



第一章 緒論

第一節 研究動機與目的

壹、研究動機

數學為科學之鑰，是學習者學習科學的重要工具；教育部於九年一貫數學領域之基本理念中指出數學是人類最重要的資產之一，其被公認為科學、技術及思想發展的基石，文明演進的指標與推手（教育部，民 92），是以數學教育一直以來都是國民教育的核心課程。

在國內外的數學教育中，數學解題都是一個重要的課題。美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics，以下簡稱 NCTM）在 1980 年就曾提出「解題是數學教育的中心」的觀點，且於 1989 年在其出版的中小學數學課程及評量標準中第一項亦指出「數學即解題」（Mathematics as problem solving），認為數學教育應該培養學生數學解題能力，使其有能力應用所學的數學知識和計算能力去解決身邊所遇到的問題，成為數學解題者；其在之後所公佈的數學教學專業、評量標準和數學課程的原則與標準中，也都把「解題」列為重點之一（NCTM,1980,1989,2000）。同樣的，國內近年來數學教育改革也以數學解題為方向，九年一貫數學領域的課程目標就特別

強調應發展學生解決應用問題的能力（教育部，民 92），由上可知，培養學生問題解決的能力是數學教育的重要目標，而目前培養學生問題解決的能力通常以應用問題(word problem)的形式呈現。因之，此為研究者以應用題解題教學為本研究主題之動機所在。

自1970年代認知學派理論興起後，數學解題歷程之認知分析受到更廣泛的討論。繼Polya(1945)之後，許多學者提出各種解題歷程模式(i.e., Kilpatrick, 1985; Kintsch & Greeno, 1985; Mayer, 1985, 1992; Schoenfeld, 1985)，一般學者認同解題可以區分為問題表徵(problem representation)與問題解決(problem solving)兩個階段。問題表徵為將應用題文字或圖案轉換成心理表徵，其又再細分為問題轉譯(problem translation)與問題整合(problem integration)兩個次階段；問題解決則為選擇解題程序並執行計算以得到答案的階段，其包括解題計畫及監控(solution planning and monitoring)和解題執行(solution execution)兩個次階段(Mayer, 1992)。依照上述的解題歷程模式，學生在進行應用題解題活動時，必須了解題目中每一句話的意義，也需要能夠統整題目各句話中所提供的訊息，形成完整的問題表徵，然後再依表徵形式形成解決問題的計畫，最後執行解題計畫中的計算而得到答案。

Mayer(1987)的研究指出，學生數學解題的主要困難是發生在問題表徵階段，其提出可透過「表徵策略」的教學訓練來培養學生問題表徵的能力，藉以增進解題表現。其中，「表徵」是指心智過程模式化所使用的符號系統，如實物情境(real-world situations)、具體操作物(manipulative models)、圖形(pictures or diagrams)、口語符號(spoken language)、文字符號(written symbols)，也就是將學生內心的概念轉為可見且具體顯著的外在表現(Lesh, Post, & Behr, 1987)。美國數學教師協會(1989)提出表徵是溝通和呈現思考過

程的重要工具的觀點，並在新的課程綱要中更進一步把表徵從溝通的範疇之中獨立出來探討(NCTM,2000)；國內九年一貫課程數學學習領域的基本理念也指出應培養學生的數學溝通能力，數學溝通一方面要能了解別人以書寫、圖形，或口語中所傳遞的數學資訊，另一方面，也要能以書寫、圖形，或口語的形式，運用精確的數學語言表達自己的意思（教育部，民 92），亦即能透過表徵來溝通。由上，可突顯出表徵這個主題在數學教育的重要。目前，國內外均有許多運用表徵策略教學來提升學生數學解題表現的研究（e.g., 林淑玲，民 87；林香，民 91；徐文鈺，民 81；張熙明，民 92；陳雯貞，民 93；楊淑芬，民 89; Cobb, Yackel & Wood, 1992; Goldin & Shteingold, 2001; Lesh et al.,1987）結果指出，適當的運用表徵教學策略對學生在數學解題方面表現是有幫助的。

除了發展學生的表徵策略之外，提供問題基模訓練對解題表現也有正面影響（Mayer,1987），「問題基模」係指個體用以認識應用問題之問題類型的基本模式。Riley, Greeno 和 Heller(1983)依照問題的語意關係結構，指出加減應用題可分為「改變」、「合併」與「比較」等類型，其並發現不同年齡學童在不同問題類型的應用題之表現有差異，其主要原因是因為年齡較小的學童缺乏適當的基模，而非因為他缺乏計算技能。承上可知，使學生具備問題基模對學生的解題表現也有影響，因之，如何透過教適當的教學方式來協助學生發展問題基模，以增進學生的數學解題表現，是數學教育工作者應該重視的問題。

