第三章 《測圓海鏡分類釋術》的內容分析

本章是本論文的重點所在，主要是在分析《測圓海鏡分類釋術》的內容，第一節說明該書的體例結構，第二節介紹該書的內容，第三節至第五節依序分析該書中的開平方法、開立方法及開三乘方法，最後說明顧應祥的開方論。

第一節 《測圓海鏡分類釋術》的體例結構

《測圓海鏡分類釋術》書中自序：

> 余自幼好習數學，晚得荊川唐太史所錄《測圓海鏡》一書，乃元翰林學士欒城李公冶所著，雖專主於勾股求容圓容方一術，然其中間如平方、立方、三乘方、帶從減從、益廉減廉、正隅負隅諸法，凡所謂以積求形者，皆盡之矣。但其每條下細草，俱徑立天元一，反覆合之而無下手之術，使後學之士，茫然無門路可入。輒不自揆，每章去其細草，立一筭術，又以其所立通勾邊股之屬，各以類分之，語義稍繁者，略加芟損，名曰《測圓海鏡分類釋術》[1]，匪敢僭改前賢著述，惟以便下學云爾。」[2]

這說明是顧應祥寫下《測圓海鏡分類釋術》的目的，也說明顧應祥無法理解天元術，故而刪除有關天元術的內容。

書名中的『分類』的源由爲「以其所立通勾邊股之屬，各以類分之」，[3]即是由題目中已知條件所屬的勾股性質類別而分。『釋』用以解釋題目中所給條件爲十五種勾股形的哪一邊。而『術』即爲解決題目的技術及方法。由自序：

> 然數之為術，雖千變萬化之不同，而其要不過一開闔而已，開者除也，闔者乘也，而又有以形求積、以積求形之，異古之為數者，有九九者，其用也，是故用之以貿易則為粟米；用之以分別差等較量遠近則為差分、為均輸；因其末而欲知其本則為盈朒；彼此互見則為方程；若夫以形求積則方田、商功之類是也；以積求形則少廣、勾股之類是也；以形求積者，先得其形而後求

[1] 筆者本文所根據的《測圓海鏡分類釋術》版本，收錄於《中國歷代算學集成》靖玉樹編勘，濟南：山東人民出版社，1994 年。
[2] 顧應祥，〈測圓海鏡分類釋術序〉，《測圓海鏡分類釋術序》。
[3] 同註解 2。

其積，故其為術也易；以積求形，則先得其積而後求其長短、廣狹、斜正之形，有非乘除所能盡者，故必以商除之，然而商除亦不能盡也，而又立正負廉隅之法，以增損附益之，故其為術也難。」[4]

可見顧應祥認爲術雖有千變萬化但其重點不過是乘除而已，用於不同的題目有不同的名稱，而其中以形求積者易，以積求形者難，且有乘除所不能解決者，則需要立正負廉隅之法，故書中利用許多的開方法，筆者將在本章第三節至第五節詳細介紹書中的開方法。

茲舉書中第一卷第一問，來說名其體例：

通勾股求容圓一

甲乙二人俱在城外西北隅乾地，乙東行三百二十步，甲南行六百步，望乙與城相參直，問城徑。

答曰：城徑二百四十步

釋曰：此勾股求容圓也，東行為通勾，南行為通股，以通勾股求通弦和較，弦和較即容圓徑也。

術曰：勾股相乘倍之為實，勾股求弦併勾股為弦和，和為法除之。

勾股求弦曰：勾自之得一十0萬二千四百為勾畀，股自之得三十六萬為股畀，併二畀得四十六萬二千四百為弦畀，平方開之得弦六百八十，併勾股得一千六百為弦和和，後凡言勾股求弦者，俱倣此。

其中「通勾股求容圓一」爲分類，說明此類題目爲通勾股形求容圓；「答曰」爲題目答案，亦是全書中唯一的「答」，因全書每一題的答均相同；「釋曰」解釋題目中甲乙行分別爲十五種勾股形中的哪一邊；「術曰」說明如何解題及使用的解題方法說明。

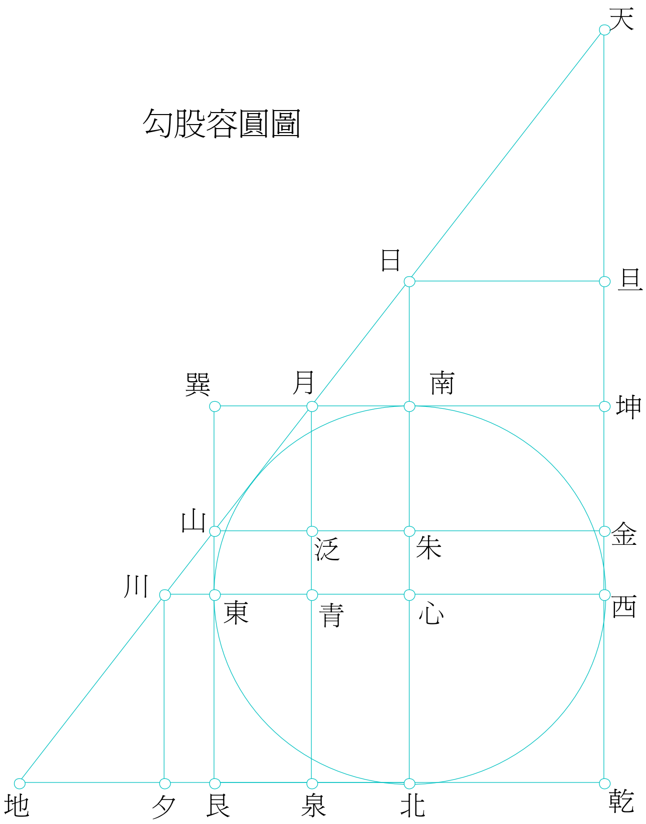
第二節　《測圓海鏡分類釋術》的內容介紹

本書包含「嘉靖二十九年沐朝弼序」、「自序」、[5]「勾股容圓圖」、「測圓海鏡

[4] 同註解 2

[5] 郭書春主編的《中國科學技術典籍通彙，數學》卷二的《測圓海鏡分類釋術》中，缺少自序以

總率名號」、「勾股步率」及卷一至卷十共一百七十二題[6]。其中「勾股容圓圖」如下圖：



勾股容圓圖

「測圓海鏡總率名號」介紹十五種勾股形：

> 天地乾為通勾股形，天川西為邊勾股形，天山金為黃廣勾股形[7]，天月坤為大差勾股形，天日旦為上高勾股形，日地北為底勾股形，日川心為皇極勾股形，日山朱為下高勾股形，日月南為明勾股形，[8]月地泉為黃長勾股形，[9]月川青為上平勾股形，月山泛為太虛勾股形，山地艮為小差勾股形，山川東為叀勾股形，[10]川地夕為下平勾股形。

依序編號整理如下表：

及〈圓城圖式〉部分，茲根據國家圖書館藏「影抄明嘉靖庚戌（廿九年）沐朝弼序」善本書補入。

6 《中國歷代算學集成》的《測圓海鏡分類釋術》中，缺少自序以及〈圓城圖式〉〈總率名號〉〈勾股步率〉部分，茲根據郭書春主編的《中國科學技術典籍通彙，數學》卷二的《測圓海鏡分類釋術》及國家圖書館藏「影抄明嘉靖庚戌（廿九年）沐朝弼序」善本書補入。

7 黃指的是內切圓的直徑，因爲古時候把勾股形中的內切圓的外切正方形畫成黃色，因此稱該正方形的邊長（也是圓的直徑）爲黃。廣指的是勾股形的勾，黃廣弦就是指以內切圓直徑爲勾的直角三角形的弦。

8 日月合起來爲明，明勾股形指的是以日月爲弦的勾股形。

9 長指的是勾股形的股，黃長勾股形就是指以內切圓直徑爲股的直角三角形。

10 「叀」音同「專」，意義是「小」，叀勾股形是這些勾股形之中最小的一個。

編號	名稱	勾	股	弦
1	天地乾爲通勾股形	$a_1=320$	$b_1=600$	$c_1=680$
2	天川西爲邊勾股形	$a_2=256$	$b_2=480$	$c_2=544$
3	天山金爲黃廣勾股形	$a_3=240$	$b_3=450$	$c_3=510$
4	天月坤爲大差勾股形	$a_4=192$	$b_4=360$	$c_4=408$
5	天日旦爲上高勾股形	$a_5=120$	$b_5=225$	$c_5=255$
6	日地北爲底勾股形	$a_6=200$	$b_6=375$	$c_6=425$
7	日川心爲皇極勾股形	$a_7=136$	$b_7=255$	$c_7=289$
8	日山朱爲下高勾股形	$a_8=120$	$b_8=225$	$c_8=255$
9	日月南爲明勾股形	$a_9=72$	$b_9=135$	$c_9=153$
10	月地泉爲黃長勾股形	$a_{10}=128$	$b_{10}=240$	$c_{10}=272$
11	月川青爲上平勾股形	$a_{11}=64$	$b_{11}=120$	$c_{11}=136$
12	月山泛爲太虛勾股形	$a_{12}=48$	$b_{12}=90$	$c_{12}=102$
13	山地艮爲小差勾股形	$a_{13}=80$	$b_{13}=150$	$c_{13}=170$
14	山川東爲叀勾股形	$a_{14}=16$	$b_{14}=30$	$c_{14}=34$
15	川地夕爲下平勾股形	$a_{15}=64$	$b_{15}=120$	$c_{15}=136$

其中的上高勾股形和下高勾股形、上平勾股形與下平勾股形，是全等的直角三角形；「勾股步率」將十五種勾股形的弦(c)、勾(a)、股(b)、勾股和(a+b)、勾股較(b-a)、勾弦和(a+c)、勾弦較(c-a)、股弦和(b+c)、股弦較(c-b)、弦較和(c+(b-a))、弦較較(c-(b-a))、弦和和(c+a+b)及弦和較(a+b-c)十三個數量一一列出；卷一至卷十之內容分析如下：

第一卷是同一勾股形中作測望，包含十五個題目且列出十種勾股形求容圓的公式：

通勾股求容圓一(共三題)：$\dfrac{2a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}$

邊勾股求容圓二(共三題)：$\dfrac{2a_2b_2}{b_2+c_2}$

底勾股求容圓三(共二題)：$\dfrac{2a_6b_6}{a_6+c_6}$

皇極勾股求容圓四(一題)：$\dfrac{a_7b_7}{c_7}$

通勾股折中弦上求圓五(一題)：$\dfrac{ab}{a+b}$

大差勾股求容圓六(一題)：$\dfrac{2a_4b_4}{b_4-a_4+c_4}$

小差勾股求容圓七(一題)：$\dfrac{2a_{13}b_{13}}{c_{13}-(b_{13}-a_{13})}$

太虛勾股求容圓八(一題) ：$\dfrac{2a_{12}b_{12}}{(a_{12}+b_{12})-c_{12}}$

明勾股求容圓九(一題) ：$\dfrac{2a_9b_9}{c_9-a_9}$

叀勾股求容圓十(一題) ：$\dfrac{2a_{14}b_{14}}{c_{14}-b_{14}}$

最後提及「或問黃廣勾股，黃長勾股無求圓之法，何也？曰黃廣之勾、黃長之股即圓徑也，故不立法。曰上下高勾股，上下平勾股何以不立法？曰上高去城遠，下高與上平，俱不當城半，下平亦不附城，故不立法。」說明有六種勾股形未立下公式之原因，在本卷中亦提及「帶從開方法」與「負隅開平方法」兩種開平方法。

第二卷是已知兩勾、兩股或兩弦作測望，包含十七個題目，分爲兩勾求容圓一(共七題)、兩股求容圓二(共七題)、兩弦求容圓三(共三題)，本卷中對開方法首次提及「負隅減從開平方法」、「減從開平方法」、「減從翻法開平方法」、「以從減法開平方法」(又爲「添積帶從開平方法」)四種開平方法。

第三卷是已知一勾與其他勾股形之一股作測望，包含二十二個題目，分別爲通勾與別股測望一(共三題)、底勾與別股測望二(共八題)、大差勾與別股測望三(共二題)、小差勾與別股測望四(共三題)、明勾與別股測望五(共三題)、叀勾與別股測望四(共三題)，卷中首次提及「帶從負隅開立方法」、「減從負隅翻法開平方法」、「帶從方廉開三乘方法」、「帶從廉開立方法」、「帶從二廉減從翻法開三乘方法」、

「帶從減益廉翻法開立方法」、「帶從減廉開立方法」、「以從減法翻法開平方法」、「帶從益廉添積開三乘方法」(又為「帶從方廉減隅翻法開三乘方法」)、「從廉減從方負隅開三乘方法」共兩種開平方法、四種開立方法及四種開三乘方法。

第四卷是已知一勾與其他勾股形之一弦作測望，包含十九個題目，分別為通勾與別弦立法測望一(共九題)、底勾與別弦測望二(共七題)、大差勾與別弦測望三(一題)、明勾與別弦測望四(共二題)，卷中首次出現「帶從以廉減從開立方法」、「帶從廉負隅以廉隅添積開三乘方法」(又為「帶從負隅以廉隅減從開三乘方法」)、「帶從負隅以廉添積開立方法」(又為「帶從廉半翻法減從負隅開立方法」)、「帶從負隅以二廉減從方開三乘方法」(「帶上廉負隅以下廉減從開三乘方法」)、「帶從以廉減從負隅開立方法」(又為「帶從負隅以廉添積開立方法」)、「帶從負隅開平方法」、「帶從方廉開立方法」、「帶從方上廉以下廉減從開三乘方法」及「負隅以從減法開平方法」共兩種開平方法、四種開立方法及三種開三乘方法。

