師大學報：科學教育類
民國 93 年，49(1)，1-14

教改爭議聲中，證明所為何事？

洪萬生
國立台灣師範大學數學系

從 1980（年）開始，解題、溝通與連結等數學能力，一直是數學教育努力的目標。而支撐這些能力的基本因子，就是數學論證能力。在本文第二節中，作者針對有關證明的研究作一些引述與評論，尤其提醒數學課程綱要的制 / 修訂者，如何『貼近』一些古代文本，以免陷入邏輯謬誤而不曾察覺。譬如說吧，美國加州公立學校數學架構中的幾何命題之邏輯順序安排，在歐幾里得《幾何原本》的脈絡下，就犯了循環謬誤。然後，在第三節中，作者進一步論述『視覺直觀』與『演繹論證』之間的折衷可能性，至於具體策略則可仿 Freudenthal / Hanna & Jahnke 所主張，設法從圍繞在幾何學中那些根本且有啓發性的應用面向，研擬出幾個『小理論』來。而在這些『小理論』的『局部組織』內，邏輯的嚴密性當然可以得到適當的照顧。再者，作者將在 HPM 的脈絡下，從貼近一些歷史經驗來尋找處理『證明』的出路，譬如在本文第四節中，我們所引述的 Clairaut 改編《幾何原本》時所注入的『發明的順序』之進路，乃至於劉徽的圓面積公式之『證明』等等，都說明了歷史經驗之可貴。因此，由本文論述來看，『證明』在數學教育過程中，不僅在於它的邏輯或論證『說服』，更重要的，應該是它對數學知識的『說明』功能，而這原本是數學教育工作者不應輕忽視之教育目標，在教改爭議聲中尤其更應有所堅持才是。

關鍵詞：數學論證，證明，古代文本，HPM

前　言

近年來，國際數學教育界對於『數學論證』之研究，有著相當濃厚的興趣。其實，「從 1980（年）開始，解題、溝通與連結等數學能力一直是數學教育努力的目標。而支撐這些能力的基本因子，就是數學論證能力。」[1]譬如，1996 年 Alan Bishop 等人所主編的 *International Handbook on Mathematics Education*，就由 Gila Hanna 與 Niels Jahnke 兩人負責撰寫 “Proving and Proof” 一個專章，顯然是用以強調『證明』的過程與實質內容一樣重要。前一項能力 (proving)，亦即著重證明的『過程』，當然涉及廣義的論證能力。也因此，去年由台灣師範大學數學系所主辦的『2002 年數學論證國際學術研討會』（2002 年 11 月 16-19 日），就特別規劃了(1) 數學論證能力的調查與認知發展機制，(2) 數學論證的學習情境與內容，以及 (3) 數學教師的數學論證與教學策略等三項主題內容，以便帶動數學論證的學術研究與課程改革。[2]

最近，關心數學教育改革的數學界同仁，引進了美國加州所使用的《加州公立學校數學架構》(Mathematics Framework for California Public Schools: Kindergarten through Grade Twelve, 2000)，作爲重要的參照標準。其中也特別指出：

數學的最重要目標，是教授學生邏輯推論。

[1] 引『2002 數學論證國際學術研討會』(2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand” (11/16-19, 2002, Taipei: National Taiwan Normal University) 舉辦『緣起』。

隱含在數學學習中的邏輯推理，允許我們將數學應用到很大範圍的情境上，其中有關實際問題的解答可以達到精確的程度。

上了八年級以後，學生的數學敏銳度應該強化。他（她）們需要開始理解邏輯的奧妙，並體會到下結論之前實質有效的論證之需求。

數學推理與概念理解不應與內容分離；它們是內稟 (intrinsic) 於學生在更高層次精通的數學分科之中 (CDSMS, 2000, pp. 72-73)。

可見，連一向並不怎麼重視數學論證的美國數學教育界，也開始關心有關證明的議題了。其實，比較美國教師協會 (NCTM) 分別在 1989 年、2000 年出版的兩份『K-12 數學課程綱要』*Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (1989)、*Principles and standards for school mathematics* (2000)，它們主要的差異之一，就是後者對於形式證明的高度重視 (Knuth, 2002)。

回到我們國內這一邊。在有關『九年一貫』的數學教育改革爭議中，相當引人注意的，是『數學論證』在課程與教學的地位。[3] 有鑑於此，我特別針對目前高一上學期課程中的『邏輯概念』單元，請求一位任教於北市完全中學的數學教師，發表她的評論：

正中版的數學大都採取直接介紹方式，文字淺顯且易懂。在第一節簡單的邏輯概念中，學生不易懂的是充分條件與必要條件(常常混淆)，最記得的是「若 p 則 q」與「非 q 則非 p」是等價命題。我個人認爲充分條件與必要條件這兩個數學名詞知道即可，不必強調亦不宜用來評量，會判斷命題的真僞比較重要。學生雖然知道「若 p 則 q」與「非 q 則非 p」是等價命題，但用在反證法上亦很難接受。我想這應該是因爲學生缺乏幾何證明的訓練，所以推理能力普遍下降所造成。如果有機會的話，希望能恢復幾何證明，讓喜歡思考、推理的人可以享受其中之樂趣。不喜歡數學的人也能從中學習如何判斷、分析、推理事情進而解決生活中的一些問題。

她的意見當然有一定的代表性，其中涉及國、高中課程的連貫，值得關心教育改革者共同來面對與深思。[4]

當然，『證明』要怎麼教得讓學生感覺得到『智識上的需求感』(intellectual need)，[5] 誠然是數學教育工作者（無論是大學教授或中小學教師）永恆的挑戰。若非如此，黃哲男的見證就很難理解了。1999 年，黃哲男在本系畢業後，到台北市建國中學擔任實習教師，他利用圖形來講解平方項的求和公式，[6] 結果學生的反應是：『從小到大第一次感受到數學的美與神奇。』他的進路，明顯地利用了『圖說一體』的特色，讓『發現』(discovery) 與『證明』(proof)（或『核證』，justification）結合在一起，無怪乎學生深受感動！（洪萬生，1999）

