

第三章 研究方法

第一節 研究方法與研究設計

本研究之目的，在探討高中學生在學習三角函數單元時，先學習廣義角三角函數定義之可行性。據此目的設計教學實驗，期望能對於學生在不同的教材安排學習歷程中，其學習成效、學習遷移以及過程中遭遇的問題，有深入的認識及實徵性證據，本研究混合自然探究、質的資料和統計分析的研究方法(Patton,1995)，從教學中適當時機收集資料，經統計得到量的分析，再從量的結果探索趨勢或形成猜測；同時也進行內容分析，採開放式、歸納式地觀察現象並加以詮釋。其基本理念如下：

1. 藉由分組實驗，在教學過程中適當控制變因(如教師、教材內容、上課時數…等)，以期能在其他變因(如學生程度)皆相近的狀況下，比較出改變教學序列所造成的影響。
2. 由於教學對學生和教師而言是一個變動的歷程，故在設計之初，便保持彈性，研究者對教學和施測的實行上，可以因時因地因人而調整。
3. 對於所收集的資料，不固守預定的結果，以發現導向(discover-oriented)的研究方法歸納分析。
4. 資料分析以質的分析為主，量的分析為輔。

本研究採用合作研究的方式，由多位有經驗的資深教師和研究者共同討論、設計規劃研究方法，以彌補因缺乏相關參考資料而造成失誤的情

形，並藉助研究者的三角檢定(investigator triangulation)與資料三角檢定(data triangulation)作為方法設定是否理想的檢驗。

本研究透過此專家合作發展教學實驗課程，排除個別設計時間，會議討論實驗課程，共約 80 小時，歷時五個月。對於兩種不同學習順序的教材，皆設計到盡可能符合學生認知心理邏輯及數學結構邏輯。

本研究專家小組成員如下：

大學教授	數學教育博士班學生	高中資深教師	國中資深教師	數學教育碩士班學生
一位	三位	三位	三位	四位

第二節 教學實驗設計

研究設計與方法

本研究對兩群學生分別進行三角函數兩種不同學習順序---傳統順序與新順序---的教學實驗。施以傳統順序的學生群乃為控制組；施以新順序的學生群乃為實驗組。在此教學實驗中適當控制可能影響學習成效的變因(如教師、教材內容、學生程度、上課時數…等)，比較學習順序之變因對學生所造成的影響。

在研究進行該年，高一學生因為處於課程改革的階段，在國中並未學習過三角函數，而高中課程中的三角函數單元，安排在高一下第二次段考的範圍，研究為避免補習班先教，所以選擇在寒假一開始的時間上課，以降低學生先學習過銳角三角函數的狀況發生。

在教學設計上，本研究根據教學內容的多寡和難易度及傳統所需教學時間，安排五天共十個小時的教學。兩組的教學內容一致(概念、定義、例題…等)，只是順序不同。本研究透過專家合作發展教學實驗課程，排除個別設計時間，會議討論實驗課程，共約 80 小時，歷時五個月。對於兩種不同學習順序的教材，皆設計到盡可能符合學生認知心理邏輯及數學結構邏輯。是以，本研究特別考量教材內容的連貫性，概念之銜接性，教學方法的適切性等等。

本研究透過課間成就測驗、回饋問卷、教師反思等方法來探討先學廣義三角函數之可行性問題。再以遷移測驗題來探討學生在不同學習順序下學習遷移與數學能力之異同。對於新順序之教材與教學活動安排方面，本研究針對課程講義，根據研究結果及教學實務面來提供建議。

實驗組與控制組學生經歷之教學共同點：

- a) 根據教學內容的多寡和難易度及傳統所需教學時間，安排五天共十個小時的教學。

- b) 教學內容一致(概念、定義、性質、例題、類題、練習題)。
- c) 學生上課時都使用課堂講義，參考高中數學第二冊及學校補充教材內容。
- d) 課堂上學生都經歷聽講、個別練習、上台演示、回答教師拋問、師生討論、同儕討論等活動。
- e) 教師安排作業供學生回家自行練習，不須繳回，但在下次上課時針對有問題的練習會進行討論。回家作業是以課堂例題之類題為主。
- f) 兩組都花了 50 分鐘來引入廣義角三角函數定義；引出銳角三角函數定義上，兩組所花時間大約相同。