第五卷是已知一股與其他勾股形之一弦作測望，包含十九個題目，分別為通股與別弦測望一(共九題)、邊股與別弦測望二(共七題)、小差股與別弦測望三(一題)、叀股與別弦測望四(共二題)，卷中首次提及「帶從廉減從方翻法開立方法」(又為「以從廉添積開立方法」)、「帶從廉負隅以隅減從開立方法」(又為「帶從方廉負隅以隅添積開立方法」)、「帶一廉負隅減從以二廉益從開三乘方法」及「帶從益廉以二廉減從開三乘方法」(又為「帶從方廉以二廉添積開三乘方法」)共兩種開立方法及兩種開三乘方法。

第六卷是已知一勾或一股或一弦與和或較作測望，包括二十一個題目，分別為勾與和測望一(共五題)、勾與較測望二(一題)、股與和測望三(共四題)、股與較測望四(一題)、弦與和測望五(共七題)、弦與較測望六(共三題)，卷中首次出現「帶從方負隅單位開三乘方法」、「帶從方廉負隅以二廉減從翻法開三乘方法」(又為「帶從方負隅以二廉添積開三乘方法」)及「以從添積開平方法」(又為以從減法開平方法)共一種開平方法及兩種開三乘方法。

第七卷是以通勾股形的和為基準，搭配其他的勾股弦或和較作測望，共二十

個題目，包括通勾股和與別勾股弦測望一(共四題)、通勾股和與諸和較立法測望二(共四題)、通勾弦和與諸和較測望三(共三題)、通股弦和與諸和較測望四(共二題)、通弦和和與諸和較測望五(共五題)、通弦和和與別弦測望六(共二題)，卷中提及「負隅帶益廉減從開立方法」(又爲「帶從負隅添積開立方法」)一種開立方法。

第八卷是以各邊的和與較來作測望，包括十七個題目，分別爲諸和立法測望一(共七題)、諸和與較參互立法測望二(一題)、諸和與較參互立法三(共九題)，卷中提到「帶從方廉隅筭以二廉減從開三乘方法」(又爲「帶從方廉隅以二廉添積開三乘方法」)及「帶從減從廉開立方法」一種開立方法及一種開三乘方法。

第九卷是討論已知各較求容圓徑，包含八個題目，爲諸較參互立法(共八題)，卷中提及「帶從廉隅添積開三乘方法」(「帶從方一廉添積以二廉爲法開三乘方法」)一種開三乘方法。

第十卷牽涉邊長的比例問題，一共十四題，爲和較參互帶分測望(共十四題)。

分析這十卷的編排順序，首先顧應祥保留十種容圓公式，再來按照兩勾、兩股、兩弦的性質，之後是以勾股、勾弦、股弦作計算，再加入勾股和較形式，最後兩卷是綜合題型的複雜題目。題目由易至難，題型由簡至繁，如此從教學或推廣的目的來看，是比較適合的，符合顧應祥寫書的目的「惟以便下學云爾」。

這十卷總共有一百七十二題，而題目的來源，除了從《測圓海鏡》給予重新分類解釋之外，還有幾題是顧應祥所增補加入的：

1、甲出西門南行，不知步數而立，乙穿城東行二百五十六步見之，乃斜行五百四十四步相會，問城徑？

此題是列在第一卷第六題「邊勾股求容圓二」之中，只是利用到已知勾 a_2、弦 c_2 解出股 b_2 的長度，再求容圓徑，$\dfrac{2a_2b_2}{(b_2+c_2)}$。

2、甲、乙俱在城外西北乾隅，甲南行不知步數而立，乙東行三百二十步見之，甲又斜行與乙相會，計甲直行斜行共一千二百八十步，問城徑？

此題是列在第六卷第一題「勾與和測望一」之中，是利用到已知勾與股弦和，解出股與弦的長度，$\frac{a_1^2}{b_1+c_1}=c_1-b_1$，再求容圓徑。

3、乙出東門南行，丙出南門東行，各不知步數而立，只云：丙行多於乙步，甲從乾隅東行三百二十步，望乙丙與城相參直，計乙丙共行一百零二步，問城徑？

此題是列在第六卷第三題「勾與和測望一」之中。顧應祥所用到的方式，是列出相當於下式的三次方程式$\frac{1}{2}x^3-a_1x^2+(a_{14}+b_{15})\times a_1x=2(a_{14}+b_{15})\times a_1$，使用帶從負隅以廉減從開立方法來求解。

4、甲、乙俱在城外西北乾隅，甲南行不知步數而立，乙東行三百二十步見之，甲又斜行與乙相會，乙直行不及斜行八十步。

此題是列在第六卷第六題「勾與較測望二」之中，是利用到已知勾與股弦較，解出股與弦的長度，$\frac{a_1^2}{c_1-b_1}=c_1+b_1$，再求容圓徑。

5、甲、乙二人俱在城外西北乾隅，甲南行六百而立，乙東行不知步數見之，又斜行與甲相會，計乙直斜共行一千步，問城徑？

此題是列在第六卷第七題「股與和測望三」之中，是利用到已知股與勾弦和，解出勾與弦的長度，$\frac{b_1^2}{a_1+c_1}=c_1-a_1$，再求容圓徑。

6、甲、乙二人俱在城外西北乾隅，甲南行六百步而立，乙東行不知步數見之，又斜行與甲相會，計乙直行不及斜三百六十步，問城徑？

此題是列在第六卷第十一題「股與較測望四」之中，是利用到已知股與勾弦較，解出勾與弦的長度，$\frac{b_1^2}{c_1-a_1}=c_1+a_1$，再求容圓徑。

7、甲、乙俱在城外西北乾隅，乙向南行不知步數而立，甲向東行亦不知步數見之，遂斜行與六百八十步與乙會，計甲之東與乙之南共九百二十步，問城徑？

此題是列在第六卷第十二題「弦與和測望五」之中，是利用到已知弦與勾股和，解出勾與股的長度，$\sqrt{2c_1^{\ 2}-(a_1+b_1)^2}=b_1-a_1$，再求容圓徑。

由此可知，顧應祥所增加的題目，多是勾股運算的基本題型，目的是在於讓讀者能夠先熟悉這些基本的運算。

另外，第七卷第十九題：

> 甲丙二人俱在城外西北乾隅，甲東行、丙南行，乙、丁二人俱在城中心，乙穿城往東門外，丁穿城往南門外直行，各不知步數而立，四人遙相望俱與城相參直，既而丙向東北斜行與甲會，甲東行與丙一直一斜共一千六百步，丁亦從南門外立處斜行二百八十九步與乙相會，問城徑。

及第十卷第十四題：

> 甲出南門直行不知步數而立，乙出東門直行見之，甲云我行不及股圓差二十四分之一十五，乙云我行不及勾圓差五分之四，又云甲直行多於乙直行一百一十九步，二差相較二百八十步，問城徑。

這兩題未給出解法是顧應祥的一個疏忽，更是留下一個敗筆之處。

第三節《測圓海鏡分類釋術》的開平方法

在此書十卷中提及了開平方法十一種、開立方法十二種及開三乘方法十三種，共計有三十六種開方法，此為顧應祥在本書中的最大貢獻。在數學衰退的十五、十六世紀的明朝，他保存了各式各樣的開方法細草，雖然無法與宋元「增乘開方法」的簡潔相提並論，但在明朝的算書中，均未提及「增乘開方法」如何操作。在顧應祥這個時期，「增乘開方法」可能已經失傳。

顧應祥為何在書中論及傳統的開方法，乃因為李冶在《測圓海鏡》雖有列出方程式的詳細方法，但卻未交代何謂天元一、如何立天元一、及如何詳細解方程式，而造成顧應祥的「其每條下細草，俱徑立天元一，反覆合之而無下手之術。」不過，也有可能他無法理解「立天元一」，所以顧應祥將每題中的方程式，用傳統開方法加以詳細分析解題，「以便下學云爾」。在本章的第三節至第五節中將詳

細介紹書中的各種開方法，以現代的代數符號將書中的解法依步驟列出，再以書中題目加以驗算。

書中提及的開平方法依出現順序有帶從開方法、負隅開平方法、負隅減從開平方法、減從開平方法、減從翻法開平方法、以從減法開平方法(又爲添積帶從開平方法)、帶從負隅開平方法、減從負隅翻法開平方法、以從減法翻法開平方法、負隅以從減法開平方法、以從添積開平方法(又爲以從減法開平方法)共十一種；茲將解法分別列表如下，以方便說明：

(一)帶從開平方法($x^2+bx=s$)：一次項係數稱爲「從」，「帶從」則代表有一次項且係數爲正，其解法步驟如下表：

	商	實	從	下法	廉法	說明
A		s	b			列實於左 約初商
B	x_1	s	b	$b+x_1$		初商 x_1 置一於左上為法 置一為隅法帶從方為下法
C	x_1	$s-(b+x_1)x_1$	b	$b+x_1$		上法乘下法除實
D	x_1	$s-(b+x_1)x_1$	b		$2x_1$	倍隅法為廉法
E	x_1+x_2	$s-(b+x_1)x_1$	b	$b+2x_1+x_2$	$2x_1$	次商 x_2 置一於左次為上法 置一為隅法併從方廉法為下法
F	x_1+x_2	$s-(b+x_1)x_1-(b+2x_1+x_2)x_2$	b	$b+2x_1+x_2$		下法與上次法相乘除實盡

過程中，「隅法」爲將以商爲底，以最高次減 1 爲次方，所求之數再乘以最高次之係數；「廉法」爲隅法乘以 2(即$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 中的 2)。此法最先出現在第一卷第二題，以解該題 $x^2+720x=230400$ 爲例：

	商	實	從(從方)	下法	廉法	說明
A		230400	720			
B	200	230400	720	920		初商 200　720+200=920
C	200	46400	720	920		230400-920×200=46400
D	200	46400	720		400	2×200=400
E	240	46400	720	1160	400	次商 40 720+400+40=1160
F	240	0	720	1160		46400-1160×40=0

(二)負隅開平方法($ax^2=s$)：「隅」爲最高次項係數，「負隅」並非代表最高次係數爲負數，而是表示最高次係數絕對值不是一，解題過程如下：

	商	實	隅	下法	廉法	說明
A		s	a			布實於左 約初商
B	x_1	s	a	ax_1		初商 x_1 置一於左上為法 置一

						乘隅(法)為隅法
C	x_1	$s-ax_1^2$	a	ax_1		上法乘隅法除實
D	x_1	$s-ax_1^2$	a		$2ax_1$	倍隅法為廉法
E	X_1+x_2	$s-ax_1^2$	a	$a+2ax_1+ax_2$	$2ax_1$	次商 X_2 置一於左次為上法 置一乘隅算併廉法為下法
F	X_1+x_2	$s-ax_1^2-(a+2ax_1+ax_2)x_2$	a	$a+2ax_1+ax_2$		下法與上次法相乘除實盡

此法第一次出現在第一卷第八題，以解 $1250x^2=18000000$ 爲例：

	商	實	隅(筭)	下(隅)法	廉法	說明
A		18000000	1250			
B	100	18000000	1250	125000		初商 100 1250*100=125000
C	100	5500000	1250	125000		18000000-1250*100=5500000
D	100	5500000	1250		250000	2*125000=250000
E	120	5500000	1250	275000	250000	次商 20 250000+1250*20=275000
F	120	0	1250	275000		5500000-275000*20=0

(三) 負隅減從開平方法($-ax^2+bx=s$)：「負隅減從」以隅減從的意思，所以最高次係數爲負數，解法如下：

	商	實	隅	從	下法	廉法	說明
A		s	a	b			布實于左 約初商
B	x_1	s	a	b	$b-ax_1$		初商 X_1 置一於左上為法 置一隅因為隅法以減從方為下法
C	x_1	$s-(b-ax_1)x_1$	a	b	$b-ax_1$		上法乘下法除實
D	x_1	$s-(b-ax_1)x_1$	a	b		$2ax_1$	倍隅法為廉法
E	x_1+x_2	$s-(b-ax_1)x_1$	a	b	$b-(2ax_1+ax_2)$	$2ax_1$	次商 X_2 置一於左次為上法 置一隅因為隅法併廉法以減原從為下法
F	x_1+x_2	$s-(b-ax_1)x_1-[b-(2ax_1+ax_2)]x_2$	a	b	$b-(2ax_1+ax_2)$		下法與上次法相乘除實盡

此法首次在第二卷第三題出現，以解 $-4x^2+1248x=92160$ 爲例

	商	實	隅	減從	下法	廉法	說明
A		92160	4	1248			
B	100	92160	4	1248	848		初商 100 1248-4*100=848
C	100	7360	4	1248	848		92160-848*100=7360
D	100	7360	4	1248		800	2*100=200
E	120	7360	4	1248	368	800	次商 20 1248-(800+4*20)=368
F	120	0	4	1248	368		7360-20*368=0

