小（數）代表較少，相差的部分寫上差表示。	學生：
老師：題目中較大的數目是什麼？較小的數目是什麼？請以簡寫表示，加在較長的圖示大數旁或較短圖示小數旁。如柳丁較少，則在小數旁加上「柳」，在大數旁加上「橘」。	學生：
老師：把問題中已經告訴我們的數目填入圖示中的空白長條內。	學生：
老師：如何計算才能算出冰箱裡有多少個柳丁？請列出算式。	學生：
老師：算出答案是多少個？	學生：21-5=16 答：16 個。

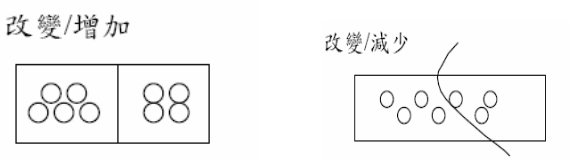
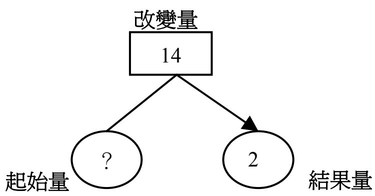
(資料來源：研究者整理自古明峰，民 86)

三、本研究之基模圖示表徵設計

綜觀上述之基模圖示表徵研究，研究者將各學者提出之「改變」與「比較」題型進行比較以作爲本研究之基模圖示表徵設計之基礎。爲了使基模圖示表徵更適合本研究之對象，除了參考其設計優點之外，並予以適當的修改以形成本研究之基模圖示表徵。茲將「改變」與「比較」題型的基模圖示表徵比較整理如表 2-3-7、表 2-3-9 所示，並說明本研究之基模圖示表徵的設計原則。

（一）改變題型之基模圖示表徵的比較與設計

表 2-3-7 改變類型問題的基模圖示表徵

提出學者	基模圖示表徵
Lindvall 與 Tamburino	
Fuson 和 Willis	
Jitendra 與 Hoff	

(資料來源：研究者自行整理)

在上述各學者所提出之改變類型問題之基模圖示表徵中，Lindvall 與 Tamburino 之圖示系統以幼稚園至國小低年級學生為對象，故其圖示系統具有具體圖形（○）之特點，為介於抽象與具體間的圖示表徵，適合低年級或數字較小的題目，不完全適用於本研究；相對的，Fuson 和 Willis 以及 Jitendra 與 Hoff 所提出的基模圖示表徵則較為抽象，對於本研究之三年級學童而言，該基模圖示表徵不易幫助學生選擇適當的解題策略，因此，在本研究中，研究者以 Lindvall 與 Tamburino 設計理念為參考，另外自行設計一套改變題型的基模圖表徵。本研究之改變題型圖示表徵的設計之原則如下：

1.銜接三年級學生在低年級時的表徵舊經驗

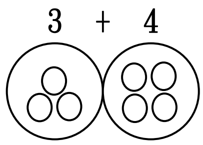
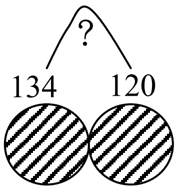
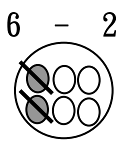
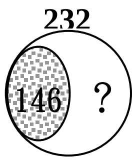
2.適合三年級之三位數的加減應用題

