

中學生通訊解題第九期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

89901

試求 $\sqrt{111111111111 \times 1000000000005 + 1}$ 之值。

參考解答：（方法一）

$$\begin{aligned} & \frac{(111111111111)}{9} \times 9 = \frac{(999999999999)}{9} \\ & = \frac{10^{12} - 1}{9} \\ \text{原式} &= \sqrt{\frac{10^{12} - 1}{9} \times (10^{12} + 5) + 1} = \sqrt{\frac{(10^{12} - 1)(10^{12} + 5) + 9}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{(10^{12})^2 + 4 \cdot 10^{12} + 4}{9}} = \sqrt{\frac{(10^{12} + 2)^2}{9}} \\ &= \frac{10^{12} + 2}{3} = \frac{10^{12} - 1 + 3}{3} = 333333333333 + 1 = 333333333334 \end{aligned}$$

（方法二）：

設 111111111111 為 x

則 1000000000005 為 $9x+6$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sqrt{x(9x+6)+1} = \sqrt{9x^2+6x+1} \\ &= \sqrt{(3x+1)^2} = 3x+1 \\ &= 333333333334 \end{aligned}$$

解題重點：

1. 把數字轉化成較簡單的形式，或以符號替代。
2. 因式分解與開平方根

評析：

1. 本題參答人數共有 214 位，平均得分數為 5.83，得分率為 83.28%。
2. 答題品質較佳者有：北市敦化國中劉芳瑜，成德國中劉昱亞，民生國中張哲瑞、鍾佳琦、陳建仲、陳怡瑋，蜆橋國中陳玉潔，中正國中侯景翰，南門國中陳錦年，民生國中曾怡嘉，仁愛國中吳宗哲，復興中學蘇郁凱，福和國中劉胤廷、楊智寰，新莊國中潘柏諺，新泰國中張偉省，彰化員林國中張哲維，陽明國中李昱融，台南建興國中黃信溢，新竹

光華國中賴俊儒，高雄縣鳳西國中葉仲恆，高師大附中蔡政洋。

問題編號

89902

求出最小的正整數 n ，使 $\frac{n}{2}$ 為完全平方數， $\frac{n}{3}$ 為完全立方數， $\frac{n}{5}$ 為完全五次方數。

參考解答：

因為 n 被 2,3,5 整除

可設 $n=2^a3^b5^c$

於是 $\frac{n}{2}=2^{a-1}3^b5^c$ $\frac{n}{3}=2^a3^{b-1}5^c$ $\frac{n}{5}=2^a3^b5^{c-1}$

由所需滿足的條件，知 $a-1$ 必為偶數，

a 必為 3 與 5 的倍數，所以 a 的最小值為 15。

同理 b 與 c 的最小值分別為 10,6。

故得 n 的最小正整數為 $2^{15}3^{10}5^6$ 。

解題重點：

(1)此題只要利用因數、倍數、最小公倍數的觀念即可作答。

解析：

(1)部分徵答者，在解題過程中直接寫出結果，未說明原因。

(2)部分徵答者，“整除的符號”寫錯了因數、倍數的位置，例如： $2 \mid (a-1)$ (2 整除 $a-1$) 誤寫成 $(a-1) \mid 2$ 。

(3)答題優良者：彰化員林國中徐勝駿、陽明國中侯景維，基隆銘傳國中趙斌新，高雄縣鳳西國中葉仲恆，北市介壽國中蔡佳玲，蜆橋國中吳奕緯，敦化國中薛朝文，光復國小劉欣瑜。

(4)本題參答人數共有 162 人，平均得分數 5.12 分，得分率為 74.43%。

問題編號

89903

達文西曾作一幅素描，此素描是由邊長相等的正五邊形和正三角形所組成的封閉多面體，且正五邊形的每邊都與正三角形共邊，正三角形每一邊也與正五邊形共邊。若多面體的頂點數-邊數+面數=2，則此多面體的表面共有多少個正五邊形？多少個正三角形？

參考解答：

(解法一)