(四) 減從開平方法($-x^2+bx=s$)：「減從」即以法減從之意，故二次項係數爲-1，解題過程如下：

	商	實	從	下法	廉法	說明

A		s	b			布實于左 約初商
B	x_1	s	b	$b-x_1$		初商 x_1 置一於左上為法 置一為隅法以減從方為下法
C	x_1	$s-(b-x_1)x_1$	b	$b-x_1$		上法乘下法除實
D	x_1	$s-(b-x_1)x_1$	b		$2x_1$	倍隅法為廉法
E	x_1+x_2	$s-(b-x_1)x_1$	b	$b-(2x_1+x_2)$	$2x_1$	次商 x_2 置一於左次為上法 置一為隅法併廉法以減原從為下法
F	x_1+x_2	$s-(b-x_1)x_1-[b-(2x_1+x_2)]x_2$	b	$b-(2x_1+x_2)$		下法與上次法相乘除實盡

此法最先在第二卷第六題出現，以解$-x^2+400x=33600$爲例：

	商	實	減從	下法	廉法	說明
A		33600	400			
B	100	33600	400	300		初商 100　400-100=300
C	100	3600	400	300		33600-300*100=3600
D	100	3600	400		200	2*100=200
E	120	3600	400	180	200	次商 20　400-(200+20)=180
F	120	0	400	180		3600-180*20=0

(五)減從翻法開平方法($-x^2+bx=s$)，「翻法」過程中出現負積、負從，其餘過程與減從開平方法相同。

(六)以從減法開平方法($x^2-bx=s$)：顧名思義，以一次項減二次項，則從爲負數，二次項係數爲正數，解法如下：

	商	實	從	下法	廉法	說明
A		s	b			布實于左 約初商
B	x_1	s	b	x_1-b		初商 x_1 置一於左上為法 置一為隅法以從減隅為下法
C	x_1	$s-(x_1-b)x_1$	b	x_1-b		上法乘下法除實
D	x_1	$s-(x_1-b)x_1$	b		$2x_1$	倍隅法為廉法
E	x_1+x_2	$s-(x_1-b)x_1$	b	$(2x_1+x_2)-b$	$2x_1$	次商 x_2 置一於左次為上法 置一為隅法併廉法以減原從為下法
F	x_1+x_2	$s-(x_1-b)x_1-[(2x_1+x_2)-b]x_2$	b	$(2x_1+x_2)-b$		下法與上次法相乘除實盡

出現於第二卷第十四題，以解 $x^2-60x=7200$ 爲例：

	商	實	從	下法	廉法	說明
A		7200	60			
B	100	7200	60	40		初商 100　100-60=40
C	100	3200	60	40		7200-40*100=3200
D	100	3200	60		200	2*100=200
E	120	3200	60	160	200	次商 20　(200+20)-60=160
F	120	0	60	160		3200-160*20=0

又爲添積帶從開平方法($x^2+bx=s+x^2$)：原文中以從減法開方法($x^2-ax=s$)，又爲添

積帶從開方法，應爲 $x^2=s+bx$ 才是，在第六卷第十六題中，亦有說明「以從減法開平方法，又為以從添積開平方」，由此可證明在第二卷第十四題中出現的添積帶從開方法 $x^2+bx=s+x^2$ 確實是誤筆，雖解出答案無誤，但卻爲巧合，且其名應爲以從添積開平方，其原文解題過程如下：

	商	實	從	下法	廉法	說明
A		s	b			列實於左 約初商
B	x_1	$s+x_1^2$	b	$b+x_1$		初商 x_1 置一於左上為法 置一為隅法乘上法為益實 置一帶從方為下法
C	x_1	$s+x_1^2-(b+x_1)x_1$	b	$b+x_1$		上法乘下法除實
D	x_1	$s+x_1^2-(b+x_1)x_1$	b		$2x_1$	倍隅法為廉法
E	x_1+x_2	$s+x_1^2-(b+x_1)x_1+(2x_1+x_2)x_2$	b	$b+2x_1+x_2$	$2x_1$	次商 x_2 置一於左次為上法 置一為隅法併廉法乘上次法為益實 置一併廉法從方為下法
F	x_1+x_2	$s+x_1^2-(b+x_1)x_1+(2x_1+x_2)x_2-(b+2x_1+x_2)x_2$	b	$b+2x_1+x_2$		下法與上次法相乘除實盡

其中「益實」即爲加入原實之數，以解 $x^2+60x=7200+x^2$ 爲例：

	商	實	從	下法	廉法	說明
A		7200	60			
B	100	17200	60	160		初商 100 7200+100*100=17200 60+100=160
C	100	1200	60	160		17200-160*100=1200
D	100	1200	60		200	2*100=200
E	120	5600	60	280	200	次商 20 1200+(200+20)*20=5600 60+200+20=280
F	120	0	60	280		5600-280*20=0

(七) 帶從負隅開平方法($ax^2+bx=s$)：一次項、二次項係數均爲正數，且二次項係數不爲 1，解題過程如下：

	商	實	隅	從	下法	廉法	說明
A		s	a	b			布實于左 約初商
B	x_1	s	a	b	ax_1+b		初商 x_1 置一於左上為法 置一乘隅算為隅法併從方為下法
C	x_1	$s-(ax_1+b)x_1$	a	b	ax_1+b		下法乘上法除實
D	x_1	$s-(ax_1+b)x_1$	a	b		$2ax_1$	倍隅法為廉法
E	x_1+x_2	$s-(ax_1+b)x_1$	a	b	$(2ax_1+ax_2)+b$	$2ax_1$	次商 x_2 置一於左次為上法 置一乘隅算為隅法併從方廉法為下法
F	x_1+x_2	$s-(ax_1+b)x_1-[(2ax_1+ax_2)+b]x_2$	a	b	$(2ax_1+ax_2)+b$		下法與上法相乘除實盡

第一次出現在第四卷第十題，以解 $2x^2+1360x=192000$ 爲例：

	商	實	隅	從	下法	廉法	說明

A		192000	2	1360			
B	100	192000	2	1360	1560		初商 100　2×100+1360=1560
C	100	36000	2	1360	1560		192000-1560×100=36000
D	100	36000	2	1360		400	2×200=400
E	120	36000	2	1360	1800	400	次商 20　2×20+400+1360=1800
F	120	0	2	1360	1800	400	36000-1800×20=0

(八)減從負隅翻法開平方法($-ax^2+bx=s$)，「翻法」過程中出現負積、負從，其餘過程與負隅減從開方法同。

(九)以從減法翻法開平方法($x^2-bx=s$)，「翻法」過程中出現負積、負從，其餘過程與以從減法開平方法相同。

(十)負隅減法開平方法($ax^2-bx=s$)：「減法」即「以從減法」，故二次項係數爲正數，但不爲 1，一次項係數爲負數，解題如下：

	商	實	隅	從	下法	廉法	說明
A		s	a	b			布實于左　約初商
B	x_1	s	a	b	ax_1-b		初商 x_1 置一於左上為法　置一乘隅法以減去從方為下法
C	x_1	$s-(ax_1-b)x_1$	a	b	ax_1-b		下法乘上法除實
D	x_1	$s-(ax_1-b)x_1$	a	b		$2ax_1$	倍隅法為廉法
E	x_1+x_2	$s-(ax_1-b)x_1$	a	b	$(2ax_1+ax_2)-b$	$2ax_1$	次商 x_2 置一於左次為上法　置一乘隅法併廉法減去從方為下法
F	x_1+x_2	$s-(ax_1-b)x_1-[(2ax_1+ax_2)-b]x_2$	a	b	$(2ax_1+ax_2)-b$		下法與上法相乘除實盡

在第四卷第十八題首次出現，以解 $8x^2-448x=61440$ 爲例：

	商	實	隅	從	下法	廉法	說明
A		61440	8	448			
B	100	61440	8	448	352		初商 100　8×100-448=352
C	100	61440	8	448	352		61440-352×100=26240
D	100	26240	8	448		1600	2×800=1600
E	120	26240	8	448	1800	1600	次商 20　8×20+1600-448=1312
F	120	0	8	448	1800	1600	26240-1312×20=0

(十一)以從添積開平方法($x^2=bx+s$)：「添積」解題過程中，積不減反增，「以從添積」以一次項加入原積中，過程如下：

	商	實	從	下法	廉法	說明
A		s	b			布實于左　約初商
B	x_1	$s+bx_1$	b	x_1		初商 x_1 置一於左上為法　置一乘從為益積添入原積為實　置一為隅法

C	x_1	$s+bx_1-x_1^2$	b	x_1		隅法乘上法除實
D	x_1	$s+bx_1-x_1^2$	b		$2x_1$	倍隅法為廉法
E	x_1+x_2	$s+bx_1-x_1^2+bx_2$	b	$2x_1+x_2$	$2x_1$	次商 x_2 置一於左上為法 置一乘從方為益實添入餘積為實 置一併廉法為下法
F	x_1+x_2	$s+bx_1-x_1^2+bx_2-(2x_1+x_2)x_2$	b	$2x_1+x_2$		下法與上法相乘除實盡

過程中，「益」即爲增加之意。首次出現應爲第二卷第十四題，但因顧應祥誤筆，故以第六卷第十六題解 $x^2=155x+20400$ 爲例：

	商	實	從	下法	廉法	說明
A		20400	155			
B	200	51400	155	200		初商 200　20400+155×200=51400
C	200	11400	155	200		51400-200×200=11400
D	200	11400	155		400	2×200=400
E	240	18600	155	440	400	次商 40　11400+155×40=18600　400+40=440
F	240	0	155	440		18600-440×40=0

總括來說，書中的開方法幾乎已經將所有形式的一元二次方程式解出，不論是 $x^2+bx=s$(帶從)，$-x^2+bx=s$(減從)，$bx=x^2+s$(添積)，$x^2-bx=s$(以從減法)，$x^2=bx+s$(以從添積)，$ax^2+bx=s$(負隅帶從)，$-ax^2+bx=s$(負隅減從)，$bx=ax^2+s$(負隅添積)，$ax^2-bx=s$(負隅以從減隅)，$ax^2=bx+s$(以從添積負隅)，除了二次項及一次項均爲負數的二次方程，共計有十種一元二次方程式。但前文中卻說明有十一種，乃因有些題目在解題過程中出現負數，而加入「翻法」二字爲名，其解法與原方法均相同，且文中亦強調「減從」或「添積」可以互換，「減從術」與「添積術」(或爲「益積術」)可解同一題目；「以從減法」及「以從添積」亦可隨意運用，可見顧應祥對此兩種方法運用自如。

第四節《測圓海鏡分類釋術》的開立方法

本書提及的開立方法依序有帶從負隅開立方法、帶從廉開立方法、帶從減益廉翻法開立方法、帶從減廉開立方法、帶從以廉減從開立方法、帶從負隅以廉添積開立方法(又爲帶從廉半翻法減從負隅開立方法)、帶從以廉減從負隅開立方法(又爲帶從負隅以廉添積開立方法)、帶從方廉開立方法、帶從廉減從方翻法開立方法(又爲以從廉添積開立方法)、帶從廉負隅以隅減從開立方法(又爲帶從方廉負隅以隅添積開立方法)、負隅帶益廉減從開立方法(又爲帶從負隅添積開立方法)、

帶從減從廉開立方法共十二種；茲分別列表如下，以方便解說：

(一)帶從負隅開立方法($ax^3+cx=s$)：沒有二次項，只有三次項及一次項有正的係數，解題過程如下：

	商	實	隅	從方	下法	方法	廉法	說明
A		s	a	c				布實於左 以從方約之定首位
B	x_1	s	a	c	ax_1^2+c			初商 x_1 置一於左上為法 置一自之隅因為隅法 併從方為下法
C	x_1	$s-(ax_1^2+c)x_1$	a	c	ax_1^2+c			下法 與上法相乘除實
D	x_1	$s-(ax_1^2+c)x_1$	a	c		$3ax_1^2$	$3ax_1$	三因隅法為方法 三因初商又以隅筭因之為廉法
E	x_1+x_2	$s-(ax_1^2+c)x_1$	a	c	$ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+c$	$3ax_1^2$	$3ax_1x_2$	次商 x_2 置一於左次為上法 置一乘廉法 置一自之隅因為隅法 併方法從方廉隅為下法
F	x_1+x_2	$s-(ax_1^2+c)x_1-[ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+c]x_2$	a	c	$ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+c$			下法與上法相乘除實盡

其中「隅法」爲將以商爲底，以最高次減 1 爲次方，所求之數再乘以最高次之係數；「方法」爲隅法乘以 3(即$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 中 $3a^2b$ 的 3)；「廉法」爲初商乘以最高次係數再乘以 3(即$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 中 $3ab^2$ 的 3)。此法最初在第三卷第二題出現，以解 $2x^3+86400x=13824000$ 爲例：

	商	實	隅	從方	下法	方法	廉法	說明
A		13824000	2	86400				
B	100	13824000	2	86400	106400			初商 100 $2\times100^2+86400=106400$
C	100	384000	2	86400	106400			$13824000-106400\times100=3184000$
D	100	384000	2	86400		60000	600	$3\times20000=60000$ $3\times100\times2=600$
E	120	384000	2	86400	159200	60000	600	次商 20 $2\times20^2+20\times600+60000+86400=159200$
F	120	0	2	86400	159200			$384000-159200\times20=0$

