

第2章 杜知耕及其《數學鑰》的歷史脈絡

2.1. 《數學鑰》成書的時代背景

《數學鑰》一書成書於康熙二十年（公元1681年），爲了對該書有更深入的了解，我們試著先了解一下當時的時代背景，底下分爲政治背景與思想文化二個面向來探討。

2.1.1. 政治背景

中國古代帝王對天象、歷數向來重視，²以爲天象有關治理，每逢變異，皇帝常反躬自省，因此，編製歷法一直是統治者所關心的大事。³而天象與歷數之研究常是需要大量的算學及天文的知識。因此，當朝政府鼓勵或禁止天象與歷數之研究，常是該朝代算學與科學是否持續進步的原因。如：明朝政府即爲了怕士子與農民假借天象而造反，因此，除透過八股取士之外，也嚴禁人民研究天文曆法，使得和天文曆法相輔相成的中國古代數學加速衰退，因此，相較於宋元數學高度發展的成就，明代數學呈現停頓、衰退的情形。⁴

明朝滅亡後，湯若望在《崇禎曆書》的基礎上，進行整理與增加內容後編成《新法曆書》。清兵入北京後，他把歷書獻上，並期望西方歷算能爲統治者所採用。多爾袞採納了湯若望的建議，下諭其至欽天監任職。⁵湯若望憑藉其科學才能，逐漸博得了順治帝與清政府的信任。西方歷算亦漸成爲當時的歷算的重心。

康熙即位後不久，發生了中西歷法之爭的楊光先（1597~1669年）事件，這是一場科學的戰爭，也是一場政治的鬥爭。其導源於回回與西洋天文家之爭論。但也因此引發了康熙努力學習自然科學的動機，及重視科學技術與支持科學研究。後來康熙在給大臣議政，論及學習動機時就曾說：「爾等惟知朕算術之精，卻不知朕學算之故。朕幼時，欽天監漢官與西洋人不睦，互相參劾，幾至大辟。楊光先、湯若望于午門外九卿前當面賭測日影，奈九卿中無一知其法者。朕思已

² 「歷數」亦作「曆數」，指曆法。或指天道、天運，星象運行的軌道及週期，古人以此觀盛衰興亡的氣數。此外，清高宗執政後，爲避諱其名弘曆，後多用「歷數」。

³ 參見韓琦，《康熙時代傳入的西方數學及其對中國數學的影響》，頁7~9。

⁴ 參見鍾秀瓏，《陳蘆謨〈度測〉之內容分析》，頁1~10。

⁵ 參見黃一農，〈湯若望與清初西歷之正統化〉，收入戴吳嘉麗等編《新編中國科技史》，頁465~490。

不知，焉能斷人是非，因自憤而學焉！」⁶

2.1.2. 思想文化

由於康熙帝對科學技術的重視及清朝政府對天文、歷算等科學研究的鼓勵與支持，清初的學術界對算學的研究也因此蓬勃發展。然不論是面對剛剛傳入中國，尚不熟悉的西方數學，或源遠流長但因明代數學衰微所引起斷層的中國古代數學，清初的學者同樣的不熟悉也不知如何取捨。有人尊古而排斥西學，有人則只重西學，鄙視傳統數學，於是形成中西數學之爭。

梅文鼎自幼留心算學，積多年研究中西數學之經驗，深知「會通」的重要性。因此他主張「會通中西」。⁷而此主張也與康熙的「西學中源」說的想法與作法類似。因此「西學中源」、「會通中西」成爲清初算學研究的一個的主流。薛鳳祚、⁸王錫闡、⁹方中通、¹⁰李子金、梅文鼎、杜知耕、...等人皆以此爲方向，嘗試從古代典籍中尋找某些與西方相似或類似的記載，以證實西學出於中國，中國文化是西方文化之源頭。