另一方面，我們也看到一些教科書編者、甚至有標榜 “Geometry by Discovery” 的作者如 David Gay，如何在輕易地放棄一個可以同時展現『發現』與『核證』兩個脈絡的證明方法。[7] 譬如說吧，有關圓面積公式，大家所熟悉的公式

---

[2] 同上。

[3] 譬如說，不同專家對於（『幾何』部份的能力指標中的）『局部推理』的看法，就相當分歧。

[4] 在國、高中數學課程的統整與連貫的前提下，如何協助完全中學的教師針對數學論證的進行教學，譬如國中直接涉及證明的題材應該如何與高中數學銜接，或許是我們應該好好面對的研究課題之一。

[5] 建構主義者或後現代主義者則標舉『情境上的解題需求感』，以強調更寬廣的『證明之脈絡』(proof in context) 意義。

[6] 黃哲男的教學策略，其實是一種『再發現的過程』(a process of re-discovering)，它結合了『圖說一體』的特色，『說明』了這一個公式是怎麼來的。參考（洪萬生，1999）。

[7] 譬如繆龍驥主編，《國小數學》第十冊（5 下）（康軒文教事業股份公司，2003 年第三版）頁 62-63。也參考 Gay (1998), pp. 65-67。在後書中，作者 Gay 先處理圓周長與直徑的關係，再證明 πr^2 這個公式。

往往是 πr^2，至於這個公式怎麼來的，又何以它適合在初等數學中介紹，恐怕大家都不甚了了。於是，即使編者所使用的方法，非常『自然而然地』將導致另一個形式的公式：『半周半徑相乘』（$\frac{C}{2}\cdot\frac{D}{2}$），然而，由於她（他）們似乎都被 πr^2 所『著魔』(obsessed) 了，[8]所以，竟然對『半周半徑相乘』視而不見，而另外套上一個本質上同樣難度的公式：『圓周長等於圓周率乘直徑』（$C=\pi\cdot D=2\pi r$），非要得到 πr^2 而後止。

由於上述有關圓面積公式證明的『自然進路』，完全得自數學史的啓發，尤其是數學史與數學教學（亦即 HPM）關聯的深層思考，所以，我也打算在 HPM 的『脈絡』中，[9]探討『證明』對於職前教師的意義。從最近的研究來看，我發現準教師對於『證明』的了解，其實有相當程度的儀式性 (ritualistic)。[10]這或許也解釋了她（他）們對於『證明』的相當表面的 (literal) 理解。事實上，數學史課程與教學（以我的教學爲例），是否改變了她（他）們對於『證明』、乃至於數學知識本質的看法，是很値得關心的問題。尤其，在目前教育改革爭議聲中，如何尋找一個有意義的切入點，以便對待『數學證明』這個主題，恐怕是數學家、數學教育家（包括 HPM 專家），乃至於數學教師共同的責任。[11]

總之，無論是美國加州或我們國內的數學教學，都有人大聲疾呼『幾何（形式）證明』的重要性，這無疑鮮明對比了目前國際數學教育界對於數學論證的研究重點，譬如前述『2002 年數學論證國際學術研討會』所規劃的三項主題所顯示。後者其實比較可以兼顧『證明』的『發現』與『核證』兩個脈洛，也是我們可以利用 HPM 來切入論述的主要原因之一。儘管如此，如何引導教師在『發現』與『核證』之間，尋求一個在教學環境中容易操作的平衡或折衷，則是我們念茲在茲的主要關懷。

在本文中，我將在第二節針對有關證明的研究作一些引述與評論，尤其將以《加州公立學校數學架構》針對幾何命題安排之建議爲例，提醒數學課程綱要的制 / 修訂者，如何經由『貼近』一些古代文本如歐幾里得《幾何原本》(*The Elements*)，而避免不自覺地陷入邏輯謬誤。在第三節中，我將以『驢橋定理』的證明結合一個教學實驗爲例，說明『視覺直觀』與『演繹論證』

---

8 πr^2 公式在數學史出現甚遲，第九世紀阿拉伯數學家 Menu Musa 在註解阿基米德 (Archimedes, 287?-212 BC) 的《圓之度量》(Measurement of a Circle) 時，似乎是寫出此一公式的第一位數學家。在本書中，阿基米德提供了下列公式及其證明：圓面積等於一個直角三角形的面積，後者的兩股分別是此圓的半徑與圓周，以現代符號表示，就是 $\frac{1}{2}Cr$，其中 C，r 分別是圓的周長與半徑。其實，現代人在學習微積分中的定積分之前，似乎未曾真正證明過 πr^2 這個公式。在中國古代，數學家儘管使用了它的『近似版』『徑自相乘，三之，四而一』（出自《九章算術》『圓田術』），但是，由於缺乏一個適當的『符號』來代表現代意義的圓周率，所以，πr^2 的『等價版』一直都未曾出現。

9 所謂 HPM，是指 International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics 的縮寫，此處亦指它所主張的數學史與數學教學之關聯。公元 2000 年 8 月 9-14 日，本系接受國際數學教育委員會（ICMI）HPM 研究群之委託，在本校承辦 HPM 2000 Taipei 研討會，這是第九屆國際數學教育會議（ICME-9）的衛星會議。創刊於 1998 年 10 月的《HPM 通訊》，就是結合此一盛會的重要學術活動之一。

10 我曾在 2002 年秋季本系大四『數學史』課程中，以歐幾里得《幾何原本》命題 VII.2（亦即，所謂的『歐幾里得輾轉相除法』(Euclidean algorithm)）的『原版』中譯作爲研讀文本，要求選修的學生判斷它是否爲一有效證明。結果，有一些學生竟然認爲它不是一個證明！可見證明應該擁有的『外觀』，似乎被數學社群所『規範』了。有關此一議題，我將有進一步的研究報告。