(二)帶從廉開立方法($x^3+bx^2=s$)：稱二次項係數爲「從廉」，所以此型態無一次項，解題如下：

	商	實	從廉	下法	方法	廉法	說明
A		s	b				所得立積為實 以從廉约之
B	x_1	s	b	$x_1^2+bx_1$			初商 x_1 置一於左上為法 置一乘從廉置一自之為隅法 併從廉為下法
C	x_1	$s-(x_1^2+bx_1)x_1$	b	$x_1^2+bx_1$			下法與上法相除實
D	x_1	$s-(x_1^2+bx_1)x_1$	b		$2bx_1+3x_1^2$	$3x_1+b$	倍從廉 三因隅法相併為方法 三因初商帶從廉為廉法
E	x_1+x_2	$s-(x_1^2+bx_1)x_1$	b	$x_2^2+(3x_1+b)x_2+2bx_1+3x_1^2$	$2bx_1+3x_1^2$	$3x_1+b$	次商 x_2 置一於左次為上法 置一乘廉法 置一自之為隅法 併方廉隅為下法
F	x_1+x_2	$s-(x_1^2+bx_1)x_1-[x_2^2+(3x_1+b)x_2+2bx_1+3x_1^2]x_2$	b	$x_2^2+(3x_1+b)x_2+2bx_1+3x_1^2$			下法與上法相乘除實盡

過程中「方法」爲商乘以二次項係數乘 2(即$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 中 $2ab$ 的 2)，再加上隅法乘以 3(即$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 中 $3a^2b$ 的 3)；「廉法」爲商乘以 3(即$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 中 $3ab^2$ 的 3)加上二次項係數；雖與之前所述不同，但因下一步驟之下法相同，故無礙。此法首次出現在第三卷第八題，以解 $x^3+135x^2=21600000$ 爲例：

	商	實	從廉	下法	方法	廉法	說明
A		21600000	135				
B	200	21600000	135	67000			初商 200 $200^2+200\times135=67000$
C	200	8200000	135	67000			$21600000-67000\times200=8200000$
D	200	8200000	135		174000	735	$2\times27000+3\times40000=174000$ $3\times200+135=735$
E	240	8200000	135	2005000	174000	735	次商 40 $40^2+735\times40+174000=2005000$
F	240	0	135	2005000			$8200000-2005000\times40=0$

(三)帶從減益廉翻法開立方法($-x^3+bx^2-cx=s$)：「帶從減益廉」爲以三次項與一次項的和減二次項，故三次項及一次項係數爲負數，二次項爲正數，「翻法」，過程中

出現負積，解題如下：

	商	實	益廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	b	c				所得實 以從方廉約之
B	x_1	s	b	c	$bx_1-(x_1^2+c)$			初商 x_1 置一於左為法 置一乘從廉 置一自之為隅法 帶從方以減益廉餘為下法
C	x_1	$s-[bx_1-(x_1^2+c)]x_1$	b	c	$bx_1-(x_1^2+c)$			下法與上法相乘除實 實不滿法 反減實餘為負積
D	x_1	$s-[bx_1-(x_1^2+c)]x_1$	b	c		$3x_1^2$	$3x_1$	倍益廉 三因隅法為方法 三因初商為廉法
E	x_1+x_2	$s-[bx_1-(x_1^2+c)]x_1$	b	c	$bx_2+2bx_1-(x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2)$	$3x_1^2$	$3x_1$	次商 x_2 置一於左次為上法 置一乘益廉併入倍益廉 置一乘廉法 置一自之為隅法 併方從方廉隅 反減益廉為下法
F	x_1+x_2	$s-[bx_1-(x_1^2+c)]x_1-[bx_2+2bx_1-(x_2^2+3x_1x_2+x_1^2)]x_2$	b	c	$bx_2+2bx_1-(x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2)$			下法與上法相乘除實盡

第一次出現在第三卷第十一題，以解$-x^3+140x^2-900x=180000$ 爲例：

	商	實	益廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		180000	140	900				
B	100	180000	140	900	3100			初商 100 $140\times100-(100^2+900)=3100$
C	100	-130000	140	900	3100			$180000-3100\times100=-130000$
D	100	-130000	140	900		30000	300	$2\times14000=28000$ $3\times10000=30000$ $3\times100=300$
E	120	-130000	140	900	-6500	30000	300	次商 20 $20\times140+28000-(20^2+300\times20+30000)=-6500$
F	120	0	140	900	-6500			$-130000-(-6500)\times20=0$

(四)帶從減廉開立方法($-x^3+bx^2-cx=s$)，同帶從減益廉翻法開立方法，惟計算過程中未出現負數而已。

(五)帶從以廉減從開立方法($x^3-bx^2+cx=s$)：以二次項減一次項，故只有二次項係數爲負數，過程如下：

	商	實	益廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	b	c				布實於左 從於右 別置

								減從廉
B	x_1	s	b	c	$x_1^2+(c-bx_1)$			初商 x_1 置一於左上為法 置一乘從廉以減從方餘 置一自之併餘從為下法
C	x_1	$s-[x_1^2+(c-bx_1)]x_1$	b	c	$x_1^2+(c-bx_1)$			下法與上法相乘除實
D	x_1	$s-[x_1^2+(c-bx_1)]x_1$	b	c		$3x_1^2$	$3x_1$	倍減廉 三因隅法為方法 三因初商為廉法
E	x_1+x_2	$s-[x_1^2+(c-bx_1)]x_1$	b	c	$x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2+[c-(bx_2+2bx_1)]$	$3x_1^2$	$3x_1$	次商 x_2 置一於左次為上法 置一乘減廉併倍廉以減原從 置一乘廉法 置一自之為隅法 併方廉隅 帶餘從為下法
F	x_1+x_2	$s-[bx_1-(x_1^2+c)]x_1-\{x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2+[c-(bx_2+2bx_1)]\}x_2$	b	c	$x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2+[c-(bx_2+2bx_1)]$			下法與上法相乘除實盡

此法最初在第四卷第一題出現，以解 $x^3-320x^2+132800x=13056000$ 爲例：

	商	實	廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		13056000	320	1328000				
B	100	13056000	320	1328000	110800			初商 100 $100^2+(1328000-320\times100)$ $=110800$
C	100	1976000	320	1328000	110800			$13056000-110800\times100=1976000$
D	100	1976000	320	1328000		30000	300	$2\times32000=64000$ $3\times10000=30000$ $3\times100=300$
E	120	1976000	320	1328000	98800	30000	300	次商 20 $20^2+300\times20+30000+[1328000-(320\times20+64000)]=98800$
F	120	0	320	1328000	98800			$1976000-98800\times20=0$

(六)帶從負隅以廉添積開立方法($ax^3+cx=bx^2+s$)：以二次項加入原積，解題如下：

	商	實	隅	益廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	a	b	c				置所得立方實於左 以從方益廉隅算約之
B	x_1	$s+bx_1^2$	a	b	c	ax_1^2+c			初商 x_1 置一於左上為法 置一乘益廉與上法相乘為益實 添入積內為通實 置一自之又以隅算因之為隅法 併從方為下法
C	x_1	$s+bx_1^2-(ax_1^2+c)x_1$	a	b	c	ax_1^2+c			下法與上法相乘除實
D	x_1	$s+bx_1^2-(ax_1^2+c)x_1$	a	b	c		$3ax_1^2$	$3x_1$	二因乘過益廉得為益廉 三

									因隅法為方法 三因初商為廉法
E	x_1+x_2	$s+bx_1^2-(ax_1^2+c)x_1$ $+(bx_2+2bx_1)x_2$	a	b	c	ax_2^2 $+3ax_1x_2$ $+3ax_1^2+c$	$3ax_1^2$	$3x_1$	次商 x_2 置一於左上為法 置一乘原益廉併入乘過益廉與上法相乘為益實 添入次實為通實 置一乘廉法隅因置一自之隅因為隅法 併方廉隅帶從方為下法
F	x_1+x_2	$s+bx_1^2-(ax_1^2+c)x_1$ $+(bx_2+2bx_1)x_2$ $-(ax_2^2+3ax_1x_2$ $+3ax_1^2+c)x_2$	a	b	c	ax_2^2 $+3ax_1x_2$ $+3ax_1^2+c$			下法與上法相乘除實盡

在第四卷第五題首次出現，以解 $4x^3+270080x=1280x^2+20889600$ 爲例：

	商	實	隅	益廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		20889600	4	1280	270080				
B	100	33689600	4	1280	270080	310080			初商 100 $20889600+1280\times100^2$ $=33689600$ $4\times100^2+270080=310080$
C	100	2681600	4	1280	270080	310080			$33689600-310080\times100$ $=2681600$
D	100	2681600	4	1280	270080		120000	300	$2\times128000=256000$ $3\times40000=120000$ $3\times100=300$
E	120	8313600	4	1280	270080	415680	120000	300	次商 20 $2681600+(1280\times20+256000)\times20=8313600$ $4\times20^2+4\times300\times20+120000$ $+270080=415680$
F	120	0	4	1280	270080	415680			$8313600-415680\times20=0$

又爲帶從廉半翻法減從負隅開立方法($ax^3-bx^2+cx=s$)：「半翻法」過程中出現負從，但未出現負積，過程如下：

	商	實	隅	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	a	b	c				置所得立方實於左 以從方益廉隅箕約之
B	x_1	s	a	b	c	$ax_1^2+(c-bx_1)$			初商 x_1 置一於左上為法 置一乘從廉以減從方 置一自之隅因為隅法 併減餘從方為下法
C	x_1	$s-[ax_1^2+(c-bx_1)]x_1$	a	b	c	$ax_1^2+(c-bx_1)$			下法與上法相乘除實
D	x_1	$s-[ax_1^2+(c-bx_1)]x_1$	a	b	c		$3ax_1^2$	$3x_1$	二因從廉 三因隅法為方

									法 三因初商為廉法
E	x_1+x_2	$s-[ax_1^2+(c-bx_1)]x_1$	a	b	c	$ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+[c-(bx_2+2bx_1)]$	$3ax_1^2$	$3x_1$	次商 x_2 置一餘左次為上法 置一乘從廉得併入前二因從廉 以減從方不及 反減從方餘為負從 置一乘廉法以隅因 置一自之隅因為隅法 併方廉隅 反減負從 餘為下法
F	x_1+x_2	$s-[ax_1^2+(c-bx_1)]x_1-\{ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+[c-(bx_2+2bx_1)]\}x_2$	a	b	c	$ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+[c-(bx_2+2bx_1)]$			下法與上法相乘除實盡

出現在第四卷第五題，以解 $4x^3-1280x^2+270080x=20889600$ 爲例：

	商	實	隅	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		20889600	4	1280	270080				
B	100	20889600	4	1280	270080	182080			初商 100 $\times 100^2+(270080-1280\times 100)=182080$
C	100	2681600	4	1280	270080	182080			$20889600-182080\times 100=2681600$
D	100	2681600	4	1280	270080		120000	300	$2\times 128000=256000$ $3\times 40000=120000$ $3\times 100=300$
E	120	2681600	4	1280	270080	134080	120000	300	次商 20 $4\times 20^2+4\times 300\times 20+120000+[270080-(1280\times 20+256000)=134080$
F	120	0	4	1280	270080	124080			$2681600-134080\times 20=0$

(七)帶從以廉減從負隅開立方法($ax^3-bx^2+cx=s$) (又爲帶從負隅以廉添積開立方法)(第四卷第八題)，同帶從廉半翻法減從負隅開立方法，而計算過程中沒有出現負從。

(八)帶從方廉開立方法($x^3+bx^2+cx=s$)：帶有二次項及一次項且係數均爲正數：過程如下：

	商	實	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	b	c				置實于左 以從方從廉約之
B	X_1	s	b	c	$x_1^2+bx_1+c$			初商 x_1 置一於左上為法 置一乘從廉 置一自之為隅法 併從方從廉隅為下法
C	X_1	$s-(x_1^2+bx_1+c)x_1$	b	c	$x_1^2+bx_1+c$			下法與上法相乘除實
D	X_1	$s-(x_1^2+bx_1+c)x_1$	b	c		$3x_1^2+$	$3x_1$	二因從廉 三因隅法 相併為方

						$2bx_1$	$+b$	法 三因初商得帶從廉為廉法
E	x_1+x_2	$s-(x_1^2+bx_1+c)x_1$	b	c	$x_2^2+(3x_1+b)x_2+(3x_1^2+2bx_1)+c$	$3x_1^2+2bx_1$	$3x_1+b$	次商 x_2 置一於左上為法 置一乘廉法 置一自之為隅法 併方法從方廉隅為下法
F	x_1+x_2	$s-(x_1^2+bx_1+c)x_1-[x_2^2+(3x_1+b)x_2+(3x_1^2+2bx_1)+c]x_2$	b	c	$x_2^2+(3x_1+a)x_2+(3x_1^2+2ax_1)+b$			下法與上法相乘除實盡

最初出現在第四卷第十一題，以解 $x^3+255x^2+40000x=10200000$ 爲例：

	商	實	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		10200000	255	40000				
B	100	10200000	255	40000	75500			初商 100 $100^2+255\times100+40000=75500$
C	100	2650000	255	40000	75500			$1020000-75500\times100=2650000$
D	100	2650000	255	40000		81000	555	$3\times10000+2\times255\times100=81000$ $3\times100+255=555$
E	120	2650000	255	40000	132500	81000	555	次商 20 $2\times20^2+555\times20+81000+40000=132500$
F	120	0	255	40000	132500			$2650000-132500\times20=0$