目前，國外有些研究同時強調有利於學生解題的「圖示表徵策略」與「問題基模」兩項因素(e.g.,Fuson& Willis,1989; Jitendra & Hoff,1996; Jitendra, Griffin, & McGoey,1998; Jitendra, DiPipi, & Perron-Jones, 2002; Jitendra,2002；

Willis & Fuson, 1988; Xin, Jitendra, & Deatline-Buchman, 2005), 其為一種「以基模為基礎」(Schema-Based)的「基模圖示表徵」教學, 研究結果顯示結合基模知識的「基模圖示表徵」能夠協助學生更容易轉譯、整合應用題的訊息, 進而促進解題表現。在國內的部分, 研究者回顧國內的解題教學研究, 發現大多數是聚焦在解題表徵策略的教學上, 同時重視「學生問題基模知識發展」並結合「圖示表徵策略教學」之研究較少見。然而, 發展學生的問題基模亦是數學教育不可忽視的重點, 因此, 進一步探討如何將「發展問題基模」與「圖示表徵」策略融合於解題教學中, 進而使學生從中獲得更佳的概念理解及解題表現, 為本研究的動機之一。

關於圖示表徵方面的研究除了探討其對解題表現的影響之外, 也關心學生是否能自行產生圖示表徵。在 Dufour-Janvier, Bednarz 和 Belanger(1987)的研究指出, 若要兒童從文字或符號轉換到圖形、圖示等外在表徵並不容易; 謝毅興(民 80)之研究也指出要求二、三年級學童對應用題進行圖示表徵時, 可能會因增加認知負荷而對增進解題表現沒有成效。根據上述可知表徵在數學教育上有其重要性, 且多數學者肯定教師運用圖示表徵策略教學對數學解題表現具有正面影響, 然而, 若要進一步要求學生自行產生圖示表徵則並不容易。雖然如此, 但就布魯納認知理論的觀點來說, 任何學科的主要觀念都可利用某種心智上真實方式, 有效的教給任何發展階段的任何兒童(陳李綢, 民 74)。因此, 如何設計一套能協助兒童發展問題基模知識; 並據以將應用題文字轉譯到外在圖示表徵之解題教學課程, 以及探討學生能否藉由教學而具有自行產生圖形表徵的能力都是本研究關心的重點。

基於上述, 本研究以數學簡單加減應用題為研究材料, 設計一套結合應用題問題類型之基模知識與圖示表徵策略之解題教學課程, 在課程中先發展

學生應用題的問題基模，然後對每種類型的應用題予以結合適當的「基模圖示表徵」進行解題教學，並於教學後探討問題基模與基模圖示表徵解題教學課程對學童解題表現的影響、了解學童問題基模認知結構的形成情形、以及分析學童自行產生問題基模圖示表徵的狀況。

貳、研究目的

根據上述研究動機，本研究的主要目的如下：

- 一、設計一套適用於國小三年級學童之「問題基模與基模圖示表徵解題課程」。
- 二、探討「問題基模與基模圖示表徵解題課程」對國小三年級學童加減應用題解題表現的立即效果。
- 三、探討「問題基模與基模圖示表徵解題課程」對國小三年級學童加減應用題解題表現的追蹤效果。
- 四、分析在經過「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學後，國小三年級學童在加減應用題之問題基模形成的情形。
- 五、分析在經過「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學後，國小三年級學童在加減應用題之圖示表徵的情形。
- 六、分析在經過「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學後，國小三年級學童對「問題基模圖示表徵」的意見看法。
- 七、提出具體建議，以作為進一步研究之參考。

第二節 研究問題與假設

壹、研究問題

根據上述之研究目的，本研究欲探討的問題如下：

- 一、如何設計一套融合基模、表徵、數學解題等心理學重要理論，且適用於國小三年級學童之「問題基模與基模圖示表徵解題課程」方案？
- 二、經過「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學後，對於國小三年級學童在加減應用題的解題表現是否具有立即提升效果？
- 三、經過「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學後，對於國小三年級學童在加減應用題的解題表現是否具有追蹤提升效果？
- 四、經過「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學後，國小三年級學童形成加減應用題問題基模的情形為何？
- 五、經過「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學後，國小三年級學童在加減應用題之基模圖示表徵的情形為何？
- 六、經過「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學後，國小三年級學童對「基模圖示表徵」的意見看法為何？

貳、研究假設

根據上述之研究目的與研究問題，本研究提出下列研究假設：

一、經過「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學後，對於國小三年級學童在加減應用題的解題表現具有立即提升效果。

1-1 在排除前測得分影響後，接受「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學的實驗組學童，在改變題型加減應用題成就測驗的後測得分高於控制組學童。

1-2 在排除前測得分影響後，接受「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學的實驗組學童，在比較題型加減應用題成就測驗的後測得分高於控制組學童。

1-3 在排除前測總分影響後，接受「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學的實驗組學童，在全部題型加減應用題成就測驗的後測總分高於控制組學童。