11 在探索在職數學教師的『證明概念』(conception of proof) 時，Eric J. Knuth 在他的論文 (Knuth, 2002) 中，特別考量他（她）們的中學數學脈絡 (the context of secondary school mathematics)，譬如他所設計的問題，就包括了(1) 在中等學校中，構成證明的成分是甚麼？(2) 爲甚麼教證明？(3) 甚麼時候學生應該『遭遇』證明？等等。不過，他在本文中並未涉及 HPM 議題。最近這兩幾年來，我自己有關 HPM 的研究報告中（洪萬生與林倉億，2000；洪萬生，2001；Horng, 2000, 2002a, 2003b），總是主要以本系大四選修『數學史』或『數學哲學』的學生爲研究對象，他（她）們幾乎都有意擔任中學數學教師。

之間折衷的可能性－前者顯然重在『發現』，而後者則專注在傳統教學所謂的『證明』上。在第四節中，我將在 HPM 的脈絡下，從貼近一些歷史經驗來尋找處理『證明』的出路，我的主要例證之一，是有關圓面積公式『證明』的歐幾里得 vs. 劉徽。最後，在結論中，我將設法回答『證明所為何事』，尤其是在這教改的爭議之中！

證明之研究與 HPM 方面的考察

最近 Keith Weber 指出了四種證明的類型，值得在此引述：(1) 用以說服的證明(proofs that convince)；(2) 用以說明的證明 (proofs that explain)；(3) 用以核證定義或公設結構的證明 (proofs that justify the use of a definition or axiomatic structure)；(4) 用以解釋技巧的證明 (proofs that illustrate technique) (Weber, 2002)。就 Heine-Borel 定理『每一個閉區間是緊緻集』的證明來說，Weber 認為一般的證明都很少能對此一定理之真實性，提供一個直觀的理解。也就是說，此一典型的證明可以『說服』(convince) 但無法『說明』(explain)。至於能夠『說明』但卻無法『說服』的證明，則 Weber 以『中間值定理』(intermediate value theorem) 為例，通常證明的目的，是讓它變得直觀又顯明，這是因為它通常基於一個『假設的』函數圖形來論證的。除了前述兩者之外，還有兩種證明幾乎是數學家社群儀式的一部分，因此，他們很容易習焉而不察！譬如說吧，利用 Peano 公設來證明 2+2=4，就被 Weber 歸類為上述第 (3) 類，其目的是核證定義或公設結構用途之證明。再譬如證明函數 $f(x)=x^2$ 為連續函數，則被認為是解釋技巧用的證明（譬如如何熟練 $\varepsilon-\delta$ 的極限定義與技巧），因此，被 Weber 歸入上述第 (4) 類。

當然，最有教學價值或意義的證明例子，恐怕是 Weber 所提到的『質數是無窮多個』(There are infinitely many primes) 的歐氏（『現代版本』）證明，它同時可以滿足三個不同的目的：首先，它可以『說服』學生此一命題為真，其次，向他們『說明』何以此一命題為真，最後，這個證明還『例釋』了歸謬證法 (proof by contradiction; *reductio ad absurdum*)。換句話說，這個證明可以同時擁有上述 (1)、(2) 與 (4) 這三個類型的特性。其實，證明的不同目的也隨著運用的脈絡來決定，譬如 Weber 就指出有些證明對於大學生來說，目的在於『說服』，但是對於研究生來說，則不過是『例釋』一種證明技巧，至於對於數學家來說，則或是『說明』某一定理何以為真！

上述這個有關質數個數的命題，正是歐幾里得 (Euclid)《幾何原本》(The Elements)第 IX 冊第 20 命題 (Prop. IX. 20)：『給定若干質數，則質數必不盡於此』(Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers) (Heath, 1956, vol. 2, pp. 412-412)。至於歐氏證法，亦即：將這

[12] 在藍紀正、朱恩寬根據 Heath (1956) 所譯的《幾何原本》中，將第一卷定義 23 譯成：「平行直線是在同平面內的直線，向兩個方向無限延長，在不論哪個方向它們都不相交。」也將第五公設譯成：「同平面內一條直線和另外兩條直線相交，若在某一側的兩個內角的和小於二直角，則這二直線無限延長後在這一側相交。」事實上，上兩個述句中的副詞『無限』都譯自英文 “indefinitely”！由於譯者顯然誤解了歐幾里得、乃至於古希臘人所謂的 “indefinitely”，所以，才會在這兩個命題中都以『無限』來對譯。此外，譯者所犯的謬誤還有：他們在『公設』（postulate，台灣哲學家常譯為『設準』）下漏譯了至關重要的一句話：“Let the following be postulated:”。正是由於這一句話，所以，歐幾里得非常清楚地區分了 “postulate” 與 “common notion”（公論或公理），後者中之命題如「等量加等量，其和仍相等」不僅適用於幾何學而已，也適用於亞里斯多德所謂的『演繹科學』 (deductive science)。參考歐幾里得 (1992)，頁 2；Heath (1956) vol. I, pp. 154-155；洪萬生 (2002a)。

若干個質數陳列出來，再利用它們的乘積以便再造出多一個（更大的）質數出來。顯然，歐幾里得是刻意地迴避有關『無限』的概念，這可以解釋何以他在提供平行線定義或『第五設準』(Postulate V) 時，都是運用 “indefinitely” 代替 “infinitely”。[12] 其實，歐幾里得呈現此一命題的形式，清楚地暗示了他的證明的策略或進路。至於我們所熟悉的歸謬法，則是用在證明他所造出來的乘積，果然是一個更大的質數。由此看來，歐幾里得證明的原始版本，除了滿足 Weber 所指出來的三個目的之外，還提示了命題（呈現）形式及其證法之間的認知關聯。我曾經在去年 (2002) 春天本系『數學哲學』課程中，請學生在假想的教學脈絡（他們幾乎每人都有意擔任中學教師）中，來評論上述兩個證法（一個是現代的，一個是古典的）的意義。我分別在學期開始與結束時，請他（她）們針對同一套題目作答，用以考察一學期的『數學哲學』教學，是否提升他（她）們在方法論上的後設思考能力。最後的結果是正面的，只是他（她）們對於命題的古典形式之認識論層次的問題，仍然無法上手，令人不無遺憾 (Horng, 2002a)。