實驗組與控制組學生經歷之教學相異點：

教學單元順序不同。

教學單元之內容大綱如下：

1. 廣義角、廣義角的三角函數---定義、標準位置角、同界角、象限角、特殊角三角函數。
2. 三角函數性質(正負、象限角)--- 象限角三角函數、角的位置與函數正負的關係、三角函數的值域與圖形。
3. 換角公式---使用象限角轉換角度、換角公式。
4. 三角函數的基本關係(廣義角)--- 倒數關係、商數關係、平方關係、
 $\sin \pm \cos$ 和 $\sin \times \cos$ 、 $\tan + \cot$ 和 $\sin \times \cos$ 。
5. 三角函數的基本關係(銳角)--- 倒數關係、商數關係、平方關係、 $\sin \pm \cos$
和 $\sin \times \cos$ 、 $\tan + \cot$ 和 $\sin \times \cos$ 。
6. 銳角三角函數定義---定義、符號、餘角關係。

傳統順序為 6→5→1→2→4→3。

新順序為 1→2→3→4(含 5)→6。

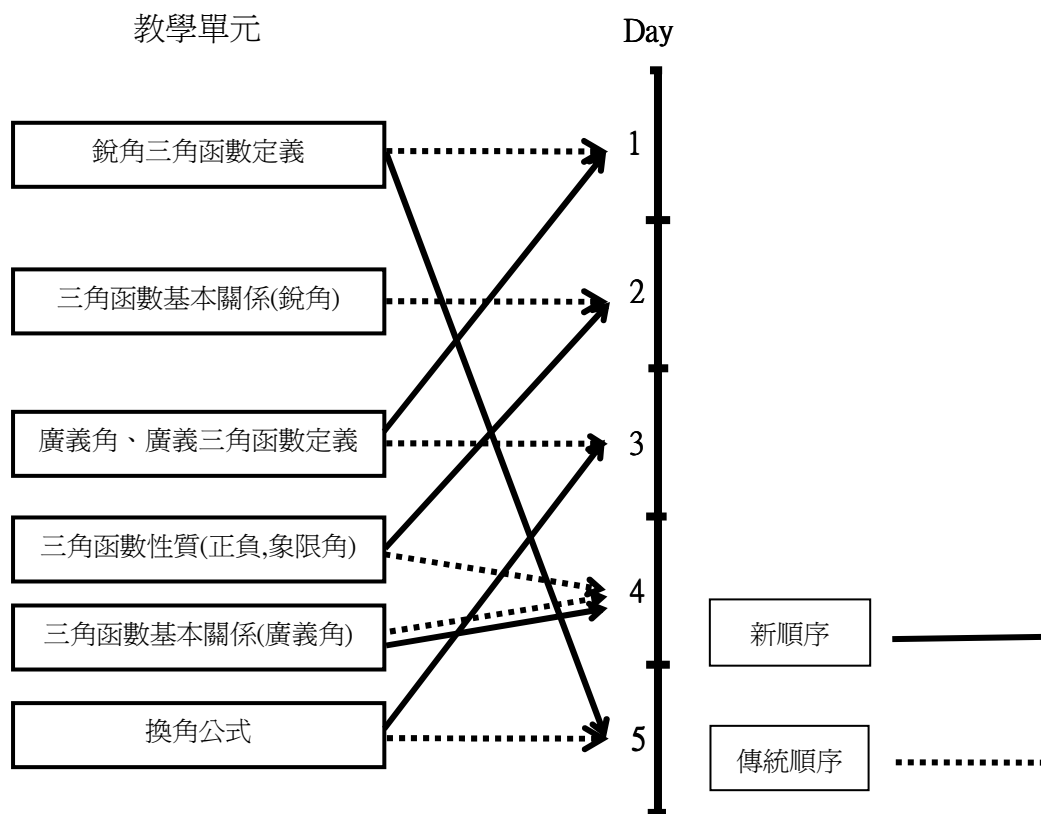


圖 3-2-1 新順序與傳統順序教學單元日序分配

如圖 3-2-1 所示，對於三角函數基本關係與換角公式此兩部分，傳統順序中，三角函數基本關係在銳角時即自成一單元，到擴充至廣義角時又再簡短進行第二次的介紹，之後才介紹換角公式。因換角公式在銳角中並不需，故新順序中，將此兩部分順序對調，置三角函數基本關係於後，同時含有非銳角及銳角的例子；如此學生在學習到銳角時，不需再對此部分進行第二次教學。