設共有 x 個正五邊形， y 個正三角形，則點數 $=\frac{5x+3y}{4}$ ，邊數 $=\frac{5x+3y}{2}$ ，

面數 $=x+y$ ，因 $\frac{5x+3y}{4} - \frac{5x+3y}{2} + (x+y)=2\dots\dots①$ 又 $5x=3y\dots\dots②$

解①，②得 $x=12, y=20$

(解法二)

設正五邊形之個數為 x ，則頂點數 $=\frac{5x}{2}$ ，邊數 $=5x$ ，面數 $=x+\frac{5x}{3}$

由 $\frac{5x}{2} - 5x+x+\frac{5x}{3}=2$ 得 $x=12$

故正五邊形有 12 個，正三角形有 $\frac{12 \times 5}{3}=20$ 個

解題重點：

- 1.此題可設兩個未知數，再以二元一次聯立方程組求解；亦可只令一個未知數解之。
- 2.本題不管採用解法一或解法二，其解題關鍵都要用到正五邊形邊數與正三角形邊數相等之條件。

評析：

- 1.在參加解題者之中，採取解法一者有 18 人，採取解法二者有 13 人，採用其他解法者有 10 人。
- 2.說理清晰解法簡捷者計有北市仁愛國中吳宗哲、螢橋國中吳奕緯、敦化國中薛朝文、明德國中王琨傑、復興中學蘇郁凱；板橋中山國中張源平；基隆銘傳中學江政融；彰化縣員林國中徐勝駿等同學。
- 3.本題參答人數共有 184 人，平均得分數 4.92 分，得分率 70.29%。

問題編號
89904

ABCD 為一個圓內接四邊形，O 為圓心，且 O 點不在線段 AC 上，連接線段 OA 與線段 OC，當四邊形對角線互相垂直時，求證：四邊形 ABCO 與四邊形 AOCD 面積相等。（注意：四邊形 ABCO 與四邊形 AOCD，其中一個為凸四邊形，另一個為凹四邊形）

參考解答：

(i)當 O 點不在BD線段上時，連接BD與AC交於 G，自 O 做OE ⊥ BD垂足為 E 點，及自 O 做OF ⊥ AC垂足為 F 點，如右圖所示，則BE=DE。因為OE ⊥ BD，∠OED=90°，OF ⊥ AC，∠OFG=90°，AC ⊥ BD，∠FGE=90°所以四邊形 OEGF 為矩形，EG=OF。

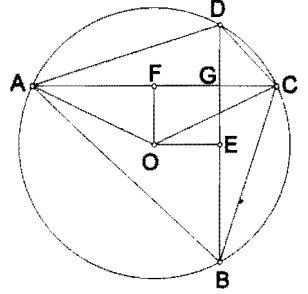
$$\text{四邊形 } ABCO = \frac{1}{2} \overline{BG} \times \overline{AC} - \frac{1}{2} \overline{OF} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times (\overline{BG} - \overline{EG}) = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{BE};$$

$$\text{四邊形 } AOCD = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{DG} + \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{OF} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times (\overline{DG} + \overline{EG}) = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{DE}.$$

因為 $\overline{BE} = \overline{DE}$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{DE}$$

得證四邊形 $ABCO$ 面積等於四邊形 $AOCD$ 面積



(ii) 當 O 點在 \overline{BD} 線段上時，連接 \overline{BD} 與 \overline{AC} 交於 G 點，如下圖所示，

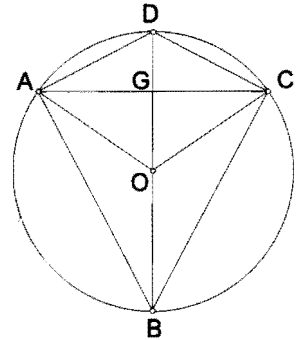
$$\text{四邊形 } ABCO = \frac{1}{2} \overline{AG} \times \overline{BO} + \frac{1}{2} \overline{GC} \times \overline{BO} = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{BO} = \frac{1}{2} (\overline{AG} + \overline{CG}) \times \overline{BO} = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{BO}$$

$$\text{四邊形 } AOCD = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{DG} + \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{GO} = \frac{1}{2} \overline{AC} \times (\overline{DG} + \overline{GO}) = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{DO}$$