在上述這個教學實驗中，我企圖引進古典數學文本製造認知衝突，以便督促這些準教師對於數學證明方法，進行更深層的思考。其實，我在 2000 年已經做過另一個實驗。拙文〈貼近《幾何原本》與 HPM 的啓示：以驢橋定理爲例〉，就是相關的實驗報告。在該文中，我曾詳細說明相當普遍的三種證法如 (1) 頂角平分線、(2) 連接頂點與底邊中點，以及 (3) 由頂點向底邊作垂線，用以證明所謂『驢橋定理』—等腰三角形兩底角相等（亦即《幾何原本》命題 I. V 的部分內容），都會導致邏輯上的『循環謬誤』(circular fallacy)。這是因爲，譬如說吧，歐幾里得將『頂角平分線存在的（幾何作圖）命題』安排爲命題 I. 9，可是，它的證明卻必須仰賴命題 I. 8，後者仰賴命題 I. 7，最後則無法迴避命題 I. 5。（歐幾里得，1992，頁 7-11；Heath, 1956, vol. 1, pp. 251-270）事實上，此一現象早經數學史家 Morris Kline 在他的 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (1972) 指出。我在 1979 年首度在本系講授『數學史』時，即由我當時的學生張永寬提供有關第一種證法之謬誤。（洪萬生，1990, 頁 134-139）不過，直到 2000 年時，我才在 HPM 的脈絡中，請選修『數學史』課程的準教師，評論她（他）們對於此一循環謬誤的看法。結果，我們可以看到她（他）們對於直觀與嚴密的折衷之道（洪萬生，2001）。我將在下文第三節中，引述幾位學生的看法。

在這個脈絡下，我們另外分別來討論 Michael A. Deakin、Marcia Pinto 與 David Tall 的論述。對 Deakin 來說，他早已察覺上一段所提及的循環論證，並且一一地確認那前三個證法，是歷史上哪一位數學家先提出來的。譬如說吧，『頂角平分線』的證法，可以追溯到 B. Pierce 的幾何教科書 *An Elementary Treatise on Plane and Solid Geometry* (1872)；『連接頂點與底邊中點』的證法，則可能出自 A. M. Legendre（法國十九世紀的偉大數學家之一）的 *Elements de geometrie* (1794)；至於『從頂點向底邊作垂線』的證法，則出自 S. F. Lacroix 的 *Elemens de geometrie* (1799)，作者是十九世紀非常有名的數學教科書編者。其實，我認爲 Deakin 最有貢獻的研究成果 (Deakin, 1990)，是指出此一三角形的『自身全等』構想，可以視爲歐幾里得原來證明的『極限特例』(limiting case)。[13]

[13] 給定一個三角形 ABC，設兩個底角的頂點分別爲 B 與 C，則歐幾里得原來的證法是過 B 點延長一個適當的線段 BD，另外，過 C 點延長一個線段 CE 使 BD＝CE，然後利用兩對全等三角形（三角形 ABG、ACF 一對；BCF、CBG 一對），而得證兩底角相等，其對應補角也相等。Deakin 認爲最直觀而可以避免循環謬誤的『自身全等』證法，可以看做上述證法的一種『極限特例』：讓 D、E 點分別趨近 B、C 點，則前述那兩對全等三角形，最後都會趨近於三角形 ABC、ACB。

另一方面，對於 Pinto 與 Tall 來說，他們將『摺紙對稱』以找出頂角平分線的進路，視爲學生很容易上手的一種『思想實驗』(thought experiment)，用以區別數學家正規使用的『命題證明』(propositional proof)。他們的所謂『思想實驗』,「對於人類來說，是一種自然而不需要形式知識的想法。」至於數學家使用『命題證明』的目的，則是因爲「他（她）們認爲如果把一個論證翻譯成爲一個言辭符號形式，她（他）們會感覺比較安全。」

他們還認爲『摺紙對稱以找出頂角平分線』的『思想實驗』，可以『翻譯』(translate)成爲歐式證明。這是因爲我們如將頂點 A 與 BC 邊中點 M 連接，則可以證明三角形 ABM 與 ACM 全等，於是，角 B 與角 C 相等。根據 Pinto 與 Tall 的看法，這透顯了歐氏幾何是思想實驗的一種言辭表達的形式 (verbalized form)。換句話說，「在歐氏幾何學中，我們把思想實驗轉換到言辭證明。」至於其中所涉及的認知或學習困難，則他們有進一步的如下解說：

這個從視覺到言辭的翻譯，提示了一個從視覺數學到形式數學的可能方法。其中所需要的能力，是從特例中看出共相，以便可以賦予意義給相應的形式定義 (formal definition)，並且利用因而引出來的概念意象 (imagery) 與形式化 (formalism) 之間的連結，來構成、證明定理。至於這個翻譯過程中最困難的部分，則是從直觀意象 (intuitive imagery) 轉到形式演繹 (formal deduction) (Pinto and Tall, 2002)。

即使以本例來說，從直觀到形式的『翻譯』並不困難，然而，由於經由翻譯而來的形式證明在邏輯上是一個『無效的』循環論證，所以，當我們企圖像 Pinto 與 Tall 所期待的，在數學教育心理學理論上建立一個理論架構，用以涵攝學生所可能想得到的進路，事實上恐怕還有好長一段路要走。

無論如何，對於歐式幾何演繹邏輯順序之『想當然爾』的另起爐灶，都很可能像加州課程架構一樣，自陷『循環論證』而無法察覺。在 CDSMC 的『幾何』（8-12 年級）中，課程架構設計者強調三角形或多邊形與外接圓的關係，應該及早安排教授：

在幾何課程中，似乎沒有人好好考慮將有關圓形的定理趁早引進。譬如說吧，有關在圓形中等弧對等角的一些相當特出的定理，必須在介紹完幾何公理之後三週內就呈現給學生。而這，主要的目的是證明下列兩個定理：