新順序中教學特點

廣義角到銳角三角函數定義 新順序中，廣義角三角函數定義的引入如下：給一直角坐標系，任給一標準位置角 θ ，在其終邊上任取一點 $P(x,y)$ ，令 $\overline{OP}=r$ ，定義 $\sin\theta=\frac{y}{r}$ ， $\cos\theta=\dots$ 等六個函數。教學中會出現 θ 在各種不同象限的例子，而終邊上點 P 的位置也可以任意移動使 r 不一定為 1，且 x, y 隨之改變。接著，在經過廣義三角函數各種性質與概念的教學之後，將銳角視為限制在第一象限的廣義角特例，再將第一象限中的直角三角形脫離坐標系，引出銳角三角函數的定義。

三角函數基本關係 新順序中，三角函數基本關係直接以廣義角引入，廣義角同時含有非銳角及銳角的例子，在學生之後學習到銳角三角函數時，不再以不在坐標平面上的直角三角形來重新介紹基本關係，而只是把銳角三角函數的基本關係當成是廣義角中的特例。

第三節 研究樣本

樣本為立意取樣，有學生 53 位，為台北市某公立女子高級中學一年級學生(16 歲)。該校為台北市頂尖高中之一。樣本中 28 人來自於一班數理資優班，全班自願都參加，其餘來自兩班普通班共 25 人，採自願參加。因控制組與實驗組上課時間不同，依學生志願及各組名額限制，將學生均分為兩組，一組有數理資優班 14 位、普通班 12 位，另一組有數理資優班 14 位、普通班 13 位。

在分組後，本研究首先以這兩組學生高一上學期數學總成績檢視其數學程度的差異。透過獨立樣本 t 檢定的分析，分析結果發現，t 考驗雙尾檢驗的顯著性 sig.=0.216，未達顯著水準，顯示兩組學生的平均數沒有差異。

表3-3-1：研究樣本教學前數學成績t檢定結果

Group Statistics

group	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
score A	27	77.7407	7.84755	1.51026
B	26	80.4615	7.97612	1.56425

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
score	Equal variances assumed	.002	-.962	51	.216	-2.72080	2.17366	7.08460	1.64301
	Equal variances not assumed		-1.251	50.848	.217	-2.72080	2.17434	7.08628	1.64469

樣本學生在國中及高一上階段，都未正式學習過銳角或廣義三角函數概念，有部分在物理課或補習班非正式的學習過。根據本研究前置問卷調查發現：控制組有 4 位，實驗組有 4 位在教學實驗前即知道銳角三角函數 $\sin x$ 及 $\cos x$ 之定義。完全沒聽過或曾聽過但已忘記正確內容的各為 22, 23 位，可以正確寫出銳角三角函數中 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 的邊長比定義各有 4 位。