除此之外，梅文鼎按照「形」和「數」來區別數學物件的作法也在當時廣爲流行，其所謂：「夫數學一也，分之則有度有數。度者量法，數者算術，是兩者皆由淺入深。是故量法最淺者方田，稍進爲少廣，爲商功，而極於勾股；算術最淺者粟布，稍進爲衰分，爲均輸，爲盈朒，而極於方程。方程於算術，猶勾股之於量法，皆最精之事，不易明也。」¹¹梅文鼎將數學分成了算術及量法，並且他認爲傳統幾何學的「最精之事」和達於「極」者是勾股術。並將西法中的幾何學知識與九章的方田、少廣、商功、勾股結合在一起，故而「幾何即勾股」便成爲其研究西方幾何學的具體實踐。¹²而梅文鼎這種欲用傳統勾股化約西方幾何學的思想亦爲「西學中源」說提供具體想法與作法，並爲當時學者所接受。如：方中通的「西學歸九章」、「九章皆勾股所生」的說法就與其有異曲同工之妙。

⁶ 引自《庭訓格言》，頁 86。

⁷ 參見孔國平，〈「會通中西」的天算家梅文鼎〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系—第七卷》，頁 144~145。

⁸ 薛鳳祚（1599~1680 年），字儀甫，號寄齋，山東益都人。著有《天步真原》三卷，又著《天學會通》術，並曾根據穆尼閣所傳授歷算術，編成《歷學會通》。

⁹ 王錫闡（1628~1682 年），字寅旭，號曉庵，自號天同一生，蘇州府吳江縣人。著有《曉庵新法》6 卷。

¹⁰ 方中通（1634~1698 年），字位伯，號陪翁，安徽桐城人。著有《數度衍》、《揚方問答》、《物理小識》、《浮山文集》。

¹¹ 引自梅文鼎，《方程論》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，頁 4b-5a。

¹² 參見劉鈍，〈梅文鼎在幾何學領域中的若干貢獻〉，收入梅榮照主編《明清數學史論文集》，頁 184。

2.2. 杜知耕的生平事跡、數學學習及思想、《幾何論約》的成書

與學術交遊

2.2.1. 杜知耕的生平事跡

杜知耕字端甫，號伯瞿，河南柘城城關北街人，康熙丁卯年舉人，生卒年月不詳。杜知耕生長在一個與明清政權有著密切關係的柘城世家，家境殷實，世代書香。¹³

曾祖父杜銀，以子杜齊芳貴贈文林郎刑科給事中。祖父杜齊芳，字元驊，號雲槃，為人清剛高警有忠孝大節。明萬曆己未科莊際昌榜進士，初授平陽府推官，其地多夷落，叛服不常。齊芳嚴覆虛實，約身束下，釐弊剔奸，諭以朝廷威德，邊人帖服進貢。後繡衣徐卿伯同劉中丞上其功於朝，升任刑科給事中。上任首擊大璫魏忠賢及其黨禍，後因受宦官魏忠賢陷害，落職歸返故里。崇禎即位後又以特恩拔置刑垣都諫，彈劾了當時的宰相陽羨（即溫體仁），陽羨以莫須有的罪名將他下獄大理寺，後遇赦重歸故里。生平嗜書，手不釋卷，三子行恕、行素、行醜受其影響皆好學有文采，行恕、行素皆國朝舉人。¹⁴

知耕父杜行恕，字無伎，號容居。幼好學，尤善詩書，順治辛卯舉於鄉，人咸以大器目之。性耽林壑，不樂仕進，在柘城西邊河道上辟一精舍，環植垂柳，養蜂種藥，題名曰「柳澳」，終日嘯歌其中，怡然自得。著有詩集《柳澳初吟》，廣為傳頌。育有三子，知耕為長，另二子為杜實甫、杜玉甫，三人皆為國學生，對數學皆有研究。另知耕子杜允璿，對數學也相當愛好，對杜知耕著作的整理與出版作出很大的貢獻。¹⁵

知耕孝性天成，年十二，父行恕歿，「哀毀骨立，苦塊三年，祭葬盡禮。」¹⁶因弟皆年幼，母親又體弱多病。因此，從小他就一肩擔起了全家生活的負擔，並率兩弟勤攻苦讀數年。母體弱多病，其「躬侍湯藥，禱天願以身代母卒，淚盡繼血，生養死葬無憾。」¹⁷且其本身性格開朗，樂於助人，虛懷若谷，目標遠大，