1.等腰三角形兩底角相等；

2.一個三角形的外角等於兩個遠內角的和 (CDSMS, 2000, p. 163)。

然而，在《幾何原本》中，等弧對等角之相關定理，卻是安排在第 III 冊命題 27、28 與 29：

III. 27. 在等圓中，等弧上的圓心角或圓周角是彼此相等的。

III. 28. 在等圓中等弦截出相等的弧，優弧等於優弧，劣弧等於劣弧。

III. 29. 在等圓中，等弧所對的弦也相等（歐幾里得，1992，頁 81-83；Heath, 1956, vol. 2, pp. 58-60）。

至於它們的證明，譬如 III. 27，就依賴了 I. 23、III. 20 與 III. 26。但是，III. 20 的證明依賴了 I. 5。III. 26 依賴了 III. 24，從而 III. 10，乃至於 I. 8，後者最後還是依賴了 I. 5。至於 I. 23 則是基於 I. 8，於是，最終還是仰賴了 I. 5。

由於 I. 5 的（完整）內容爲：『在等腰三角形中，兩底角彼此相等；並且若向下延長兩腰，則在底以下的兩角也彼此相等。』因此，若想利用 III. 27 來引進『等腰三角形兩底角相等』之命題，而又不想離開歐幾里得的脈絡，那麼，我們勢必無法迴避循環謬誤 (circular fallacy)。再以 III. 28 與 III. 29 的證明爲例，前者至少依賴了 I. 8，因而一定逆推回 I. 5，於是，循環謬誤仍然無法避免。同理，證明 III. 29 必須依賴 III. 27，於是，循環謬誤依然。

視覺直觀與演繹推理之間的折衷

這麼說來，我們有沒有依違視覺直觀與演繹推理的可能性呢？荷蘭數學教育大師 Hans Freudenthal 曾提出『局部組織』(Local Organization) 的主張，說不定指引我們一條出路：

在幾何學入門課程中，學生應該被帶領利用幾何概念及其性質，學習組織空間中的形體與現象。在一個更高的層次中，他應該利用邏輯關係來組織這些概念及其性質。至於在這一層次之上，則這整個關係系統可以成爲學生探討的主題 (Freudenthal, 1973, p. 458)。

Freudenthal 以三角形的『外心定理』爲例，來說明他的想法。他認爲：勞師動眾到整個歐式系統，以便爲此一定理提供一個完整的證明，是不必要的。這也就是說，他不主張：從中垂線的等距離性質開始，一直推演到這三條中垂線相交並交於同一點。而是：我們應該專注於某些在特定情境中有趣的一些面向，而將其他的一些面向視爲已知（或理所當然）。如此一來，所謂的『局部組織』，意在對某些『構圖』(configuration)的探索，而不是想在一個大系統 (large system)（譬如歐氏幾何）中建立一個純演繹的真理。

基於 Freudenthal 的這個主張，Hanna 與 Jahnke 認爲我們有必要在『大理論』(large theory) 與『小理論』(small theory) 之間區別開來。與其在課程架構中建立一個的『大理論』，我們不如圍繞那些根本且有啓發性的應用面向，研擬出好幾個『小理論』來 (Hanna and Jahnke, 2002)。

針對上述這個主張，我必須承認目前我還找不到比較可行的方案。最近，有關『九年一貫』課程中的幾何『局部推理』曾引起一些爭議。如果所謂的『局部』是指兩三步的推論，那麼，我們就有必要澄清它的意義。誠然，如何選擇合適的幾何教材，模仿上述的幾個『小理論』，一方面讓國中學生在直觀意義與形式推理兩方面，都能體會幾何學的趣味與重要性，的確中學數學教育不可推卸的責任。可是，另一方面，我們也應該提防不要陷入循環謬誤之中，否則所謂的『形式推理』到頭來恐怕變成一場空！

一般來說，如果中學數學教學現場主要是以解題活動爲主，那麼，教師所面對的，無疑都是一些類似『小理論』所連綴而成的課程單元。如何在這些個別的『小理論』中間，恰當地兼顧幾何知識的直觀與形式，而且設法讓它們又可以形成一個堪稱完整的幾何知識結構，恐怕是課程擬訂與修訂者無法逃避的重責大任。其實，我的學生（未來的中學數學教師）大概都知道如何去『隨機應變』。在本節最後部份，請容許我引述他（她）們對於『驢橋定理』證法所作的評論。整個實驗內容，請參見拙文（洪萬生，2001）。

在這個教學實驗（以『數學史』課堂作業方式進行）中，我請她（他）們回答下列問題：

試回憶國中數學課本中證明『等腰三角形（之）兩底角相等』步驟中（《幾何原本》第一冊命題五）的主要策略，比如：『作頂角平分線』或『從頂角向底邊作垂線』等等。並根據《幾何原本》第一冊的相關命題，說明何以你（妳）的國中時代的證明犯了邏輯上的循環謬誤 (circular fallacy)。面對這種邏輯嚴密性方面的窘境，請問妳（你）如何『自我解嘲』或『自圓其說』？

部份學生的回答（其中英文字母與阿拉伯數字是她（他）們的編號）引述如下：

P1: 而我們中學時代老師教導我們的方法，不用驢橋，反而用中線、垂線的方法教導我們，我想那是因爲雖然中線、垂線是後面的東西，可是「夠直觀」（對學生而言），而中學生學習數學的目的，我想大部分可以說爲（了）增

進思維，而邏輯的周密對學生而言，沒有這個能力則也不算那麼必要（對國中生），我想，老師教學時教中線、垂線而不教驢橋，對中學生這件事應該比命題 1→ 命題 2→ 命題 3 →・・・來得重要吧！？