(九)帶從廉減從方翻法開立方法($x^3-bx^2+cx=s$)(第五卷第一題)，同帶從以廉減從方開立方法，惟其過程中下法與積均出現負數罷了。

又爲以從廉添積開立方法($x^3+cx=bx^2+s$)：以二次項添入原積中，解題過程如下：

	商	實	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	b	c				置所得立方實於左 以從方廉约之
B	x_1	$s+bx_1^2$	b	c	x_1^2+c			初商 x_1 置一於左上為法 置一乘從廉與上法相乘為益實 添入積內為通實 置一自之為隅法 併從方為下法
C	x_1	$s+bx_1^2-(x_1^2+c)x_1$	b	c	x_1^2+c			下法與上法相乘除實
D	x_1	$s+bx_1^2-(x_1^2+c)x_1$	b	c		$3x_1^2$	$3x_1$	倍從廉 三因隅法為方法 三因初商為廉法
E	x_1+x_2	$s+bx_1^2-(x_1^2+c)x_1+(bx_2+2bx_1)x_2$	b	c	$x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2+c$	$3x_1^2$	$3x_1$	次商 x_2 置一於左上為法 置一乘原從廉併入倍從廉與上法相乘為益實 添入次實為通實 置一乘廉法 置一

								自之為隅法 併方廉隅帶從方為下法
F	x_1+x_2	$s+bx_1^2-(x_1^2+c)x_1+(bx_2+2bx_1)x_2-(x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2+c)x_2$	b	c	$x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2+c$			下法與上法相乘除實盡

出現在第五卷第一題，以解 $x^3+213600x=1200x^2+10080000$ 爲例：

	商	實	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		10080000	1200	213600				
B	100	22080000	1200	213600	223600			初商 100 $10080000+1200\times100^2=22080000$ $100^2+213600=223600$
C	100	-280000	1200	213600	223600			$22080000-223600\times100=-280000$
D	100	-280000	1200	213600		30000	300	$2\times120000=240000$ $3\times10000=30000$ $3\times100=300$
E	120	5000000	1200	213600	250000	30000	300	次商 20 $-280000+(1200\times20+240000)\times20=5000000$ $20^2+300\times20+30000+213600=250000$
F	120	0	1200	213600	250000			$5000000-250000\times20=0$

(十)帶從廉負隅以隅減從開立方法($-ax^3+bx^2+cx=s$)：「以隅減從」三次項係數爲負數，其餘爲正數，解題如下：

	商	實	隅	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	a	b	c				所得立實 以從方廉約之
B	x_1	s	a	b	c	$(c-ax_1^2)+bx_1$			初商 x_1 置一於左上為法 置一乘從廉 置一自之又以隅因之為隅法 以減從方 併從廉為下法
C	x_1	$s-[(c-ax_1^2)+bx_1]x_1$	a	b	c	$(c-ax_1^2)+bx_1$			下法與上法相乘除實
D	x_1	$s-[(c-ax_1^2)+bx_1]x_1$	a	b	c		$3ax_1^2$	$3ax_1$	倍從廉 三因隅法為方法 三因初商以隅因之為廉法
E	x_1+x_2	$s-[(c-ax_1^2)+bx_1]x_1$	a	b	c	$c-(ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2)+(bx_2+2bx_1)$	$3ax_1^2$	$3ax_1$	次商 x_2 置一於左上為法 置一乘從廉加入倍廉 置一自之又隅因為隅法 置一乘廉法併方法廉隅以減原從方 併入從廉為下法

F	x_1+x_2	$s-[(c-ax_1^2)+bx_1]x_1-[c-(ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2)+(bx_2+2bx_1)]x_2$	a	b	c	$c-(ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2)+(bx_2+2bx_1)$			下法與上法相乘除實盡

此法於第五卷第六題首次出現，以解$-6x^3+3600x^2+536400x=105840000$ 爲例：

	商	實	隅	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		105840000	6	3600	536400				
B	100	105840000	6	3600	536400	836400			初商 100 $(536400-6\times100^2)+3600\times100=836400$
C	100	22200000	6	3600	536400	836400			$105840000-836400\times100=22200000$
D	100	22200000	6	3600	536400		180000	1800	$2\times360000=720000$ $3\times60000=180000$ $3\times100\times6=1800$
E	120	22200000	6	3600	536400	1110000	180000	1800	次商 20 $536400-(20^2+1800\times20+180000)+(3600\times20+720000)=1110000$
F	120	0	6	3600	536400	1110000			$22200000-1110000\times20=0$

又爲帶從方廉負隅以隅添積開立方法($bx^2+cx=ax^3+s$)：以三次項添入原積，解法如下：

	商	實	隅	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	a	b	c				所得立實 以從方廉約之
B	x_1	$s+ax_1^3$	a	b	c	bx_1+c			初商 x_1 置一於左上為法 置一自之以隅因與上法為益實 添入積內為實 置一乘從廉 併從方為下法
C	x_1	$s+ax_1^3-(bx_1+c)x_1$	a	b	c	bx_1+c			下法與上法相乘除實
D	x_1	$s+ax_1^3-(bx_1+c)x_1$	a	b	c		$3ax_1^2$	$3ax_1$	三因隅法為方法 三因初商以隅因為廉法
E	x_1+x_2	$s+ax_1^3-(bx_1+c)x_1+(ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2)x_2$	a	b	c	$b(2x_1+x_2)+c$	$3ax_1^2$	$3ax_1$	次商 x_2 置一於左次為上法 置一乘廉法 置一自之隅因為隅法 併方廉隅 與上法相乘為益實 添入餘積為實 倍初商加次商 以乘從廉 併從方為下法

F	x_1+x_2	$s+ax_1^3-(bx_1+c)x_1+(ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2)x_2-[b(2x_1+x_2)+c]x_2$	a	b	c	$b(2x_1+x_2)+c$			下法與上法相乘除實盡

以同題解 $3600x^2+536400x=6x^3+105840000$ 爲例：

	商	實	隅	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		105840000	6	3600	536400				
B	100	111840000	6	3600	536400	896400			初商 100 105840000+6× 100^3=111840000 3600×100+536400=896400
C	100	22200000	6	3600	536400	896400			111840000-896400×100 =22200000
D	100	22200000	6	3600	536400		180000	1800	3×60000=180000 3×6×100=1800
E	120	26568000	6	3600	536400	1328400	180000	1800	次商 20 22200000+(6×20^2+1800× 20+180000) ×20=26568000 3600(2×100+20)+536400 =1328400
F	120	0	6	3600	536400	1328400			26568000-1328400×20=0

(十一)負隅帶益廉減從開立方法($-ax^3-bx^2+cx=s$)，此題計算過程中有出現負積與負從，依照顧應祥的命名法，應名爲「負隅帶益廉減從翻法開立方法」才是。

	商	實	隅	益廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	a	b	c				所得立實 以從方廉約之
B	x_1	s	a	b	c	$c-(ax_1^2+bx_1)$			初商 x_1 置一於左上為法 置一乘益廉 置一自之以隅法因之為隅法 併益廉以減從方餘為下法
C	x_1	$s-[c-(ax_1^2+bx_1)]x_1$	a	b	c	$c-(ax_1^2+bx_1)$			下法與上法相乘除實 實不滿法 反除實餘為負積
D	x_1	$s-[c-(ax_1^2+bx_1)]x_1$	a	b	c		$3ax_1^2$	$3x_1$	倍益廉 三因隅法為方法 三因初商為廉法
E	x_1+x_2	$s-[c-(ax_1^2+bx_1)]x_1$	a	b	c	$c-[ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+(bx_2+2bx_1)]$	$3ax_1^2$	$3x_1$	次商 x_2 置一於左上為法 置一乘從廉 併入倍廉為益廉 置一乘廉法隅因 置

									一自之隅因為隅法 併方廉隅加益廉 以減從方 不及反減從方餘為負從
F	x_1+x_2	$s-[c-(ax_1^2+bx_1)]x_1-\{c-[ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+(bx_2+2bx_1)]\}x_2$	a	b	c	$c-[ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+(bx_2+2bx_1)]$			負從與上法相乘除實盡

最先出現在第七卷第六題，以解$-4x^3-468x^2+201240x=6156000$ 爲例：

	商	實	隅	益廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		6156000	4	468	201240				
B	100	6156000	4	468	201240	114440			初商 100　$201240-(4\times100^2+468\times100)=114440$
C	100	-5288000	4	468	201240	114440			$6156000-114440\times100=-5288000$
D	100	-5288000	4	468	201240		120000	300	$2\times46800=93600$ $3\times40000=120000$ $3\times100=300$
E	150	-5288000	4	468	201240	-105760	120000	300	次商 20　$201240-[4\times50^2+300\times4\times50+120000+(468\times50+93600)]=-105760$
F	150	0	4	468	201240	-105760			$-5288000-(-105760)\times50=0$

又爲帶從負隅添積開立方法($cx=ax^3+bx^2+s$)，此題計算過程中有出現負積，依照顧應祥的命名法，應名爲「帶從負隅半翻法開立方法」才是，解題如下：

	商	實	隅	益廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	a	b	c				所得立實 以從方廉約之
B	x_1	$s+(ax_1^2+bx_1)x_1$	a	b	c	c			初商 x_1 置一於左上為法 置一乘益廉 置一自之以隅法因之為隅法 併益廉 乘上法為益實加入積內為實 從方為下法
C	x_1	$s+(ax_1^2+bx_1)]x_1-cx_1$	a	b	c	c			下法與上法相乘除實實不滿法反除實餘為負積
D	x_1	$s+(ax_1^2+bx_1)]x_1-cx_1$	a	b	c		$3ax_1^2$	$3x_1$	倍益廉 三因隅法為方法 三因初商為廉法
E	x_1+x_2	$s+(ax_1^2+bx_1)]x_1-cx_1+[ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+(bx_2+2bx_1)]x_2$	a	b	c	c	$3ax_1^2$	$3x_1$	次商 x_2 置一於左上為法 置一乘從廉 併入倍廉為益廉 置一乘廉法隅因 置一自之隅因為隅法 併方廉隅加益廉乘上法為益實 添入負積為實 從方為下法

F	x_1+x_2	$s+(ax_1^2+bx_1)]x_1-cx_1+[ax_2^2+3ax_1x_2+3ax_1^2+(bx_2+2bx_1)]x_2-cx_2$	a	b	c	c			下法與上法相乘除實盡

出現在第七卷第六題，以解$-4x^3-468x^2+201240x=6156000$ 爲例：

	商	實	隅	益廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		6156000	4	468	201240				
B	100	14836000	4	468	201240	201240			初商 100　$6156000+(4\times100^2+468\times100)\times100=14836000$
C	100	-5288000	4	468	201240	201240			$14836000-201240\times100=-5288000$
D	100	-5288000	4	468	201240		120000	300	$2\times46800=93600$ $3\times40000=120000$ $3\times100=300$
E	150	10062000	4	468	201240	201240	120000	300	次商 20　$-5288000+[4\times50^2+300\times4\times50+120000+(468\times50+93600)]\times50=10062000$
F	150	0	4	468	201240	201240			$10062000-201240\times50=0$

(十二)帶從減從廉開立方法($-x^3+bx^2-cx=s$)：以三次項加一次項的和減二次項，唯二次項係數爲正數，其餘爲負數，解題如下：

	商	實	從廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		s	b	c				列置所得立實方廉
B	x_1	s	b	c	$bx_1-(x_1^2+c)$			初商 x_1 置一隅左上為法 置一乘從廉 置一自之為隅法 併從方 以減從廉餘為下法
C	x_1	$s-[bx_1-(x_1^2+c)]x_1$	b	c	$bx_1-(x_1^2+c)$			下法與上法相乘除實
D	x_1	$s-[bx_1-(x_1^2+c)]x_1$	b	c		$3x_1^2$	$3x_1$	倍從廉 三因隅法為方法 三因初商為廉法
E	x_1+x_2	$s-[bx_1-(x_1^2+c)]x_1$	b	c	$(bx_2+2bx_1)-(x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2+c)$	$3x_1^2$	$3x_1$	次商 x_2 置一於左上為法 置一乘從廉 併入倍廉為益廉 置一乘廉法 置一自之為隅法 併方法從方廉隅 以減益廉餘為下法
F	x_1+x_2	$s-[bx_1-(x_1^2+c)]x_1-[(bx_2+2bx_1)-(x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2+c)]x_2$	b	c	$(bx_2+2bx_1)-(x_2^2+3x_1x_2+3x_1^2+c)$			下法與上法相乘除實盡

出現在第八卷第八題，以解$-x^3+1280x^2-70400x=43008000$ 爲例：

	商	實	益廉	從	下法	方法	廉法	說明
A		43008000	1280	70400				
B	200	43008000	1280	70400	145600			初商 200 $1280\times200-(200^2+70400)$ $=145600$
C	200	13888000	1280	70400	145600			$43008000-145600\times200$ $=13888000$
D	200	13888000	1280	70400		120000	600	$2\times256000=512000$ $3\times40000=120000$ $3\times200=600$
E	240	13888000	1280	70400	347200	120000	600	次商 40 $(1280\times40+512000)-(40^2+600\times40+120000+70400)=347200$
F	240	0	1280	70400	347200			$13888000-347200\times40=0$