¹³ 參見高宏林，〈杜知耕與《數學鑰》〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系—第七卷》，頁205。

¹⁴ 參見《柘城縣志》卷三人物志。

¹⁵ 同上。

¹⁶ 引自《柘城縣志》卷三人物志。

¹⁷ 同上。

從不計較小事，如其娶妻分家時，就對家中房屋、土地等財產的分配聽憑兩弟自擇，兩弟亦各退遜之，兄友弟恭的情形在柘城被傳為佳話。¹⁸

知耕幼年聰穎絕倫。因受家學之影響，初入小學時即慨然有學聖賢之志，立志作一位品德高尚、智慧超人、聲譽四方的賢哲。且其學風踏實，肯於鑽研，一絲不苟，李子金稱其「凡讀一書必求實，實有得；凡講一事，實可得，反之則不好也。」¹⁹田叔度亦於〈《杜端甫詩》序〉中說過一段其客居於杜家的親身經歷：

20

一日豫章金生謁君，再拜索君詩壽其母。君諾其請並屬之余，余竊疑君不自作而命我為之，其不能也。踴躍綴為篇進於君，君覽之默然，則盡取其先王父黃門先生所遺詩若文使余讀之。余既自愧其詩之無以稱君，亦私謂君先澤如此，竟不能作二十八字以應人可惜。……自君之歿，而後知君之深於易，然終不謂君之能詩也。明年春，君之子允璿忽出君所為詩一卷，次第讀之皆有黃門先生之遺風，然後歎余之不知君者不獨詩也，詩其一耳。²¹

顯見杜知耕學習知識的態度與精神為領悟其理，曉之以用並求取知識的真正融會貫通。

除此之外，杜知耕興趣廣泛，所學涉獵亦廣。李子金便指出其「四書五經之外，如：天文、地理、律呂、歷法、聲韻、算學之類皆極深研，幾務期得其神理而見諸行事。固非淺見寡聞、出口入耳之輩可得彷彿其萬一者。」²²而田叔度亦曾指出：

追想君居京師時，公卿大夫虛懷請益，學其按脈乎，學其布算乎。大臣濡筆而書啟事，薦為御醫乎，薦為算學博士乎。惟經學可以經世務，則君所玩之易是也。惟文章詩賦可以鼓吹太平，則君所吟之詩及其餘著作是也。彼王侯將相知之矣。²³

顯見杜知耕對天文、地理、律呂、歷法、聲韻、算學及醫學等學科皆有很深的研究。同時也可看出他在當時京師政界與學界中享有一定的聲望。

¹⁸ 參見《柘城縣志》卷三人物志。

¹⁹ 參見李子金，〈杜端甫《數學鑰》序〉，收入《柘城縣志》卷八藝文志。

²⁰ 田叔度，字江陂，康熙乙酉年副貢，與杜知耕交二十年的相知好友。

²¹ 引自田叔度，〈《杜端甫詩》序〉，收入《柘城縣志》卷八藝文志。

²² 引自李子金，〈杜端甫《數學鑰》序〉。

²³ 引自田叔度，〈《杜端甫詩》序〉。

2.2.2. 杜知耕的數學學習及思想

在知耕大約 20 歲的時候以太學生的身份遊京師，²⁴李子金便指出「甫弱冠以太學生遊京師，得西洋幾何家之書而讀之。」²⁵而田叔度亦曾說「君遊京師，初受之于諸王，留其邸教授數年，又受知於安溪學士，將表薦之，君不可乃止。」²⁶顯然杜知耕於此時期廣拜名師，其師並包含當時在朝廷很有地位的安溪學士，即李光地。且顯然十分地受到李光地的稱許與賞識。可能也由於李光地的關係，知耕大概是在當時的國子監或欽天監中學習到數學與歷法，後並留在國子監教學。