二、經過「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學後，對於國小三年級學童在加減應用題的解題表現具有追蹤提升效果。

2-1 在排除前測得分影響後，接受「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學的實驗組學童，在改變題型加減應用題成就測驗的追蹤後測得分高於控制組學童。

2-2 在排除前測得分影響後，接受「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學的實驗組學童，在比較題型加減應用題成就測驗的追蹤後測得分高於控制組學童。

2-3 在排除前測總分影響後，接受「問題基模與基模圖示表徵解題課程」教學的實驗組學童，在全部題型整數加減應用題成就測驗的追蹤後測總分高於控制組學童。

第三節 名詞釋義

茲將本研究中所涉及的重要名詞，分別說明如下：

壹、問題基模

基模為Piaget認知理論中的基本概念，係指個體用以認識周圍世界的基本模式（張春興，民78），而「問題基模」即為個體用以認識應用問題問題類型的基本模式，Riley等人（1983）將加減應用題依語意關係結構分為「改變」、「合併」與「比較」等問題類型。在本研究中以「改變」及「比較」兩類型之加減應用題為研究材料；在教學時，為配合應用題之基模圖示表徵教學設計又再將「改變」類型細分為「變多」、「變少」兩種，因之，本研究所指之問題基模有三個，分別為「改變-變多」、「改變-變少」以及「比較」這三種。

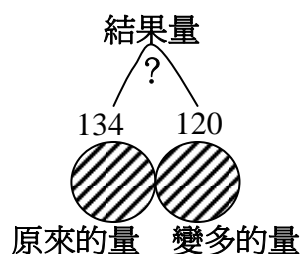
貳、基模圖示表徵

表徵係指將外在現實的事物以另一種較為抽象或符號化的形式來代表的歷程；在認知心理學上是指訊息處理過程中，將訊息編碼並轉譯成另外型式，以便儲存、表達的歷程（張春興，民78），數學表徵包含五種符號系統：實物情境、具體操作物、圖形、口語符號、文字符號(Lesh et al., 1987)。基模圖示表徵為結合圖形與文字符號的數學表徵，係依據加減應用題問題類型之問題

基模知識將問題文字意思轉譯為相對應之「圖示表徵」的歷程與結果；基模圖示表徵與一般圖示表徵的差異在於它是一種結合基模知識與表徵策略的圖示方法，因而更能夠幫助解題者組織問題訊息、促進問題轉譯與問題解決 (Jitendra,2002)。在本研究中，研究者參考文獻後自行設計「改變-變多」、「改變-變少」以及「比較」三種問題基模圖示表徵，茲舉例說明如下：

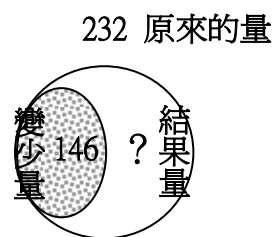
一、「改變-變多」類型問題(結果量未知)之基模圖示表徵

例題：姊姊原來有134元，媽媽再給她120元，請問姊姊現在有幾元？



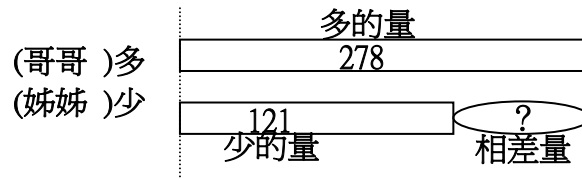
二、「改變-變少」類型問題(結果量未知)之基模圖示表徵

例題：哥哥原來有232張遊戲卡，他賣掉了146張後還剩下幾張？



三、「比較」類型問題（相差量未知）之基模圖示表徵

例題：哥哥有 278 元，姊姊有 121 元，哥哥的錢比姊姊多幾元？



參、問題基模與基模圖示表徵解題課程

本研究之問題基模圖示表徵解題課程係由研究者以相關理論研究為依據所自行設計之課程。課程設計依據的理論包括以Riley等人對加減應用題問題類型分類之問題基模知識、國內外表徵以及問題基模圖示表徵解題研究以及研究者實務教學經驗、Mayer數學解題歷程模式等，研究者據此設計本研究之問題基模與基模圖示表徵解題課程，課程包含「加減應用題問題基模形成與辨識」、「基模圖示表徵方法」、「基模圖示表徵解題」、「解題策略選擇」等主題內涵，其特色在於先發展學生加減應用題的問題基模，而後再進行基模圖示表徵解題教學，並強調解題策略的選擇。課程共進行四週，每週四節課，共十六節課，總教學時數六百四十分鐘。

肆、加減應用題解題表現

本研究中之加減應用題解題表現，係指研究對象在研究者自編的「改變題型加減應用題成就測驗」、「比較題型加減應用題成就測驗」、「全部題型加減應用題成就測驗」上之答題表現，研究對象在測驗上的得分愈高代表解題表現愈好。