以現代的三次方程式 $ax^3+bx^2+cx=s$ 而言，顧應祥在書中已解了大半型式的題目，若將其減從或添積的題型另計的話，應不只解了十二種，將會更多才是。

第五節《測圓海鏡分類釋術》的開三乘方法

本書提及的開三乘方法有帶從方廉開三乘方法、帶從二廉減從翻法開三乘方法、帶從益廉添積開三乘方法(又爲帶從方廉減隅翻法開三乘方法)、從廉減從方負隅開三乘方法、帶從廉負隅以廉隅添積開三乘方法(又爲帶從負隅以廉隅減從開三乘方法)、帶從負隅以二廉減從方開三乘方法(帶上廉負隅以下廉減從開三乘方法)、帶從方上廉以下廉減從開三乘方法、帶一廉負隅減從以二廉益從開三乘方法、帶從益廉以二廉減從開三乘方法(又爲帶從方廉以二廉添積開三乘方法)、帶從方負隅單位開三乘方法、帶從方廉負隅以二廉減從翻法開三乘方法(又爲帶從方負隅以二廉添積開三乘方法)、帶從方廉隅筭以二廉減從開三乘方法(又爲帶從方廉隅以二廉添積開三乘方法)、帶從廉隅添積開三乘方法」(「帶從方一廉添積以二廉爲法開三乘方法」)，以下依序列表說明：

(一)帶從方廉開三乘方法($x^4+bx^3+cx^2+dx=s$)：二次項三次項係數均稱爲「廉」，二次項爲從一廉，三次項爲從二廉，解題過程如下：

	商	實	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉

A		s	b	c	d				
B	x_1	s	b	c	d	$x_1^3+bx_1^2+cx_1$			
C	x_1	$s-(x_1^3+bx_1^2+cx_1)x_1$	b	c	d	$x_1^3+bx_1^2+cx_1$			
D	x_1	$s-(x_1^3+bx_1^2+cx_1)x_1$	b	c	d		$4x_1^3$	$6x_1^2$	$4x_1$
E	x_1+x_2	$s-(x_1^3+bx_1^2+cx_1)x_1$	b	c	d	$x_2^3+4x_1x_2^2+6x_1^2x_2+4x_1^3+b[x_2^2+3x_1(x_1+x_2)]+c(2x_1+x_2)+d$	$4x_1^3$	$6x_1^2$	$4x_1$
F	x_1+x_2	$s-(x_1^3+bx_1^2+cx_1)x_1-\{x_2^3+4x_1x_2^2+6x_1^2x_2+4x_1^3+b[x_2^2+3x_1(x_1+x_2)]+c(2x_1+x_2)+d\}x_2$	b	c	d	$x_2^3+4x_1x_2^2+6x_1^2x_2+4x_1^3+b[x_2^2+3x_1(x_1+x_2)]+c(2x_1+x_2)+d$			
	說明								
A	置所得三乘方積為實　以從方廉約之初商								
B	初商 x_1 置一為法　置一乘從一廉　置一自之以乘從二廉　置一自乘再乘為隅法　併從方廉隅共為下法								
C	下法　與上法相乘除實								
D	四因隅法為方法　初商自之六因為上廉　初商四之為下廉								
E	次商 x_2 置一於左次為上法　倍初商加次商以乘從一廉　初商三之併初次商因之加次商自之以乘從二廉　以兩從廉併入從方為從　置一乘上廉　置一自之以乘下廉　置一自乘再乘為隅法　併方廉帶從為下法								
F	下法　與上法相乘除實盡								

其中「隅法」爲將以商三次方後再乘以最高次之係數；「方法」爲隅法乘以 4(即 $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ 中 $4a^3b$ 的 4)；「上廉」爲商平方後乘以最高次係數再乘以 6(即 $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ 中 $6a^2b^2$ 的 6)；「下廉」爲商乘以 4(即 $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ 中 $4ab^3$ 的 4)。在第三卷第五題即出現，以解 $x^4+1406x^3+511907x^2+4730640x=10576065600$ 爲例：

	商	實	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		10576065600	1406	511907	4730640				
B	100	10576065600	1406	511907	4730640	70981340			
C	100	3477931600	1406	511907	4730640	70981340			
D	100	3477931600	1406	511907	4730640		4000000	60000	400
E	120	3477931600	1406	511907	4730640	173896580	4000000	60000	400
F	120	0	1406	511907	4730640	173896580			

	說		明
B	初商 100 $100^3+1406\times100^2+511907\times100+470640$ $=70981340$	E	次商 20 $20^3+400\times20^2+60000\times20+4000000+1406\times[20^2+3\times100(100+20)]+511907\times(2\times100+20)$ $+4730640=173896580$
C	$10576065600-70981340\times100=3477931600$		
D	$4\times100^3=4000000$　　$6\times100^2=60000$ $4\times100=400$	F	$3477931600-173896580\times20=0$

(二)帶從二廉減從翻法開三乘方法(帶一廉以從二廉益從減從爲法翻法開三乘方)

($-ax^4+bx^3-cx^2+dx=s$)：以四次項與二次項的和減一次項，所以這兩項係數爲負數，解題如下：

	商	實	虛隅	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		s	a	b	c	d				
B	x_1	s	a	b	c	d	$(bx_1^2+d)-(ax_1^3+cx_1)$			
C	x_1	$s-[(bx_1^2+d)-(ax_1^3+cx_1)]x_1$	a	b	c	d	$(bx_1^2+d)-(ax_1^3+cx_1)$			
D	x_1	$s-[(bx_1^2+d)-(ax_1^3+cx_1)]x_1$	a	b	c	d		$4ax_1^3$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
E	x_1+x_2	$s-[(bx_1^2+d)-(ax_1^3+cx_1)]x_1$	a	b	c	d	$(bx_2^2+3bx_1x_2+3bx_1^2+d)-(ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+cx_2+4ax_1^3+2cx_1)$	$4ax_1^3$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
F	x_1+x_2	$s-[(bx_1^2+d)-(ax_1^3+cx_1)]x_1-[(bx_2^2+3bx_1x_2+d)-(ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax_1^3)]x_2$	a	b	c	d	$(bx_2^2+3bx_1x_2+3bx_1^2+d)-(ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+cx_2+4ax_1^3+2cx_1)$			

	說明
A	列所得三乘方實從一廉從二廉隅法约之
B	初商 x_1 置一於左上為法 置一乘從一廉為益隅之廉 置一自之以乘從二廉為益從之廉併入從方為通法 置一自乘再乘以隅因之為隅法 併益隅之廉為減實 以減通法為下法
C	下法與上法相乘除實實不滿法翻減為負積
D	二因乘出從一廉為益隅之廉 三因乘出從二廉為益從之廉 三之初商乘從二廉為益從次廉 四因隅法為方法 初商自之六因又以隅因為上廉 初商四之隅因為下廉
E	次商 x_2 置一於左上為法 置一乘從一廉併益隅之廉為益隅 置一乘益從次廉 置一自之以乘從二廉 併二數加入益從之廉為益從 併入從方為通法 置一乘上廉 置一自之以乘下廉 置一自乘再乘隅因為隅法 併方法上下廉隅法 併益隅為減實 以減通法不及減反減通法為負法
F	負法與上法相乘 除負積盡

首次出現在第三卷第九題，以解$-4x^4+600x^3-6988x^2+11681280x=788486400$爲例：

	商	實	虛隅	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		788486400	4	600	6988	11681280				
B	100	788486400	4	600	6988	11681280	7982480			

C	100	-9761600	4	600	6988	11681280	7982480			
D	100	-9761600	4	600	6988	11681280		16000000	240000	1600
E	120	-9761600	4	600	6988	11681280	-488080	16000000	240000	1600
F	120	0	4	600	6988	11681280	-488080			

	說		明
B	初商 100 $600\times100^2+11681280-(4\times100^3+6988\times100)$ $=7982400$	E	次商 20 $(600\times20^2+3\times600\times100\times20+3\times600\times100^2+11681280)-(4\times20^3+1600\times20^2+240000\times20+6988\times20+16000000+2\times6988\times100)$ $=-488080$
C	$788486400-7982400\times100=-9761600$		
D	$4\times4000000=16000000$　$4\times6\times100^2=240000$ $4\times4\times100=1600$	F	$-976160-(-488080)\times20=0$

(三)帶從益廉添積開三乘方法($x^4=s+cx^2+dx$)：以一次項及二次項添入原積中，解題如下：

	商	實	益廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		s	c	d				
B	X_1	$s+(cx_1+d)x_1$	c	d	x_1^3			
C	X_1	$s+(cx_1+d)x_1-x_1^4$	c	d	x_1^3			
D	X_1	$s+(cx_1+d)x_1-x_1^4$	c	d		$4x_1^3$	$6x_1^2$	$4x_1$
E	x_1+x_2	$s+(cx_1+d)x_1-x_1^4+(cx_2+2cx_1+d)x_2$	c	d	$x_2^3+4x_1x_2^2+6x_1^2x_2+4x_1^3$	$4x_1^3$	$6x_1^2$	$4x_1$
F	x_1+x_2	$s+(cx_1+d)x_1-x_1^4+(cx_2+2cx_1+d)x_2-(x_2^3+4x_1x_2^2+6x_1^2x_2+4x_1^3)x_2$	c	d	$x_2^3+4x_1x_2^2+6x_1^2x_2+4x_1^3$			

	說明
A	置所得三乘方積 以從方廉約之
B	初商 x_1 置一於左上為法 置一乘從益廉併從方為益積之法 與上法相乘為益實 添入原積為通實 置一自乘再乘為隅法
C	隅法與上法相乘除實 餘為次實
D	二因益廉 四因隅法為方法 初商自之六因為上廉 初商四之為下廉
E	次商 x_2 置一於左次為上法 置一乘益廉 併前倍廉 併從方為益積之法 與上法相乘為益實 添入次實為通實 置一乘上廉 置一自之以乘下廉 置一自乘再乘為隅法 併方廉隅為下法
F	下法 與上法相乘除實盡

在第三卷第二十二題即出現，以解 $x^4=4665600+86400x^2+652320x$ 爲例：

	商	實	益廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		4665600	8640	652320				
B	100	156297600	8640	652320	1000000			
C	100	56297600	8640	652320	1000000			
D	100	56297600	8640	652320		4000000	60000	400

E	120	107360000	8640	652320	5368000	4000000	60000	400
F	120	0	8640	652320	5368000			

	說明		
B	初商 100 4665600+(8640×100+652320)×100 =156297600 100^3=1000000	E	次商 20 56297600+(8640×20+1728000×20+652320)×20=107360000 20^3+400×20^2+60000×20+4000000=5368000
C	156297600-1000000×100=56297600		
D	2×864000=1728000　4×1000000=4000000 6×100^2=60000　4×100=400	F	107360000-5368000×20=0

又為帶從方廉減隅翻法開三乘方法($x^4-cx^2-dx=s$)：以一次項與二次項的和減四次項，故只有四次項係數為正數，解題如下：

	商	實	益廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		s	c	d				
B	x_1	s	c	d	$x_1^3-(cx+d)$			
C	x_1	$s-[x_1^3-(cx+d)]x_1$	c	d	$x_1^3-(cx+d)$			
D	x_1	$s-[x_1^3-(cx+d)]x_1$	c	d		$4x_1^3$	$6x_1^2$	$4x_1$
E	x_1+x_2	$s-[x_1^3-(cx+d)]x_1$	c	d	$x_2^3+4x_1x_2^2+6x_1^2x_2+4x_1^3-[c(2cx_1+x_2)+d]$	$4x_1^3$	$6x_1^2$	$4x_1$
F	x_1+x_2	$s-[x_1^3-(cx+d)]x_1-\{x_2^3+4x_1x_2^2+6x_1^2x_2+4x_1^3-[c(2cx_1+x_2)+d]\}x_2$	c	d	$x_2^3+4x_1x_2^2+6x_1^2x_2+4x_1^3-[c(2cx_1+x_2)+d]$			

	說明
A	置所得三乘方積　以從方廉約之
B	初商 x_1　置一於左上為法　置一自乘再乘為隅法　置一乘從廉併從方　以減隅法　不及反減隅法　餘為負隅　與上法相乘　加原實為次商之實
C	負隅與上法相乘　加原實為次商之實
D	四因隅法為方法　初商自之六因為上廉　初商四之為下廉
E	次商 x_2　置一於左次為上法　置一乘上廉　置一自之以乘下廉　置一自乘再乘為隅法　併方法廉隅為通隅　倍初商加次商　以乘從廉　併從方　以減通隅　餘為下法
F	下法　與上法相乘除實盡

以同題解 $x^4-86400x^2-652320x=4665600$ 為例：

	商	實	益廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		4665600	8640	652320				
B	100	4665600	8640	652320	-516320			
C	100	56297600	8640	652320	-516320			
D	100	56297600	8640	652320		4000000	60000	400
E	120	56297600	8640	652320	2814880	4000000	60000	400
F	120	0	8640	652320	2814880			

	說明		
B	初商 100 $100^3-(8640\times100+652320)=-516320$	E	次商 20 $20^3+400\times20^2+60000\times20+4000000-[8640\times(2\times100+20)+652320]=2814880$
C	$46656000-(-516320)\times100=56297600$		
D	$4\times1000000=4000000$　$6\times100^2=60000$ $4\times100=400$	F	$56297600-2814880\times20=0$