第四節 研究工具

本研究所使用的工具為任課教師及紙本研究工具：

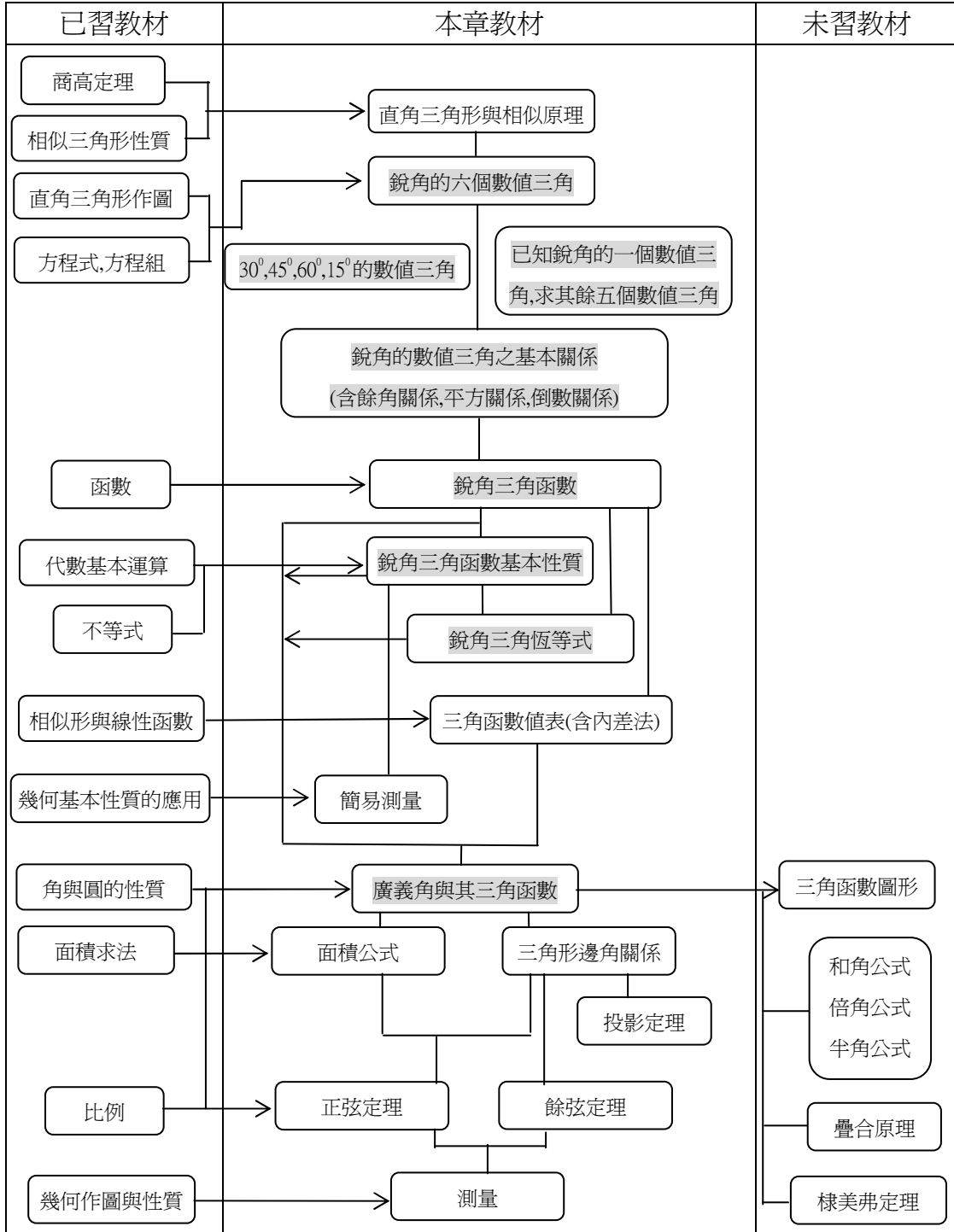
擔任教學的老師是研究者之一，為該校數學教師，教學年資為十年(國中三年、高中七年)，同時也在國立台灣師範大學修習數學教育碩士課程，在研究學校任教已五年。

本研究所使用的紙本研究工具包含課程講義、回家作業卷(含回饋問卷)、課間成就測驗卷、遷移測驗卷。現說明如下：

壹、上課講義(課程標準,上課的學習單)

一、三角函數單元教材內容分析

表 3-4-1：教材地位分析



※註：1. 本圖取自康熙圖書高級中學數學第二冊教師手冊。

2. 圖中底色為灰色的單元為本研究上課內容。

二、兩份教材差異處

研究小組根據課本內容，經會議討論，將發展結果編製成課程講義，講義的內容涵蓋我國高中數學第二冊廣義三角函數的教學內容範圍，並含有老師講解的例題、學生課堂練習的類題，學生可直接在講義上作答。講義中內容的順序搭配課堂教學內容，其內容與順序參考面的教學實驗部分，兩份教學單元僅順序相異。

實驗組教材發展過程及結果詳見第四章第一節介紹。

三、內容格式說明及使用方式

兩組上課講義的格式一致，將上課內容以大綱呈現，並有一些空白處由學生抄錄重點，例題和類題完全依教師上課順序排列，上課時教師的拋問及欲討論的內容，也都安排在講義上，供學生上課以及回家複習使用。

圖 3-4-1：上課講義內容及格式說明

PART 2 廣義角的三角函數

引例 函數的意義 相 成比例

甲.廣義角三角函數定義

1.定義.



名稱	比值	中文名	英文
			<i>sine</i>
			<i>cosine</i>
			<i>tangent</i>
			<i>cotangent</i>
			<i>secant</i>
			<i>cosecant</i>

例 1:(1)點 P(-12,5)在標準位置角 θ 之終邊上,寫出 θ 的六個三角函數值.