應該在同一時期，杜知耕第一次接觸了利瑪竇與徐光啓合譯的《幾何原本》前六卷，並潛心研究。²⁷根據李子金，「所謂幾何家者，不但窮方圓平直之情，盡規矩準繩之用，即百種道藝咸取資於是書，可謂簡而不遺，大而有本矣。京師諸君子，即素所號為通人者無不望之反走，否則掩卷而不讀，或讀之亦茫然而不得其解。端甫則寓目輒通，莫不渙然冰釋而無所凝滯，一時皆翕然稱異而不知其為端甫等閒之事也。」²⁸可看出當時的學者對《幾何原本》的接受度並不高。而杜知耕則對《幾何原本》中概念則寓目輒通，了然於胸，並為當時公卿大夫及學者所稱許。

杜知耕的數學思想，主要為「度算合一」與「形數合一」的概念。我們可從《數學鑰》與《幾何論約》二書的體例得到驗證。此外，李子金於〈杜端甫《數學鑰》序〉清楚指出：「端甫因思九章諸術，西洋之法得之度數者為多，中國之法得之算術者為多，然則度也、算也，皆數也，二而一者也。」²⁹又說「訓詁而疏通之，圖畫而剖析之，以考驗之形合布算之數。」³⁰顯見其形數結合的數學思想與研究方法。

其次，吳學顯為《幾何論約》所作的序中，亦指出：「凡物之生有理、有形、有數，三者妙於自然不可言合。……理為物原，數為物紀，而形為物質，形也者理、數之相附以立者也，得形之所以然，則理與數皆在其中，不得其形，則數有窮時，而理亦杳渺而不安。非理之不足恃，蓋離形求理，則意與象睽，而理為無

²⁴ 清朝在國學國子監學習的學生稱太學生。

²⁵ 引自李子金，〈杜端甫《數學鑰》序〉。

²⁶ 引自田叔度，〈《杜端甫詩》序〉。

²⁷ 參見高宏林，〈杜知耕與《數學鑰》〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系—第七卷》，頁 206。

²⁸ 引自李子金，〈杜端甫《數學鑰》序〉。

²⁹ 同上。

³⁰ 同上。

用。即形求理，則道與器合，而理為有本也。」³¹更可看出杜知耕形、理、數三者合一的想法，與其認為惟有透過形數結合才能真正認識事物本質的研究方法。

再者杜知耕對數學的抽象性有一定的認識，並認為「天地之所以立，日月之所以行，皆可以數而知之者。」³²因而在此思想的支配下，其數學學習與研究方法為「以虛例實，以小談大，自近測遠」，³³期能因此推義比類，以探索大自然變化的規律。而我們可從其所著作之《數學鑰》與《幾何論約》中，書中題目內容的題題相因，由淺入深，概念的交互引用看出。

2.2.3. 《幾何論約》的成書

由前述可知，杜知耕大約在國子監、欽天監學習或授課時，第一次接觸了《幾何原本》前六卷的譯本，並潛心研究。《幾何原本》前六卷譯本是利瑪竇與徐光啓根據德國數學家克拉維斯（C. Clavius，中譯丁先生，1537—1612）改編的歐幾里得《原本》譯出，並於1607年出版。徐光啓曾說：「此書為用至廣，在此時尤為急需，…欲公諸人人，令當時極習焉，而習者蓋寡。竊意百年之後必人人習之，即又以習之晚也。」³⁴但由于它是一部抽象的、演繹式的邏輯體系著作，與中國傳統以布算為主、程序化和機械化體系的數學大不相同，因此，至此時雖已出版近90年，仍然習之者甚寡。再加上與傳統中算書籍相較，該書解題步驟冗繁，³⁵因此，更無法為一般人所接受。杜知耕就曾說：「蓋以每題必先標大綱，繼之以解，又繼之以論，以論多者千言，少者亦不下百餘言，一題必繪數圖，一圖必有數線，讀者須凝精聚神、手誌目顧方明其義。精神少懈，一題未竟，已不知所言為何事。」³⁶