(四)從廉減從方負隅開三乘方法($ax^4-bx^3+dx=s$)：以三次項減一次項，而無二次項，解題如下：

	商	實	隅	從二廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		s	a	b	d				
B	x_1	s	a	b	d	$ax_1^3+(d-bx_1^2)$			
C	x_1	$s-[ax_1^3+(d-bx_1^2)]x_1$	a	b	d	$ax_1^3+(d-bx_1^2)$			
D	x_1	$s-[ax_1^3+(d-bx_1^2)]x_1$	a	b	d		$4ax_1^3$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
E	x_1+x_2	$s-[ax_1^3+(d-bx_1^2)]x_1$	a	b	d	$ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax_1^3+[d-bx_1^2-b\times(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]$	$4ax_1^3$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
F	x_1+x_2	$s-[ax_1^3+(d-bx_1^2)]x_1-\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax_1^3+[d-bx_1^2-b\times(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}x_2$	a	b	d	$ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax_1^3+[d-bx_1^2-b\times(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]$			

	說明
A	置所得三乘方積為實　以從方廉約之初商
B	初商 x_1　置一於左上為法　置一自之以乘從廉　以減從方　置一自乘再乘　以隅筭因之為隅法　併從方為下法
C	下法　與上法相乘除實
D	四因隅法為方法　初商自之六因又以隅因為上廉　初商四因隅因為下廉
E	次商 x_2　置一於左次為上法　倍初商加次商　又併初次商乘之　以乘從廉　以減餘從　餘為從方　置一乘上廉　置一自之以乘下廉　置一自乘再乘為隅法　併方法從廉隅為下法
F	下法　與上法相乘除實盡

第一次出現在第三卷第二十二題，以解

$2160x^4-444960x^3+10628820000x=717445350000$ 爲例：

	商	實	隅	從二廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		717445350000	2160	444960	10628820000				
B	80	717445350000	2160	444960	10628820000	8886996000			
C	80	6485670000	2160	444960	10628820000	8886996000			
D	80	6485670000	2160	444960	10628820000		4423680000	82944000	691200

E	81	6485670000	2160	444960	10628820000	6485670000	4423680000	82944000	691200
F	81	0	2160	444960	10628820000	6485670000			

	說		明
B	初商 80 $2160\times80^3+(10628820000-444960\times80^2)$ $=8886996000$	E	次商 1 $2160\times1^3+691200\times1^2+82944000\times1+4423680000$ $+[7781076000-444960\times(2\times80+1)(80+1)]$ $=6485670000$
C	$717445350000-8886996000\times80=6485670000$		
D	$4\times2160\times80^3=4423680000$ $6\times2160\times80^2=82944000$　$4\times2160\times80=691200$	F	$6485670000-6485670000\times1=0$

(五)帶從廉負隅以廉隅添積開三乘方法($cx^2+dx=s+ax^4+bx^3$)：以四次項及三次項添入原積中，解題過程如下：

	商	實	虛隅	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		s	a	b	c	d				
B	x_1	$s+(ax_1^3+bx_1^2)x_1$	a	b	c	d	cx_1+d			
C	x_1	$s+(ax_1^3+bx_1^2)x_1-(cx_1+d)x_1$	a	b	c	d	cx_1+d			
D	x_1	$s+(ax_1^3+bx_1^2)x_1-(cx_1+d)x_1$	a	b	c	d		$4ax_1^3$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
E	x_1+x_2	$s+(ax_1^3+bx_1^2)x_1-(cx_1+d)x_1+\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+b[x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}x_2$	a	b	c	d	$c(2x_1+x_2)+d$	$4ax_1^3$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
F	x_1+x_2	$s+(ax_1^3+bx_1^2)x_1-(cx_1+d)x_1+\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+b[x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}x_2$	a	b	c	d	$c(2x_1+x_2)+d$			
G	x_1+x_2	$s+(ax_1^3+bx_1^2)x_1-(cx_1+d)x_1+\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+b[x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}x_2-[c(2x_1+x_2)+d]x_2$	a	b	c	d		$4a(x_1+x_2)^3$	$6a(x_1+x_2)^2$	$4a(x_1+x_2)$
H	$x_1+x_2+x_3$	$s+(ax_1^3+bx_1^2)x_1-(cx_1+d)x_1+\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+b[x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}x_2-[c(2x_1+x_2)+d]x_2+\{ax_3^3+4a(x_1+x_2)x_3^2+6a(x_1+x_2)^2+4a(x_1+x_2)^3+b[(2x_1+2x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)+(x_1+x_2)^2]\}x_3$	a	b	c	d	$c(2x_1+2x_2+x_3)+d$	$4a(x_1+x_2)^3$	$6a(x_1+x_2)^2$	$4a(x_1+x_2)$
I	$x_1+x_2+x_3$	$s+(ax_1^3+bx_1^2)x_1-(cx_1+d)x_1+\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4$	a	b	c	d	$c(2x_1+2x_2+x_3)+d$			

		$ax^3+b[x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}x_2-[c(2x_1+x_2)+d]x_2+\{ax_3^3+4a(x_1+x_2)x_3^2+6a(x_1+x_2)^2+4a(x_1+x_2)^3+b[(2x_1+2x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)+(x_1+x_2)^2]\}x_3-[c(2x_1+2x_2+x_3)+d]x_3$								

	說明
A	置所得三乘方積為實 列從方從一廉從二益廉 约商
B	初商 x_1 置一於左上為法 置一自之以乘益廉 置一自乘再乘以隅筭因之為隅法併益廉 與上法相乘為益實 添入積内為通實 置一乘從一廉為益從 併入從方為下法
C	下法與上法相乘除實 餘實為次商之實
D	四因隅法為方法 初商自之六因又以隅筭因之為上廉 初商四之隅因為下廉
E	次商 x_2 置一於左次為上法 倍初商加次商 併初次商 相乘 又加初商自之 以乘從二益廉為益廉之實 置一乘上廉 置一自之 以乘下廉 置一自乘再乘 隅因為隅法 併方廉隅為益隅之實 與益廉之實相併為益積之法 與上次法相乘為益積之實 添入餘實為通實 倍初商加次商 以乘從一廉為益從 併入從方為下法
F	下法與上次法相乘除實 餘為三商之實
G	二因上廉 三因下廉 四因隅法 併入方法為方法 併初次商自之 又六因 以隅筭因之為上廉 併初次商四之 以隅因為下廉
H	三商 x_3 置一於左上為法 倍初次商加三商 併初次商加三商 相乘 又以初次商併自之加之 以乘從二益廉為益廉之實 置一乘上廉 置一自之以乘下廉 相併為廉法 置一自乘再乘 以隅因之為隅法 併方法廉法隅法為益隅之實 併益廉之實為益積之法 與上法相乘為益積 添入餘實為通實 倍初次商加三商 以乘從一廉為益從 併從方為下法
I	下法 與上法相乘除實盡

在第四卷第三題首次出現，以解 $184960x^2+53453440x=8552550400+2x^4+578x^3$ 爲例：

	商	實	虛隅	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		8552550400	2	578	184960	53453440				
B	100	9330550400	2	578	184960	53453440	71949440			
C	100	2135606400	2	578	184960	53453440	71949440			
D	100	2135606400	2	578	184960	53453440		8000000	120000	800
E	130	3198692400	2	578	184960	53453440	95994240	8000000	120000	800
F	130	318865200	2	578	184960	53453440	95994240			
G	130	318865200	2	578	184960	53453440		17576000	202800	1040
H	136	615916800	2	578	184960	53453440	102652800	17576000	202800	1040
I	136	0	2	578	184960	53453440	102652800			

	說		明
B	初商 100 $8552550400+(2\times100^3+578\times100^2)\times100$ $=9330550400$ $184960\times100+53453440=71949440$	F	$3198692400-95994240\times30=318865200$
		G	$2\times4\times(100+30)^3=17576000$ $2\times6\times(100+30)^2=202800$ $2\times4\times(100+30)=1040$

C	9330550400-771949440×100=2135606400	H	三商 6 $318865200+\{2\times6^3+1040\times6^2+202800\times6+1757600+578[(2\times130+6)(130+6)+130^2]\}\times6=615916800$ 184960×(2×130+6)+53453440=102652800
D	$2\times4000000=8000000$　$2\times6\times100^2=120000$ 2×4×100=800		
E	次商 30 $2135606400+\{2\times30^3+800\times30^2+120000\times30+8000000+578[(200+30)(100+30)+100^2]\}\times30$ =3198692400 184960×(200+30)+53453440=95994240	I	615916800-102652800×6=0

又為帶從負隅以廉隅減從開三乘方法($-ax^4-bx^3+cx^2+dx=s$)：以四次項及三次項減一次項，解題如下：

	商	實	虛隅	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		s	a	b	c	d				
B	x_1	s	a	b	c	d	$cx_1+d-(ax_1^3+bx_1^2)$			
C	x_1	$s-[(cx_1+d)-(ax_1^3+bx_1^2)]x_1$	a	b	c	d	$cx_1+d-(ax_1^3+bx_1^2)$			
D	x_1	$s-[(cx_1+d)-(ax_1^3+bx_1^2)]x_1$	a	b	c	d		$4ax_1^3$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
E	x_1+x_2	$s-[(cx_1+d)-(ax_1^3+bx_1^2)]x_1$	a	b	c	d	$c(2x_1+x_2)+d-\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+b[x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}$	$4ax_1^3$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
F	x_1+x_2	$s-[(cx_1+d)-(ax_1^3+bx_1^2)]x_1-\{c(2x_1+x_2)+d-\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+b[x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}\}x_2$	a	b	c	d	$c(2x_1+x_2)+d-\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+b[x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}$			
G	x_1+x_2	$s-[(cx_1+d)-(ax_1^3+bx_1^2)]x_1-\{c(2x_1+x_2)+d-\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+b[x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}\}x_2$	a	b	c	d		$4a(x_1+x_2)^3$	$6a(x_1+x_2)^2$	$4a(x_1+x_2)$
H	$x_1+x_2+x_3$	$s-[(cx_1+d)-(ax_1^3+bx_1^2)]x_1-\{c(2x_1+x_2)+d-\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+b[x_2^2+($	a	b	c	d	$c(2x_1+2x_2+x_3)+d-\{ax_3^3+4a(x_1+x_2)x_3^2+6a(x_1+x_2)^2+4a(x_1+x_2)^3$	$4a(x_1+x_2)^3$	$6a(x_1+x_2)^2$	$4a(x_1+x_2)$

		$2x_1+x_2)(x_1+x_2)]]\}x_2$					$+b[(2x_1+2x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)+(x_1+x_2)^2]]\}$			
I	$x_1+x_2+x_3$	$s-[(cx_1+d)-(ax_1^3+bx_1^2)]x_1-\{c(2x_1+x_2)+d-\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+b[x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]]\}\}x_2-\{c(2x_1+2x_2+x_3)+d-\{ax_3^3+4a(x_1+x_2)x_3^2+6a(x_1+x_2)^2+4a(x_1+x_2)^3+b[(2x_1+2x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)+(x_1+x_2)^2]]\}\}x_3$	a	b	c	d	$c(2x_1+2x_2+x_3)+d-\{ax_3^3+4a(x_1+x_2)x_3^2+6a(x_1+x_2)^2+4a(x_1+x_2)^3+b[(2x_1+2x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)+(x_1+x_2)^2]]\}$			

	說明
A	置所得三乘方積為實 列從方從一廉從二益廉 约商
B	初商 x_1 置一於左上為法 置一自之 以乘從二廉為減廉 置一自乘再乘 又以隅因為隅法 併減廉隅法為減從 置一乘從一廉為益從 以益從加入原從 以減從減之餘為下法
C	下法與上法相乘除實 餘實為次商之實
D	四因隅法為方法 初商自之六因又以隅筭因之為上廉 初商四之隅因為下廉
E	次商 x_2 置一於左上為法 倍初商加次商 併初次商 相因 又加初商自乘 以乘從二廉為減廉 置一乘上廉 置一自之以乘下廉 置一自乘再乘隅因為隅法 併方廉隅為減隅 併減廉減隅為減從 倍初商加次商 以乘從一廉為益從 以加原從 以減從減之 餘為下法
F	下法與上次法相乘除實 餘為三商之實
G	二因上廉 三因下廉 四因隅法 併入方法為方法 併初次商自之 又六因 以隅筭因之為上廉 併初次商四之 以隅因為下廉
H	三商 x_3 置一於左次為上法 倍初次商加三商 併初次三商 相因 又加初次商相併自之 以乘從二廉為減廉 置一乘上廉 置一自之以乘下廉 置一自乘再乘以隅因為隅法 併方廉隅為減隅 減廉減隅相和為減從 倍初次加三商 以乘從一廉為益從 以加原從 以減從減之餘為下法
I	下法 與上法相乘除實盡

出現在第四卷第三題，以該題解$-2x^4-578x^3+184960x^2+53453440x=8552550400$ 爲例：

	商	實	虛隅	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		8552550400	2	578	184960	53453440				
B	100	8552550400	2	578	184960	53453440	64169400			
C	100	2135606400	2	578	184960	53453440	64169400			
D	100	2135606400	2	578	184960	53453440		8000000	120000	800
E	130	2135606400	2	578	184960	53453440	61558040	8000000	120000	800
F	130	318865200	2	578	184960	53453440	61558040			
G	130	318865200	2	578	184960	53453440		17576000	202800	1040
H	136	318865200	2	578	184960	53453440	53144200	17576000	202800	1040
I	136	0	2	578	184960	53453440	53144200			
	說明									