(2)寫出 660° 的六個三角函數值

(3)寫出 -60° 的六個數值三角函數值

例題呈現

*練習拼字和中文名稱及念法

*關於符號的使用

(1) $\sin\alpha, \sin\beta, \sin x, \sin(90^\circ-\theta), \sin 2\theta$

(2) $\sin\theta$ 是一個實數值

2.由上面的定義可知：

性質 1: 同界角的所有函數值皆相等。

性質 2: 對任意的角 θ ，有倒數關係。

(1) (2)

(3)

性質 3: 對任意的角 θ ，有商數關係。

(1) (2)

重要性質或定理

3.特殊角三角函數

	<i>sin</i>	<i>cos</i>	<i>tan</i>
30°			
45°			
60°			

接下來幾節課我們要討論下列問題，不妨想一想：

- 會不會有某一些角度的某些函數不能定義？
- 三角函數值一定為正嗎？哪些函數在什麼情況為負？
- 可以利用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 表示出其他函數嗎？
- 六個函數值裏，只知其中一個，可以求出另外五個嗎？怎麼求？

拋問與討論

例 2:求出下列函數值

(1) $\sin 60^\circ$ (2) $\cos 150^\circ$ (3) $\tan 225^\circ$

(4) $\sec 330^\circ$ (5) $\csc(-45^\circ)$

(6) $\cot(-300^\circ)$ (7) $\sin(-240^\circ)$

(8) $\cos(-45^\circ)$ (9) $\cos(-120^\circ)$

貳、回家作業(含回饋問題)：

為求教學實驗貼近真實教學，以利探討可行性，故傳統教學中的回家作業仍含在教學實驗中。回家作業是以上課中例題同類型問題為主。回饋問卷中探測情意及態度的問答題，分別安排在第三天及第四天的回家作業中。

參、課間成就測驗卷與遷移測驗卷：

在課堂的進行中，每告一段落便安排一些測驗題目，在課間進行測驗。所選擇的題目有兩大類，一是成就測驗9大題共16小題，對教學進展中重要數學概念進行測驗；一是遷移測驗題共3題，探測學生是否會利用已建立的數學認知基模、策略，來解決尚未學習過的數學內容中之問題。前者用以比較兩組學習成效，後者用以比較兩組學生在學習遷移表現的異同。