因此，如何刪繁就簡，使幾何學知識能從單純幾個數學家研究的局面，達到人人習之的普及地步，就成為當時中西會通的學者所共同的信念與研究方向。如方中通的《幾何約》、李子金的《幾何易簡集》、梅文鼎的《幾何摘要》及杜知耕的《幾何論約》，³⁷都是朝著這個方向努力。因此杜知耕設想「若一題之蘊數語輒盡，簡而能明，約而能該，篇幅既短，精神易括，一目了然如指掌」，³⁸學起來就容易多了。就在這個思想的支配下，杜知耕「就其原文，因其次第，論可

³¹ 引自吳學顯，〈《幾何論約》原序〉。

³² 引自田叔度，〈《杜端甫詩》序〉。

³³ 引自吳學顯，〈《幾何論約》原序〉。

³⁴ 引自徐光啓，〈《幾何原本》雜議〉。

³⁵ 此處「解題」包含證明，意義與今日不同。

³⁶ 引自杜知耕，〈《幾何論約》自序〉。

³⁷ 梅文鼎，《幾何摘要》二卷，收入梅文鼎，《中西算學通》。

³⁸ 引自杜知耕，〈《幾何論約》自序〉。

約者約之，別有可發者，以己意附之解。已盡者節其論，題目自明者併，節其解務簡省文句期合題意而止。又推義比類，復綴數條于末，以廣餘意」而完成《幾何論約》。³⁹

此舉雖與徐光啓於〈《幾何原本》雜議〉中所說有違背，然四庫館員對《幾何論約》的取舍是給予肯定的。其指出：

考光啓於《幾何原本》之首冠雜議數條有云：『此書有四不必，不必疑，不必揣，不必試，不必改。有四不可得，欲脫之不可得，欲駁之不可得，欲減之不可得，欲前後更置之不可得。』知耕乃刊其文，似乎蹈光啓之所戒。然讀古人書者，往往各有所會心，……亦各取其所欲取而已。知耕之取所欲取，不足異也。梅文鼎算術造微，而所著《幾何摘要》亦有所去取於其間，且稱知耕是書足以相證，則是書之刪繁舉要必非漫然矣。⁴⁰

2.2.4. 杜知耕的學術交遊

杜知耕以太學生身份遊京師，並曾留在國子監或欽天監學習與教學，因此，他和當時許多數學家和某些政要名人都有交往，如李子金、李光地、梅文鼎、孔林宗、吳學顥、田叔度、高玠等。⁴¹杜知耕以太學生身份遊京師時，曾受知於李光地，並十分地受到李光地的稱許與賞識。且在當時京師政界與學者中享有一定的聲望。茲列舉與杜知耕交遊的幾位算學家如下。

李子金（1622~1701），原名之弦，號隱山，以字行。原河南鹿邑人，後移居柘城縣驛車李村。他自幼聰敏好學，天資過人，1642年參加科舉考試，以優異成績被督學使者拔為柘城縣增廣生員。他性格開朗，平易近人，天性高尚，不拘小節。⁴²雖清羸，尚隱居，然負壯志，大部份時間從事道學、天文學、數學、律呂以及聲韻學科的研究，尤其精通數學，善勾股嘉量之術。⁴³「嘗遊京師，與客聚飲，客指鄰家樓，問以高幾許？四方幾許？李熟視良久，曰得之矣。客令人加量，悉如李所言數。」⁴⁴著有《算法通義》、《幾何易簡集》、《天弧象限表》、《解環譜》、《狂夫之言》、……等。他一生著作12種，30餘萬言，總名為《隱

³⁹ 同上。

⁴⁰ 引自〈《幾何論約》提要〉，收入《四庫全書》。

⁴¹ 高玠，字荆襄，河南柘城縣人，康熙戊辰科沈廷文榜進士，官至監察御史。與杜知耕同年交好。

⁴² 參見《柘城縣志》卷四人物志。

⁴³ 參見高宏林，〈李子金與《算法通義》〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系一第七卷》，頁116。