B	初商 100 $184960\times100+53453440-(2\times100^3+578\times100^2)$ $=64169400$	F	$2135606400-61558040\times30=318865200$
C	$8552550400-64169400\times100=2135606400$	G	$2\times4\times(100+30)^3=17576000$ $2\times6\times(100+30)^2=202800$ $2\times4\times(100+30)=1040$
D	$2\times4000000=8000000$　$2\times6\times100^2=120000$ $2\times4\times100=800$	H	三商 6 $184960\times(2\times130+6)+53453440-\{2\times6^3+1040\times6^2+202800\times6+1757600+578\times[(2\times130+6)(130+6)+130^2]\}=53144200$
E	次商 30 $184960\times(200+30)+53453440-\{2\times30^3+800\times30^2+120000\times30+8000000+578\times[(200+30)(100+30)+100^2]\}=61558040$	I	$615916800-102652800\times6=0$

(六)帶從負隅以二廉減從方開三乘方法(帶上廉負隅以下廉減從開三乘方法)($ax^4-bx^3+cx^2+dx=s$)：以三次項減一次項，故三次項係數爲負數，其餘爲正數，解題如下：

	商	實	虛隅	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		s	a	b	c	d				
B	x_1	s	a	b	c	d	$ax_1^3+cx_1+(d-bx_1^2)$			
C	x_1	$s-[ax_1^3+cx_1+(d-bx_1^2)]x_1$	a	b	c	d	$ax_1^3+cx_1+(d-bx_1^2)$			
D	x_1	$s-[ax_1^3+cx_1+(d-bx_1^2)]x_1$	a	b	c	d		$4ax_1^3$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
E	x_1+x_2	$s-[ax_1^3+cx_1+(d-bx_1^2)]x_1$	a	b	c	d	$ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+c(2x_1+x_2)+[d-bx_1^2-b(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]$	$4ax_1^3$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
F	x_1+x_2	$s-[ax_1^3+cx_1+(d-bx_1^2)]x_1-\{ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+c(2x_1+x_2)+[d-bx_1^2-b(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]\}x_2$	a	b	c	d	$ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+4ax^3+c(2x_1+x_2)+[d-bx_1^2-b(2x_1+x_2)(x_1+x_2)]$			

	說明
A	置所得三乘方實 以廉隅從方约之
B	初商 x_1 置一於左上為法 置一自之以乘從二廉為減廉 以減從方 餘為從方 置一乘第一廉為益廉 置一自乘再乘又以隅因之為隅法 併從方益廉隅法為下法
C	下法 與上法相乘除實餘實為次商之實
D	四因隅法為方法 初商自之六因又以隅法因之為上廉 初商四之隅因為下廉

E	次商 x_2 置一於左上為法 倍初商加次商 以乘從二廉 併初次商因之為減廉 以減餘從為從方 倍初商加次商以乘第一廉為益廉 置一乘上廉 置一自之以乘下廉 置一自乘再乘又以隅因之為隅法 併方法從方廉益上下廉隅法為下法
F	下法與上次法相乘除實盡

第一次出現在第四卷第七題，以解 $2x^4-640x^3+4480x^2+47001600x=5013504000$ 爲例：

	商	實	虛隅	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		5013504000	2	640	4480	47001600				
B	100	5013504000	2	640	4480	47001600	43049600			
C	100	708544000	2	640	4480	47001600	43049600			
D	100	708544000	2	640	4480	47001600		8000000	120000	800
E	120	708544000	2	640	4480	47001600	35427200	8000000	120000	800
F	120	0	2	640	4480	47001600	35427200			

	說		明
B	初商 100 $2\times100^3+4480\times100+(47001600-640\times100^2)$ $=43049600$	E	次商 20 $2\times20^3+800\times20^2+120000\times20+8000000+4480\times(2\times100+20)+[40601600-640\times(2\times100+20)(100+20)]=35427200$
C	$5013504000-43049600\times100=708544000$		
D	$2\times4000000=8000000$ $2\times6\times100^2=120000$ $2\times4\times100=800$	F	$708544000-35427200\times20=0$

(七)帶從方上廉以下廉減從開三乘方法($x^4-bx^3+cx^2+dx=s$)：上廉即從一廉，下廉爲從二廉，故三次項係數爲負數，其餘爲正數，過程如下：

	商	實	從二廉	從一廉	從方	下法	說明
A		s	b	c	d		
B	x_1	s	b	c	d	$x_1^3+cx_1+(d-bx_1^2)$	初商 x_1 置一於左上為法 置一自之 以乘從二廉為減廉 以減從方餘為從方 置一乘第一廉為益廉 置一自乘再乘為隅法 併從方益廉隅法為下法
C	x_1	$s-[x_1^3+cx_1+(d-bx_1^2)]x_1$	b	c	d	$x_1^3+cx_1+(d-bx_1^2)$	下法 與上法相乘 除實盡

首次出現在第四卷第十三題，以解 $x^4-332x^3+27556x^2+462400x=30518400$ 爲例：

	商	實	從二廉	從一廉	從方	下法	說明
A		30518400	332	27556	462400		
B	30	30518400	332	27556	462400	1017280	$30^3+27556\times30+(462400-332\times30^2)=1017280$
C	30	0	332	27556	462400	1017280	$30518400-1017280\times30=0$

(八)帶一廉負隅減從以二廉益從開三乘方法($-ax^4+bx^3-cx^2+dx=s$)，即爲帶從二廉減從翻法開三乘方法(帶一廉以從二廉益從減從爲法翻法開三乘方)(第五卷第八題)

(九)帶從益廉以二廉減從開三乘方法(又爲帶從方廉以二廉添積開三乘方法)

($x^4+cx^2+dx=s+bx^3$)，即帶從方上廉以下廉減從開三乘方法。(第五卷第十三題)

(十)帶從方負隅單位開三乘方法($ax^4+bx^3+cx^2+dx=s$)：其中「單位」不知何意義，解題如下：

	商	實	隅	從二廉	從一廉	從方	下法	說明
A		s	a	b	c	d		置所得三乘方實以廉隅約之
B	x_1	s	a	b	c	d	$ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d$	初商 x_1 置一於左上為法 置一自之以乘從二廉 置一自乘再乘 以隅因之為隅法 併從方一廉二廉隅法為下法
C	x_1	$s-(ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d)x_1$	a	b	c	d	$ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d$	下法 與上法相乘 除實盡

出現在第六卷第三題，其最高次係數爲分數，以解

$\frac{1}{4}x^4+1600x^3+48320x^2+18534400x=2621440000$ 爲例：

	商	實	隅	從二廉	從一廉	從方	下法	說明
A		2621440000	$\frac{1}{4}$	1600	48320	18534400		
B	80	2621440000	$\frac{1}{4}$	1600	48320	18534400	32768000	$\frac{1}{4}\times80^3+1600\times80^2+48320\times80+18534400=32768000$
C	80	2621440000	$\frac{1}{4}$	1600	48320	18534400	32768000	$2621440000-32768000\times80=0$

(十一)帶從方廉負隅以二廉減從翻法開三乘方法(帶從方負隅以二廉添積開三乘方法)，同帶從負隅以二廉減從方開三乘方法，惟其過程中出現負積及負從，故名爲「翻法」。 (第六卷第八題)

(十二)帶從方廉隅筭以二廉減從開三乘方法(又爲帶從方廉隅以二廉添積開三乘方法)(第八卷第一題)($ax^4-bx^3+cx^2+dx=s$)，同帶從負隅以二廉減從方開三乘方法。

(十三)帶從廉隅添積開三乘方法(帶從方一廉添積以二廉爲法開三乘方法)($bx^3=s+ax^4+cx^2+dx$)：只以三次項爲法，其餘各項均添入原積中，過程如下：

	商	實	虛隅	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		s	a	b	c	d				
B	x_1	$s+(ax_1^3+cx_1+d)x_1$	a	b	c	d	bx_1^2			
C	x_1	$s+(ax_1^3+cx_1+d)x_1-bx_1^3$	a	b	c	d	bx_1^2			
D	x_1	$s+(ax_1^3+cx_1+d)x_1-bx_1^3$	a	b	c	d		$4ax_1^3+d$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
E	x_1+x_2	$s+(ax_1^3+cx_1+d)x_1-bx_1^3+(ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+cx_2+2cx_1+4ax_1^3+d)x_2$	a	b	c	d	$bx_2^2+3bx_1x_2+3bx_1^2$	$4ax_1^3+d$	$6ax_1^2$	$4ax_1$
F	x_1+x_2	$s+(ax_1^3+cx_1+d)x_1-bx_1^3+(ax_2^3+4ax_1x_2^2+6ax_1^2x_2+cx_2+2cx_1+4ax_1^3+d)x_2-(bx_2^2+3bx_1x_2+3bx_1^2)x_2$	a	b	c	d	$bx_2^2+3bx_1x_2+3bx_1^2$			

	說明
A	所得三乘方實以從方從廉隅法约之
B	初商 x_1 置一於左上為法 置一乘從一廉為益廉 置一自乘再乘以隅筭因為隅法 併從方益廉 以初商因之為益積 添入原積為通實 置一自之以乘從二廉為下法
C	下法 與上法相乘除實 餘為次商之實
D	二因益廉為從一廉之方 三因從二廉為從二廉之方 三之初商以乘原從二廉為從二廉之廉 四因隅法 併從方為方法 初商自之六因又隅因之為上廉 初商四之隅因為下廉
E	次商 x_2 置一於左上為法 置一乘原從一廉為從一廉之廉 併從一廉之方為益廉之實 置一乘上廉 置一自之以乘下廉 置一自乘再乘 隅因為隅法 併方上下廉隅 又加益廉之實 以次商因之為益實 加入次實為通實 置一乘從二廉之廉 置一自之以乘從二廉為從二廉之隅 併從二廉之方隅為下法
F	下法與上次法相乘除實盡

出現在第九卷第一題，以解 $15792x^3=553190400+63x^4+562520x^2+46428480x$ 爲例：

	商	實	虛隅	從二廉	從一廉	從方	下法	方法	上廉	下廉
A		553190400	63	15792	562520	46428480				
B	100	17121238400	63	15792	562520	46428480	157920000			
C	100	1329238400	63	15792	562520	46428480	157920000			
D	100	1329238400	63	15792	562520	46428480		298428480	3780000	25200
E	120	11496576000	63	15792	562520	46428480	574828800	298428480	3780000	25200
F	120	0	63	15792	562520	46428480	574828800			

	說		明
B	初商 100 $553190400+(63\times100^3+562520\times100+464284800)\times100=17121238400$ $15792\times100^2=157920000$	E	次商 20 $1329238400+(63\times20^3+25200\times20^2+3780000\times20+562520\times20+11250400+29842840)\times20=1149657600$ $15792\times20^2+4737600\times20+473760000=574828800$
C	$17121238400-157920000\times100=1329238400$		
D	$2\times562520\times100=112504000$ $3\times15792\times100^2=473760000$ $3\times100\times15792=4737600$ $4\times63\times100^3+46428480=298428480$ $6\times63\times100^2=3780000$ $4\times63\times100=25200$	F	$1149657600-574828800\times20=0$

以現在的四次方程式而言，顧應祥已經解了 $x^4+bx^3+cx^2+dx=s$、$-ax^4+bx^3-cx^2+dx=s$、$x^4=s+cx^2+dx$($x^4-cx^2-dx=s$)、$ax^4-bx^3+dx=s$、$cx^2+dx=s+ax^4+bx^3$ ($-ax^4-bx^3+cx^2+dx=s$)、$ax^4-bx^3+cx^2+dx=s$、$x^4-bx^3+cx^2+dx=s$、$ax^4+bx^3+cx^2+dx=s$、$bx^3=s+ax^4+cx^2+dx$ 這些題型的四次方程式，以當時數學的發展實屬不易，雖其方法不如增乘開方法，但亦以傳統方法解出四次方程式，已屬難得。

第六節　顧應祥的開方論

顧應祥在《測圓海鏡分類釋術》中因無法理解天元術，而補入了各種開方細草，似有捨本逐末之憾。乃至阮元《疇人傳》曰：「略涉九九者，欲三乘方便望洋興嘆。應祥於廉隅加減之故，反復推之，而無不合，其用功亦勤矣。然不解立天元術，故於正負開方，論說都不明曉。明代算學陵替，習之者鮮。雖好學深思如應祥，其所造終未能入奧室也。」明龐嵩序曰：「翁復示測圓術一編，躍然如蔀之有牖，瞽之有相。」《讀書敏求記校證》曰：「捨其本而求其末，不知妄作之罪，應祥實無可辭焉。」

事實上，在明代如顧應祥這樣的數學家，也十分難得了。到明代末年，宋元以前的數學書，找一本都很不容易。數學的落後，責在社會制度，顧應祥能以繁雜的帶縱諸方解天元一題「反復推之，而無不合」。「應祥所演諸乘方之式，亦可為求天元一法者之一云。」[11]亦說明他已將天元方程式解出，雖比不上宋元「增乘開方法」簡潔，但可提供他人在解方程式時的另一種方法。尤其他將三十六種

[11] 〈測圓海鏡分類釋術提要〉，《中國歷代算學集成》頁 1126。

開方法一一詳細列出，雖其中有些許錯誤，但對明代的數學家而言，能詳解如此多形式的方程式已不多了。