成就題依其所涵蓋的概念，分為十四個項目進行信度分析，結果Alpha係數為0.708。

下圖說明每個題目施測的時間點：

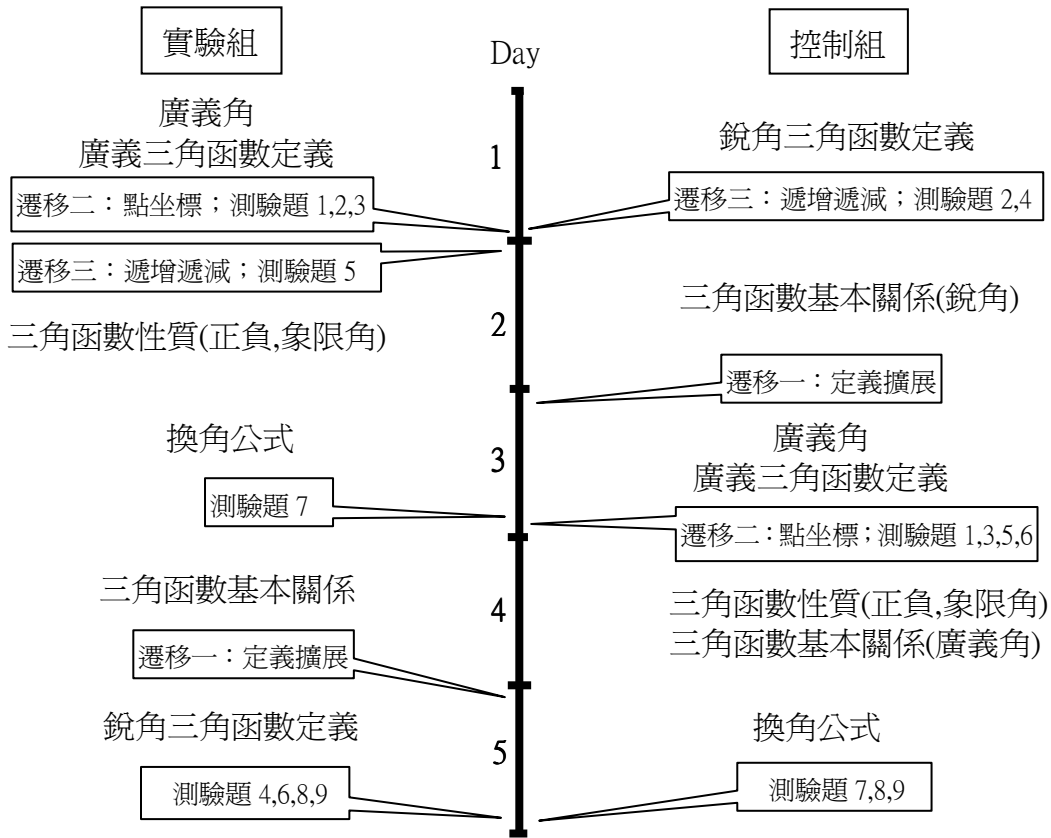
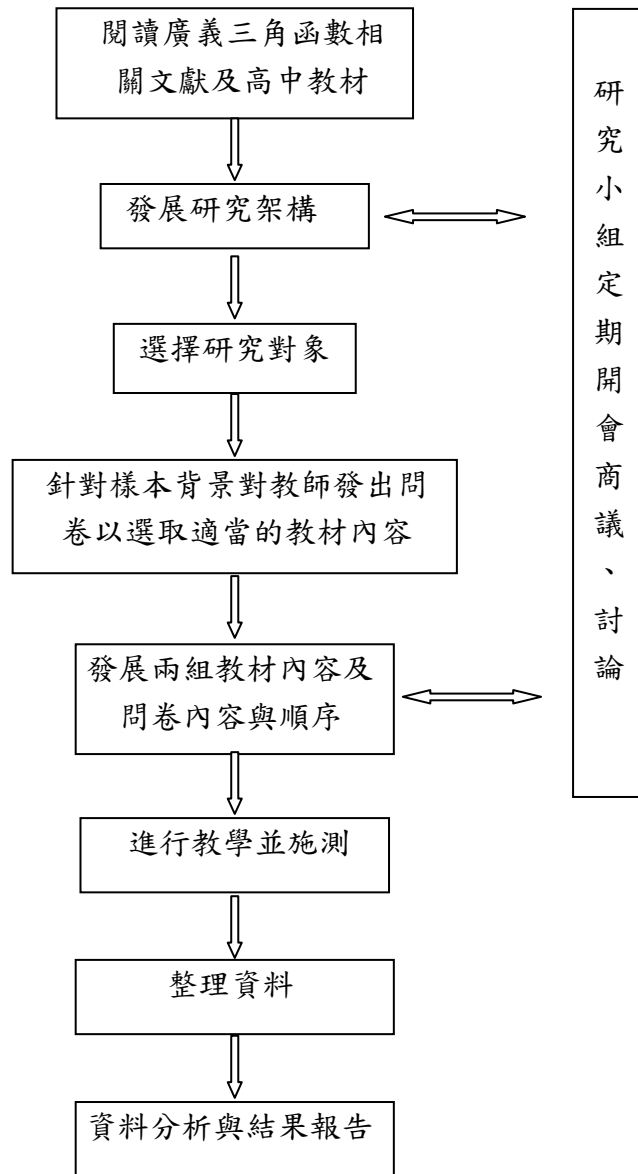


圖 3-4-2：測驗題施測點說明

第五節 研究流程圖



第六節 研究限制

1. 本研究的樣本因現實因素的考量(便於教學、抽樣便利等)，僅能選取國中基本學力測驗 PR 值在 95% 以上的女學生，在成就測驗方面，較不易受國中數學基礎不佳的影響，與一般教學中，尚須注意加強學生基本能力的情形有所不同，故研究結果不宜推論至所有高中生，還需考量相關因素。
2. 考量到學生必須沒有學過三角函數的背景，教學時間和課間測驗的時間必須在寒假中進行；又限於人力，教學時間規劃在五天內共十個小時完成，學生在學習的歷程受到壓縮下，若干問卷的題目中受到當下教學內容的干擾情形嚴重，此為一缺憾。同時，教學過程中因學生發問、教師補救先備知識等活動，致使原預備的測驗問卷無法全數施測，甚為可惜。若在正常上課時間進行同一實驗，時間可以延長，對於學生學習的歷程，有何影響，是未來可以深入探討的方向。
3. 本研究所收集的資料非常豐富，有些問題的探討因為時間和人力的關係無法深入分析，例如可以掌握實驗教學後到學校教學前的時間進行個別訪談。