⁴⁴ 引自《柘城縣志》卷四人物志。

山鄙事》。李子金與杜知耕同縣，並可能是杜知耕的啓蒙老師，且曾爲其《數學鑰》寫序。

李光地（1642~1718年），字晉卿，號厚庵，諡號文貞，福建安溪人也。康熙庚戌年（1670年）進士，改爲庶吉士，授編修。康熙十九年任內閣學士，康熙二十五年授翰林院掌院學士，康熙二十八年改通政使，同年擢兵部右侍郎，康熙三十三年提督順天府學政，康熙三十六年授工部左侍郎，康熙三十七年授直隸總督，康熙四十二年補吏部尚書，康熙四十四年陞文淵閣大學士。李光地是清聖祖時代的名臣，由於政績突出，深受康熙帝賞識。且其爲當時名學者，主要研究程朱理學，著作很多。曆數的著作有《歷象本要》三卷，收入《李文貞公全書》。⁴⁵李光地透過其弟對梅文鼎的了解與其獲交，梅文鼎曾客居其家，並設館講學。壬午年並呈梅文鼎《歷學疑問》三卷于康熙帝求聖誨。康熙帝指出此書沒有謬誤，惟算法未詳備。其後並要求李光地安排與梅文鼎見面，奠定了梅文鼎在當時中算界的地位。

梅文鼎（1633~1721），字定九，號勿庵，安徽宣城人。是清初一位十分傑出的天文學家和數學家。他在初等數學方面作了集大成的工作，在清初被譽爲「歷算第一名家」。畢生研究天文學和數學覃思著述，成書七十餘種。在他自撰的《勿庵歷算書目》中各有題要。其中數學著作遍及初等數學的各個分門，約有二十餘種。而在梅文鼎的數學著作當中，杜知耕曾參與其《方程論》一書的質正。梅文鼎於〈《方程論》發凡〉中寫到「又得中州孔林宗學博、杜端甫孝廉、錢塘袁惠子文學，共相質正。」此外梅文鼎也曾寄給杜知耕一封書信，索取杜知耕和孔林宗的歷算新作或借抄，書信現錄如下：

辛年一別，遂逾十載，著撰知益多，其有關歷算者，望不吝賜示，或付小兒錄副亦可，行笈中有林宗新撰之書，亦望借抄，即同晤聚一堂矣。此學甚孤，我輩數人，落落於天地間，所期相與共明，舍如旦暮者，固已迂遠而闕於事情。某近年頗多雜稿，往往得之養疴之餘。而所辨多在幾微之際，非從事于此最深，不能相為質難，思我同心，無日去懷。有小札寄林宗，亦可同覽也。

46

當時梅文鼎已接近 70 歲了，由此信除可見其虛心地向他人學習的精神外，更可看出梅文鼎、杜知耕與孔林宗三人學術的交流情形及梅文鼎對杜知耕與孔林宗二

⁴⁵ 參見高宏林，〈康熙帝與李光地、梅文鼎〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系—第七卷》第三編，頁 241。

⁴⁶ 引自梅文鼎，《續學堂文鈔》卷 1〈寄杜端甫孝廉書〉，收入《續修四庫全書》集部 1413 冊。

人學術研究的肯定。

孔林宗，名興泰，字逸房，後改爲林宗，河南杞縣人，生卒年月不詳。爲梅文鼎學派的主要成員。⁴⁷自幼受到家庭良好學風薰陶，聰穎異常，才華出眾。康熙十一年（1671年）參加河南省學政主持的院試，名列通許縣榜首，保送入京師國子監讀書。他勤奮學習，刻苦鑽研，成績優異，通過朝考後授河南輝縣教諭。康熙丁卯年（1687年）與杜知耕同年鄉試中第，獲舉人出身資格。著有《大測精義》一書，今已佚。而其一些數學研究的成果，保存在梅文鼎的著作中。

2.3. 《數學鑰》的成書背景

2.3.1. 《數學鑰》的撰述目的

承上所述，主張「會通中西」的人士努力從古代典籍中尋找某些與西方相似或類似的記載，以證實西學出於中國，中國文化是西方文化之源。然不論是吳敬的《九章算法比例大全》或程大位的《算法統宗》等當時流傳有關《九章算術》的內容，對於古代數學的精華往往「有法而無理」或「不得其理而強爲之解」。李子金便曾說：「世所傳算家諸書，皆備載九章之法而不言其義，故使後之學者多習矣不察之弊。」⁴⁸因此，杜知耕便嘗試以形、理、數三者合一的概念及想法，將當時流傳有關《九章算術》的題目題型與概念，按原九章的體例編排，又吸收歐幾里得《幾何原本》的線、面、體三部份的主要思想和方法，併用詳盡的圖解方式及文字爲這些問題作注釋，以說明立論原理作成此書。