X1: 面對這種邏輯嚴密性的窘境，我個人認爲對於數學嚴密性的思考固然重要，但是就國中生而言，要了解抽象的公設體系的架構是有困難。所以只要考慮到邏輯的局部嚴密性就夠了。也就是說，在證明的過程中不會自相矛盾即可，至於那無定義名詞、公設、定義、公理，以及哪些命題已經證明，就不必太在意了。

L5: 自圓其說：對我而言，自圓其說似乎是不太對的，但若是對國中生甚至高中生而言，他們其實是不瞭解得如此透徹，因爲這對他們來說，一來是增加他們的負擔，二來也不見得懂這樣的謬誤意義何在。我認爲這類型（國中的證法）的證明方法只是要訓練學生邏輯的思考推理能力，能在課本建立的一套基礎系統（雖然不夠完備）下逐步的就已知條件來推得一份定理或結果，對學生已是足夠，重點應於在推理的過程，而非證明出來的結論。

L8: 在邏輯上，國中的方法的確出現了謬誤；但想一想，當我們在中學教到有理數時，怎知十分逼近法是可行的，若要知道，那麼就必需講實數完備性、構造實數，甚至很多集合論的東西；但一個中學生如何能理解這些呢？因此，很多時候，尤其是在學入門的知識時，我們就只好先不考慮邏輯的嚴密性，而把那些東西當做知識記起來（當然爲了加速學生對這些知識的連結，我們可以用像國中這樣的方法來教）；等到知識累積夠了之後，再去考慮邏輯上的問題。

L10: 因此，我們可發現，若我們利用國中的證法，會產生循環證法的循環謬誤，所以歐几里得才會利用比較複雜的方式來證明 Prop. 5。以後在教學上，或許我還是會利用 Prop. 9 來證 Prop. 5，只是等到學生在某種程度（例如對證明題有所認識）之後，我就會利用歐几里得的方法，重新在證明一次 Prop. 5，並且向學生說明之前那樣的證法有邏輯上的問題，順便讓學生感覺一下“邏輯”這種東西。

G2: 我的想法：爲解決這個題，則須追究幾何教學所持的意義與內涵。我們並未教學生“幾何原本”第一卷的整個內容，再者，幾何原本用公理化的邏輯來探究圖形的性質，而探究圖形的性質也可用變換矩陣或向量等種種工具來探索，並非一定要用幾何原本裡如此嚴密的方式。而教學目標是希望培養學生的幾何能力，了解幾何性質。如果學生能利用角平分線、三角性 SAS 全等來證明此命題，我認爲就已足夠。而像原本中使用多條輔助線且經過兩次全等的驗證，我認爲對中學生而言太難了，而且也缺乏直觀。倘若只是爲訓練學生嚴謹的公理化演繹，我覺得於其他部份的內容也可能可以達到，而非只限定於幾何上。

Z6: 不過，在中學的數學教學過程中，我們主要的目的是讓學生認識數學，認識幾何學的一些基本性質，讓他們在日常生活中可以使用，或者爲了未來的學問作準備。至於角平分線是不是一定由 Prop. 5 → … → Prop. 9，那倒大可不必，只要學生『動手』可以做出角平分線，折出角平分線，認識角平分線就可以了。我們並不需要完全要求邏輯嚴密性，只要『局部』做到邏輯的嚴密即可。

綜合他（她）們的反思與上一節所引述的 Deakin 之論述，方法論的具象性 (methodological visualization) 與邏輯的嚴密性 (logical rigor) 兩者可以並存。換句話說，即使我們不打馬虎眼，我們還是可以同時照顧認知與邏輯。

HPM 的啟發

在上一節有關我自己的研究心得中，我發現如將邏輯困境回歸古典文本，則在認知層次上先後經歷了破與立，相信這對準教師的後設思考，應該可以帶來極大的啓發才是。因此，我打算在本節中說明 HPM 可以帶來的啓發。

根據 Evelyne Barbin 的研究 (Barbin, 1996)，《幾何原本》的編寫考量，完全基於提供一個假設性的演繹結構 (hypothetico-deductive structure)，儘管此書被認爲是柏拉圖學院的教科書。後世數學家如 Antoine Arnauld（著作爲 *Nouveax elements de geometrie*, 1667）與 Alexis Clairaut（著作爲 *Elemeents de geometrie,* 1765）改編此一經典的目的，也都是爲了提供幾何教科書，但是其改變幅度之大，遠非十六世紀的 Christopher Clavius（丁先生）的拉丁文版《幾何原本》當所能想像。後者（第一版於 1572 年，第二版 1591 年）之前六卷，曾在 1607 年經利瑪竇與徐光啓中譯引進明末中國。[14]

或許我們可以選擇一個案例來作比較。Barbin 很敏銳地注意到『角』概念在歐幾里得、Arnauld 與 Clairaut 三書中之所給定義之差異。根據此一對比，她進一步分析這三位作者的不同進路。她認爲歐幾里得對於命題的安排順序，是服從演繹推論的結果。在 Arnauld 的書中，命題安排完全著眼於對於理解的助益，因而那是一種方法論上的順序 (the order is methodological)。至於 Clairaut 的幾何著作，則出自啓蒙 (enlighten) 讀者的深刻關懷，他希望讀者能夠按照他所安排的命題之順序，輕易掌握『發明的精神』之所在，亦即「知識蘊含了它藉以爲知的過程」，[15] 因此，他的安排是一種『發明的順序』(the order of inventions)。(Barbin, 1996)