3.增加答題目標「？」的標示

4.使能幫助學生選擇適當的解題策略

茲將學生在「改變-變多」與「改變-變少」的表徵舊經驗與本研究之基模圖示表徵設計比較如表 2-3-8 所示：

表 2-3-8 改變問題表徵舊經驗與本研究之基模圖示表徵之比較

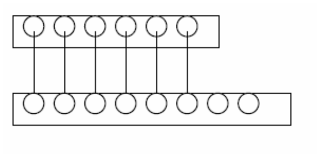
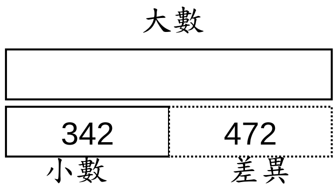
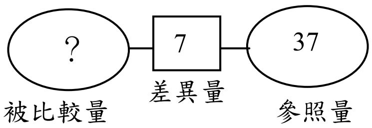
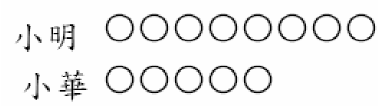
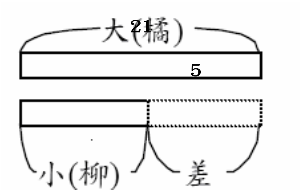
問題類型（基模）	表徵舊經驗	本研究之基模圖示表徵
改變變多類型問題		
改變變少類型問題		

（資料來源：研究者自行整理）

（二）比較題型之基模圖示表徵的比較與設計

茲將各個學者提出之比較類型問題的基模圖示表徵整理如表 2-3-9 所示。

表 2-3-9 比較類型問題的基模圖示表徵

提出學者	基模圖示表徵
Lindvall 與 Tamburino	
Fuson 和 Willis	
Jitendra 與 Hoff	
吳昭容	
古明峰	

（資料來源：研究者自行整理）

從表 2-3-9 中，可知在比較類型應用題的基模圖示表徵上，除了 Jitendra 與 Hoff 之外，其他學者皆以長條或線條來代表數量，用較長的長條（線條）來代表較多的量，用較短的長條（線條）來代表較少的量，兩長條長度之差距則爲差異量，長條上標示的數字則爲題目已知數的數量。因此，本研究在比較題型問題之基模圖示設計參考上述學者之設計，亦將以長條圖的方式呈現，據此本研究之比較問題的基模圖示表徵設計的原則如下：

1.銜接三年級學生在低年級時的表徵舊經驗

2.適合三年級之三位數的加減應用題

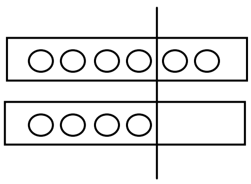
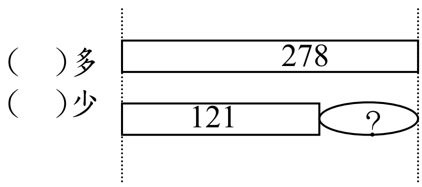
3.增加答題目標「？」的標示

4.增加「什麼多、什麼少」的標示

5.使能幫助學生選擇適當的解題策略

茲將學生在「比較」問題的表徵舊經驗與本研究之基模圖示表徵設計比較如表 2-3-10 所示：

表 2-3-10 比較問題表徵舊經驗與本研究之基模圖示表徵之比較

問題類型（基模）	表徵舊經驗	表徵新經驗
比較類型問題表徵		

（資料來源：研究者自行整理）

第四節 解題表現之評量

關於數學解題表現之評量，學者常用的方法有：紙筆測驗、晤談法、錯誤類型分析法、策略計分系統法、放聲思考法等，茲將此五種方法分別整理摘述如下：

一、紙筆測驗

紙筆測驗之評量方式有二種，一種是以數學應用題的型式讓受試者計算正確答案，另一種是以選擇題的型式，讓受試者選擇正確的選項，根據受試者答對的題數，以評量其解題表現。選擇題的題目分成題幹和選項二部分，題幹可以是語句敘述、地圖、表格或圖畫，選項可以是學生容易犯錯的概念，藉由題幹和選項的組合，施測者可判斷題目評量何種認知能力，並依照學生所選擇的誘答選項來推測出學生的困難所在（李長燦，民 83）。

二、晤談法

所謂晤談（interview），是指研究者與受試者間面對面交談，以對話的調查方式來引導受試者敘述其解題時的認知思考歷程。依據晤談活動前研究者所設計的晤談內容以及程序之系統化程度，可將晤談法分為結構性晤談（structured interview）、半結構性晤談（semi-structured interview）、無結構性晤談（non-structured interview）等三種（林美惠，民 86）。