至於此書爲何取名爲《數學鑰》，李子金給予了恰當的解釋，他說：

訓詁而疏通之，圖畫而剖析之，以考驗之形合布算之數。使古人用法之意無微不至，誠前所未見之書也。因名之曰《數學鑰》，意謂學算之士苟得是書而讀之，如鎖之鑰，向之扁錮而不可解者，無不豁然洞開矣。⁴⁹

2.3.2. 《數學鑰》的內容概要

《數學鑰》一書康熙二十年（公元1681年）有杜氏式好堂自刻本印行於世，另有一本舊抄本（李盛鋒舊抄本）。乾隆四十六年（1781年）有四庫全書本。從四庫館員按語中可看出，當時有二種版本，其中一種版本被人竄改，與原書出入

⁴⁷ 參見高宏林，〈梅文鼎學派的主要成員孔林宗〉，收入《中國科技史料》1996，17（4），頁24~28。

⁴⁸ 引自李子金，〈杜端甫《數學鑰》序〉。

⁴⁹ 同上。

頗大。四庫全書本是根據當年初刊本加以校正後確定下來的，然原式好堂本有李之鉉（字子金，以字行）的序已盡數刪去。這種版本在海內外流傳頗廣。⁵⁰另 1961 年有開封榮興齋石印本。⁵¹靖玉樹主編，山東人民出版社於 1994 年出版的《中國歷代算學集成》，亦將四庫全書本影印，收錄其中。本論文以此版本為研究基準。

《數學鑰》全書共六卷，約 73000 餘字。凡例 43 則，題目 264 個，附 5 個分法的問題，共記 312 則。以九數為目分類，分別是方田、粟布、衰分、少廣、商功、均輸、盈朒、方程、勾股九章，茲依其目錄列表如下：

表 2-1 《數學鑰》目錄列表

卷名	主要內容	凡例	目錄	傳統 題目	西洋 傳入	新增 題目	作者心 得附加
第一卷	方田(直線類)	14 則	57 則	51	1	5	
第二卷	方田(曲線類)	6 則	40 則	23	6	11	3
第三卷(上)	粟布	6 則	28 則	27	0	1	
第三卷(下)	衰分		18 則	18	0	0	1
第三卷(附)	附分法		5 則	5	0	0	
第四卷	少廣	7 則	49 則	36	2	11	3
第五卷 (上卷之上)	商功	5 則	8 則	8	0	0	
第五卷 (上卷之下)	均輸		7 則	7	0	0	
第五卷 (下卷之上)	盈朒		8 則	8+3	0	0	
第五卷 (下卷之下)	方程		9 則	9	0	0	
第六卷	勾股	5 則	40 則	37	2	1	
合計		43 則	269 則	229	11	29	

就上表看來，全書有 269 個題目中傳統題目有 229 題，大抵是有關《九章算術》的題目，約占全書題目數的 85%。以當時中算學的流傳性來看，《算法統宗》應是其主要參考的依據。其次就目錄來看，西洋傳入的題目有 11 題，而原屬傳統題目，但利用西洋傳入的知識及概念解題或證明的則有 15 題。就題目中的「解」

⁵⁰ 參見高宏林，〈杜知耕與《數學鑰》〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系—第七卷》，頁 206。

⁵¹ 參見李儼，〈近代中算著述記〉，收入《李儼、錢寶琮科學史全集》第六卷，頁 557。

觀察，其引用大多是《幾何原本》、《測量全義》、《同文算指》、《大測》、《割圓八線表》等書的概念及題型。另有 29 題為作者新增問題。大多是為使整個章節的概念更加完整而設計的題目。