其實，即使比較歐幾里得與劉徽的圓面積公式之『證明』，也可以突顯他們兩人在方法論上的迥異風格。在他的《幾何原本》中，歐幾里得的『公式』如下：「圓與圓之比如同直徑上正方形之比」（XII. 2）(Heath, 1956, vol. 3, pp. 371-373)，至於他的證明，則利用窮盡法 (the method of exhaustion) 與歸謬法，是一種典型的『間接證法』。其實，如果歐幾里得敢『取極限』，則依據本冊第一個命題（XII. 1）：「圓內接相似多邊形之比如同圓直徑上正方形之比」，即可輕易證得上述『公式』。(Horng, 2000) 另一方面，劉徽在他的《九章算術》注（公元 263 年）中，證明了圓面積公式『半周半徑相乘』。開始證明之前，劉徽將此一公式中的半周與半徑，分別視爲某一個長方形的兩邊（『案：半周爲從、半徑爲廣，故廣從相乘得積步也』），然後設法通過割圓再拼湊的方式，逐步逼近成所求長方形。在劉徽的推論過程中，我們總是可以『看到』最後的目標就在那兒，從而，我們永遠可以知道下一個推論步驟要做甚麼。因此，他的方法是不折不扣的『直接證法』。現在，對比歐幾里得與劉徽，我們發現：前者的方法具備了『說服』的功能，但是，後者顯然同時滿足了『說服』與『（直觀）說明』的功能。(Horng, 2000) 由此可見，正如上文第一節中所提及，在中小學課程中如果我們打算引進圓面積公式，那麼，基於劉徽（版本的）結合『發現』與『核證』兩個脈絡，我們應該好好地考慮『半周半徑相乘』這個公式。

無論如何，從 HPM 的觀點來看數學證明，歐幾里得不僅鮮明地對比了東方的劉徽，同時，即使我們將他置回西方數學的脈絡之中，他也與法國數學家 Arnauld 與 Clairaut 有著顯著的差

---

[14] 有關此一中譯本之研究，請參考 Engelfriet (1998)。也可參考拙文（洪萬生，2001）。

[15] 其實，劉徽對於《九章算術》第一章平面圖形面積公式（包括圓面積公式）的證明，也是相當好的例證之一，參考拙文 (Horng, 2000)。

異。無論《幾何原本》是否曾經充當教材，這兩位法國數學對它所做的改編，無疑是爲了滿足近代數學教育的需要。因此，如果我們願意嚴肅面對前述這些歷史經驗的話，那麼，在教材中考慮納入歐氏風格的嚴密證明時，一定要有所取捨與折衷才是。

結 論

綜合本文的論述，我相信『證明』所以成爲教改的爭議之一，主要是由於不同的專家（基於自身的專業背景）看到它的不同面向。以我自己爲例，我身爲專業的數學史家，慣於在歷史的演化過程中，『看到』數學知識成長的多元風貌。我當然相當了解：數學的這個本質，當然不容易在正規的教學環境中反映出來。儘管如此，我總是苦口婆心地告訴我的學生（準教師）說，基於數學史經驗，最好的證明方法，除了它可以『說服自己、說服朋友並說服敵人』之外，更重要的，它還必須能夠『說明』何以那個待證的命題會『長成』那個樣子！至於要『如何』融入教材之中，那就看編者的用心與智慧了。作爲本文的結語，我要再一次地引述那一位在完全中學任教的老師之心聲：「如果有機會的話，希望能恢復幾何證明，讓喜歡思考、推理的人可以享受其中之樂趣。不喜歡數學的人也能從中學習如何判斷、分析、推理事情進而解決生活中的一些問題。」

誌謝：本文初稿宣讀於『第十屆張昭鼎紀念研討會－科學與教育』（2003 年 4 月 26-27 日），台北：台灣大學應用力學研究所國際會議廳，感謝主辦單位張昭鼎紀念基金會、科學月刊社與陽明大學的邀請。本文之定稿，得力於『國科會特別研究計畫』（NSC 91-2521-S-003-006）的部分支持，謹此誌謝。又，本文修訂時，參考了兩位匿名審查者的建議，也必須在此申謝。不過，文責理當由筆者自負。

參考文獻

李國偉 (1999)：證明的流變：一個數學哲學與數學史的綜合考察。**台灣哲學研究**，3，1-22。

林福來、鄭英豪 (1997)：反證法論證原理的探究性教學。**科學教育學刊，5**(4)，557-591。

洪萬生 (1990)：**從李約瑟出發：數學史、科學史文集**（一版二刷）。台北：九章出版社。

洪萬生 (1999)：圖說一體，不證自明。**HPM 通訊，2**(12)，1-3。

洪萬生、林倉億 (2000)：**數學史教學與數學觀的改變**，取自國立台灣師範大學數學系網頁：http://www.math.ntnu.edu.tw/math_life/culture/top7/.

洪萬生 (2001)：**貼近《幾何原本》與 HPM 的啓示：以驢橋定理爲例**，取自國立台灣師範大學數學系網頁：http://www.math.ntnu.edu.tw/math_life/culture/top7/。

洪萬生 (2002a)：數學文本與問題意識。**HPM 通訊，5**(1)，1-2。

洪萬生 (2002b)：中算史上的張本例 (generic examples)〉。**HPM 通訊，5**(12)，1-3。

黃清揚 (2001)：幾何『修辭』：笛卡兒 vs. 歐幾里得。**HPM 通訊，4**(7)，8-9。

歐幾里得 (1992)：**幾何原本**（藍紀正、朱恩寬譯）。台北：九章出版社。

Barbin, Evelyne (1991). The reading of original texts: How and why to introduce a historical perspective, *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 12-13.

Barbin, Evelyne (1996). The role of problems in the history and teaching of mathematics, Ronald Calinger ed., *Vita Mathematica: Historical research and integration with teaching* (Washington, D.C.: MAA), pp. 17-26.

Balacheff, Nicolas (2002). *The researcher epistemology: A deadlock for educational research on proof*, presented to 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, November 16-19.

Benson, Donald C. (1999). *The moment of proof: Mathematical epiphanies*. New York: Oxford University Press.

Brown, James Robert (2002). *Philosophy of mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures*. London and New York: Routledge.

Casselman, Bill (2000). Pictures and proofs, *Notices of the AMS, 47* (10), 1257-1266.

Cullen, Christopher (2002). Learn from Liu Hui? A different way to do mathematics, *Notices of the AMS* , August 2002, 783-790.

Curriculum Development and Supplemental Materials Commission (CDSMC) (2000). *Mathematics framework for California public schools: Kindergarten through grade twelve* (revised edition). Sacramento: California Department of Education.