因為 $\overline{DO} = \overline{BO}$ 所以四邊形 $ABCO$ 面積等於四邊形 $AOCD$ 面積

解題重點：

- (1) 先分成 O 在 \overline{BD} 上與 O 不在 \overline{BD} 上兩種情形討論。
- (2) 再將四邊形分割成兩個三角形，利用“弦心距垂直平分弦”的觀念即可證明。



評析：

- (1) 大部分同學只證明 O 不在 \overline{BD} 上的情形，未證明 O 在 \overline{BD} 上的情形。
- (2) 徵答優良者有北縣中山國中張源平，北市民生國中葉育魁、鍾佳琦，金華國中許庭碩，中正國中侯景翰，南門國中陳錦年。
- (3) 參答人數有 82 人，平均得分數 4.47 分，得分率為 63.86%。

問題編號

89905

同樂會中小明表演了一種撲克牌遊戲：他將一副撲克牌正面朝下（共 52 張），依照黑桃、梅花、紅心、方塊、黑桃、梅花、紅心、方塊...的順序排列，再請大華從最上面拿起若干張撲克牌，將這些撲克牌的次序顛倒（正面依然朝下），再整個插入剩餘的撲克牌中（剩餘的撲克牌任意分成兩部分，大華的撲克牌再插入此兩堆中），此時小明再從頭將撲克牌每四張一組，結果他宣稱每一組撲克牌都會出現四個不同的花色。請問小明的說法是否正確，說明你的理由。

參考解答：

設 A 為拿出的撲克牌，剩下的撲克牌分成 B 、 C 兩個部分，而 A 部分撲克牌的次序顛

倒之後稱為 A' 。將 A' 插入 B 、 C 之間，整個撲克牌的順序由上至下為 $B-A'-C$ ，

- (1) 如果 B 、 A' 、 C 都是 4 的倍數，則每一組撲克牌都會出現四個不同的花色。
- (2) 如果 B 、 A' 、 C 中有一堆的張數不為 4 的倍數，在 A' 的張數大於 2 時，則由上至下每四張一組，最多有兩組橫跨 B 、 A' 之間與 A' 、 C 之間，令此兩組（一組有四張）分別為 P 、 Q 。

根據假設可知若 P 在 B 之間有 m 張牌，則 P 在 A' 的部分就有 $(4-m)$ 張牌，因為從 B 開始每四張一組，所以這 m 張牌剛好與 B 前面的 m 張牌花色的順序是一樣的，而 P 在 A' 部分的 $(4-m)$ 張牌剛好與 A 最後 $(4-m)$ 張牌是一樣的，而原先 52 張撲克牌是依照黑桃、梅花、紅心、方塊來排列，因此 P 的四張牌還是會有黑桃、梅花、紅心、方塊這四個花色。最後除了 Q 之外其他各組都是有四個花色，因為每一個花色都有 13 張，所以 Q 中的四張牌必是四個不同的花色。在 A' 的張數大於 3 時，有可能有一組由 A' 的牌及 B 、 C 的牌共同排成，除這組外，其餘的討論如上述知道每組 4 張都是 4 個花色，於是餘下的這一組也是 4 個花色了。由上述所言知小明的說法是對正確的。

解題重點：

此題為一個操作型的題目，可用實際操作探索尋求一種形式並加以描述出來。

評析：

- (1) 大部分的同學都能借用符號或文字來表達撲克牌花色排序情形。如「SCHD」、「ABCD」、「1234」、「 $a_1a_2a_3a_4$ 」這是很好的現象。
- (2) 優良徵答者有北市南門國中陳錦年，民生國中黃彥豪、張哲瑞，北縣新莊國中吳之堯、潘柏諺，江翠國中黃明山，台南市建興國中黃信溢，新竹市光華國中賴俊儒，高雄市立法中學蔡政江，高師大附中蔡政洋。
- (3) 參答人數有 91 人，平均得分數 4.33 分，得分率為 61.86%。

敬告讀者：

為配合會計年制改成曆年制，本刊自民國 90 年起，每年仍發行 10 期，但原七、八月休刊改為二、八月休刊。