再就各章的題目數觀察，方田章分直線類與曲線類二卷介紹，二卷各有凡例 14 及 6 則，題目 57 及 40 則，合起來約占全書的 37.8%，顯見作者對方田章的重視。此外，若另與勾股章的直角三角形問題、少廣章的立體幾何問題合算，凡例與題目合起來有 218 則，約占全書的 69.9%。因此，可看出杜知耕此書的重點在於平面與空間的幾何問題。顯然與傳統中算著重粟布章、衰分章等比例分配的算術問題有很大的不同。筆者認為杜知耕此種不同於傳統中算的分配方式，顯然是受到《幾何原本》的影響。

2.3.3. 《數學鑰》的編寫方式

正如前述，《數學鑰》六卷的內容編排主要按照九章的體例，且吸收《幾何原本》的線、面、體三部份的主要概念與方法。並用詳盡的圖解方式附以文字說明為這些問題作注釋，以說明公式由來。大體上，每卷先於卷首設凡例，其次是列出本卷所要解題的目錄，最後，再以大量的篇幅對目錄中所列問題一一給出詳細的解答。茲分別簡介如下。

一、凡例

此乃仿照《幾何原本》中的「界說」的體例，每卷開頭先給出凡例數則，主要是介紹本卷中題目所需用到的數學名詞、概念及其他要交代的事項。此外根據表 2-1 可看出，不論每卷包含幾個專題，凡例皆只給出一組（若干個）。至於凡例內容的討論，將於本論文第 3 章、第 4 章介紹。

二、目錄

於每卷的卷首「凡例」之後，便按照「方田^{直線類}」、「方田^{曲線類}」、「粟布」、「衰分」、……、「勾股」等十個專題，分別列出該專題所要介紹、討論的題目。且可看出目錄中的部份題目標題之上、序號之前冠以「西法」、「增」等字加以註記，藉以說明該題之來源。如卷一第 8 題與第 34 題目錄寫法分別為「^{西法}八則象目形求積^二法」與「增三十四則方環以積及濶求邊」。而部份題目標題之下亦另有文字說明，

如卷四第 19 題目錄為「十九則銳面直體求積^{二法}_{後法增}」，可看出此題後另有作者心得附加之法。因此就其目錄介紹，我們大概可依本書所討論之題目來源將題目分成「傳統問題」、「作者新增問題」、「西洋傳入問題」與「作者心得附加問題」四個部份。

我們可從各卷、各專題的目錄看出，杜知耕嘗試透過此四個面向的採題，使得每個專題的問題研究較為系統及全面。如卷二，方田下^{曲線}_類目錄。本部份有 40 個問題，主要討論曲線類平面圖形以周、徑求積及以積反求周、徑的問題的公式及計算方法。在傳統問題之外，作者增加了西方所傳入的問題 6 題。此 6 題分別是橢圓、弧矢形求積的問題，及弧矢形以矢弦求餘徑、以矢徑求弦、以弦及餘徑求矢、截雜線三角形等問題。而在傳統問題及西方傳入問題的基礎上，作者又新增了 11 個問題，分別是圓環以積及內周求外周、以積及外周求內周、以兩周求環濶、以積及濶求兩周、以積及濶求徑及圓截圓等圓環類問題，弧矢形以積矢弦及離徑求背、以弦及全徑求矢、以半徑半弦較及半弦離徑較求矢與弦、增弧矢法以矢弦求積等弧矢形問題，及圓內減不相切之方以餘積求圓徑及方弦的問題。除此之外於第 19 題弧矢形以矢弦求餘徑後並另附全徑、離徑與半徑之求法，而於 35 與 36 題方內減圓、圓內減方以餘積求方積二題之後亦附有求方邊、圓徑的方法。

三、問題及解答

《數學鑰》中問題解答的格式是先給出問題，接下來是「法」，再接下來是「解」。此處的「法」即現代數學解答問題的公式、算式或定理，並據以算出該題之答案。而「解」則相當於對該題所用的方法、公式、算式或定理進行理論證明或說明，另有部份題目並於「解」中對該題目或其概念加以延伸。此種書寫體例相當於《幾何原本》中的「論」。詳細內容的介紹與討論，將於本論文第 3 章、第 4 章進行。