Deakin, Michael A. B. (1990). From pappus to today: The history of a proof", *The Mathematical Gazette, 74* (467), 6-11.

Doerfler, Willi (2002). *Diagrams as means and objects of mathematical reasoning*, presented to 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, November 16-19.

Duval, Raymond (2002). *Proof understanding in mathematics: What w ays for s tudents?*, presented to 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, November 16-19.

Engelfriet, Peter (1998). *Euclid in China: the genesis of first Chinese translation of euclid's elements books I-VI and its reception up to 1923*. Leiden / Boston / Koln: Brill.

Fauvel, John (1988). Cartesian and euclidean rhetoric, *For the Larning of Mathematics, 8*(1), 25-29.

Freudenthal, Hans (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gay, David (1998). *Geometry by discovery*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Glas, Eduard (1998). Fallibilism and the use of history in mathematics education", *Science & Education, 7,* 361-379.

Gowers, Timothy (2002). *Mathematics: A very short introduction*. New York: Oxford University Press.

Hanna, Gila & Niels Jahnke (1996). Proof and proving, in Bishop, J., K. Clements, C. Leitel eds., *International Handbook on Mathematics Education*.

Harrel, Guershon (2002). *DNR-Based instruction: Its application in developing mathematics teachers' knowledge base, particularly their proof schemes*, presented to 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, November 16-19.

Heath, Thomas L. (1956). *Thirteen books of euclid's elements*. New York: Dover Publications, INC.

Hersh, Reuben (1993). Proving is convincing and explaining, *Educational Studies in Mathematics, 24,* 389-399.

Hoyles, Celia (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof, *For the Learning of Mathematics, 17* (1), 7-15.

Hoyles, Celia and Dietmar Kuchemann (2002). *Students' explanations in Geometry: Insights from a large-scale longitudinal survey*, presented to 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, November 16-19.

Horng, Wann-Sheng (2000). Euclid versus Liu Hui: A pedagogical reflection, Victor Katz ed., *Using history to teach mathematics: An international perspective* (Washington, D.C.: MAA), pp. 37-48.

Horng, Wann-Sheng (2002a). *Cognitive dimension of the HPM: Text vs. context*, presented to the 2001 Netherlands and Taiwan Conference on Common Sense in Mathematics Education, November 19-23, National Taiwan Normal university, Taipei, Taiwan.

Horng, Wann-Sheng (2002b). The circulation of the HPM Tongxun and its relevance to the mathematics teacher community in Taiwan, *History and Pedagogy of Mathematics Newsletter, 50,* 5-9.

Horng, Wann-Sheng (2003a). *Power of innovation: A historical view*, presented to the International Conference for Knowledge Services 2003 (2003 年知識服務國際研討會), Grand Hotel, Taipei, Taiwan, March 5-6, 2003.

Horng, Wann-Sheng (2003b). Teaching experiment with proposition IX.20 of the elements, Bekken, Otto B., Reidar Mosvold eds. *Study the masters: The Abel-Fauvel conference* (Goteborg: NCM), pp. 185-206.

Kleiner, Israel (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective, *Mathematics Magazine, 64* (5), 291-314.

Kline, Morris (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.

Knuth, Eric J. (2002). Teachers' conception of proof in the context of secondary school mathematics, *Journal of Mathematics Teacher Education. 5*, 61-88.

Liu, Po-Hung (2003). T*he relationship of a problem-based calculus course students' views of mathematical thinking*. Ph. D. dissertation thesis, Oregon State University, USA.

Mason, John and David Pimm (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular, *Educational Studies in Mathematics, 15,* 277-289.

Mazur, Barry (2003). *Imagining numbers (particularly the square root of minus fifteen)*. London: Akken Lane the Penguin Press.

Otte, Muchael (1994). Mathematical knowledge and the problem of proof, *Educational Studies in Mathematics*, 26, 299-321.

Radford, Luis (1997). On psychology, historical epistemology, and the Teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics, *For the Learning of Mathematics, 17* (1), 26-33.

Pinto, Marcia and David Tall (2002). Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory, *For the Learning of Mathematics, 22* (1), 2-10.

Tall, David (2002). *Differing modes of proof and belief in mathematics*, presented to 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, November 16-19.

Weber, Keith (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique, *For the Learning of Mathematics, 22* (3), 14-17.

Wells, David (1995). *Your are a mathematician: A wise & witty introduction to the joy of numbers.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

作者簡介

洪萬生，國立臺灣師範大學數學系教授
Wann-Sheng Horng is a Professor in the Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
e-mail: horng@math.ntnu.edu.tw

投稿日期：92 年 12 月 29 日
修正日期：93 年 04 月 08 日
接受日期：93 年 04 月 14 日

Journal of Taiwan Normal University:
Mathematics & Science Education
2004, 49(1),1-14

What for Proof vis-à-vis Education Reform Issues?

Wann-Sheng Horng
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Abstract

Mathematical capabilities like problem-solving, communication and connection have been primarily concerned by mathematics educators since 1980s. Underlying these capabilities there is a crucial denominator, namely, mathematical argumentation. In this article, the author will try to make a sketchy review on the related research publications. In the light of HPM, my theme will first be to remind designer of mathematics curriculum / editors of textbooks of the logical fallacy manifested with some conventional geometrical arguments. Take for example, logical order of geometrical propositions suggested by the *Mathematics Framework for California Public Schools* will apparently commit circular fallacy in the context of Euclid's *Elements*. Based on Freudenthal / Hanna & Jahnke's idea of "local organization", I will then go on to argue that a compromise between methodological visualization and logical rigor could be reached by teachers in the context of classroom practice. This may well explain how researches on HPM can benefit mathematics educators / teachers in a way that they can make proof more sense in their teaching as one can learn from Clairaut and Liu Hui. As a conclusion, I hope my argument in terms of the HPM has shown that proof should be presented not only to make convincing but more importantly, to explain mathematical knowledge.

Key words: mathematical argumentation, proof, ancient texts, HPM