（一）結構性晤談

進行結構性晤談時，研究者事先決定好晤談問題，晤談時完全依照這些問題架構進行，是一種標準化的程序。Clements（1980）曾利用結構性晤談法來分析 542 位五至七年級的學童解文字應用題時的錯誤類型，其晤談時所提的問題如下所列：1.請先將題目唸一次，若遇到不會的字就跳過去；2.請告訴我，題目要求你做什麼；3.請告訴我，你準備如何做；4.請做給我看，你是如何得到答案，一邊做一邊告訴我，你正在做什麼；5.把答案寫下來（引自林美惠，民 86）。

（二）半結構性晤談

進行半結構性晤談時，研究者不採用固定的系列問題，但是為了有系統的探討與蒐集資料，會將晤談分成幾個階段進行。Hoyles（1982）使用半結構晤談法，要求 84 位中學生說出對於數學課的學習經驗。其將晤談過程分為六個階段：1.向學生說明將以不拘形式的交談方式進行，使學生覺得自在；2.蒐集學生的一般資料；3.請學生說出好的以及壞的學習經驗；4.誘導學生說出具體細節；5.誘導學生說出當時學習經驗的感受；6.詢問學生有無其他的故事（引自劉貞宜，民 89）。

（三）無結構性晤談

進行無結構性晤談時，完全在自由與開放的情境下，依照研究者的意願隨意訪談，並無嚴格限制。

晤談法的優點就是能在一對一的基礎上詳細觀察解題者的表現和態度，研究者能針對個人的解題歷程策略予以深入研究，可以得到許多在紙筆測驗中無法得到的資料，但是其缺點就是受訪者可能猜出調查者想從回答中得到什麼而迎合其想要的答案；另外就是若晤談過程與報告時間間隔太久的話，會因爲記憶錯誤而影響報告的準確性（李長燦，民 83）。

三、錯誤類型分析法

錯誤類型分析是利用學生的作業樣本進行研究，以期能夠發現學生的學習困難所在，數學解題表現的錯誤類型分析是分析解題者在解某種數學領域的題目時所產生的錯誤。此種錯誤類型研究可分爲二類，一類是描述單一受試者在解題時所產生的錯誤類型，即所謂的診斷測驗，從其錯誤類型可推測解題者的錯誤規則，進而實施補救教學；另一類是描述一群人在同組問題中所犯的相同錯誤類型（洪義德，民 90）透過此種錯誤類型的分析，試圖找出學生容易犯的系統性錯誤，此種評量方式有助於教師在教授數學時，提醒學生該注意的地方，也可以藉此發現學生思路上的缺失，做爲補救教學的參考，但缺點是測驗結果不易量化（劉秋木，民 85）。

四、策略計分系統法

策略計分系統的評量方法，是以選擇題的方式呈現，將各種解題策略安排於選項中，因爲各個選擇題都代表一個思考策略，利用這些選項施測於受試者，以評量出其所採用解題策略之種類與頻率，此種測驗型態實施方便，計分簡單，可用於篩選和教學研究的前後測，也可看出受試者在哪一個解題

策略上有困難，以作爲個別指導的參考（洪義德，民 90）。

五、放聲思考法

所謂放聲思考是指解題者在解題時，將腦中的思考運作同步以語言口述出來。施測者採用錄音或錄影的方式將解題者口述的語言紀錄下來，再將紀錄的語言轉譯成文字（原案），然後以預先編好的解題行爲代碼爲架構分析原案，藉此得知解題者的解題歷程（林美惠，民 86）。

六、小結

綜觀上述，各種解題的評量方法皆有其優缺點，如能從不同的評量方法來評量學生的解題表現，將能瞭解學生解題的原貌。若以放聲思考法或晤談法進行評量，需考量學生的語言表達能力與施測時間因素，由於本研究之研究對象爲選自三年級各班之學生，因考量語言表達能力限制與施測時間不易配合之因素，故並未採用該方法；在本研究中，採用「紙筆測驗」評量學生在不同類型之應用題的解題表現，藉以探討實驗課程對解題表現之影響效果，此外，以「錯誤類型分析法」來分析學生圖示問題基模表徵的表現情形。