

## 第二章 骨牌在平面上直線傾倒之運動模型

本論文是以多米諾骨牌為主題，提出自行設計的實驗方式進行測量，再利用程式做數據模擬並分析比較；但是實驗也是需要理論作為基礎，因此本章主要是建立多米諾骨牌運動的理論模型。其實這種效應的物理原理大概的原則是：骨牌豎著的時候，其重心較高，當其倒下時重心會下降，然而在倒下的過程中，其重力位能轉化為轉動動能，當它碰撞在第二塊骨牌時，這個轉動動能就會轉移到第二塊骨牌上，第二塊骨牌將第一塊骨牌轉移來的動能扣除碰撞損失的和它自己倒下過程中，由本身具有的重力位能轉化來的動能之和，再傳到第三張牌上，以此模式傳播下去，將會達成穩定傳播的情況[6]。而本章將分成四節，針對每塊骨牌運動部分，以不同的觀點做詳盡的探討，第一節以平面骨牌直線傾倒運動的限制條件為主題切入探討，並提出其兩兩骨牌運動之間的關係式；第二節以轉動的觀點出發，探討骨牌傾倒運動中轉動的部分，並推導出傳播速度的方程式；第三節以碰撞的觀點出發，討論兩塊骨牌之間碰撞的部份，探討其動量的變化情況；第四節由骨牌傳播的觀點出發，討論骨牌運動中展現孤立子(Soliton)現象。以上這四節為我們本章探討重點，且理論基礎主要參考 J. M. J. van Leeuwen 的 “The Domino Effect” 所寫出，並由此基礎延伸到後續章節的分析與討論。

## 第一節 平面上骨牌直線傾倒運動的限制條件

此節我們由觀察基本的骨牌碰撞運動，且在假設每塊骨牌都是以固定支點純轉動的條件下來討論骨牌運動基本的限制條件，其骨牌運動的狀態如下圖 2-1 所示[7][8]。

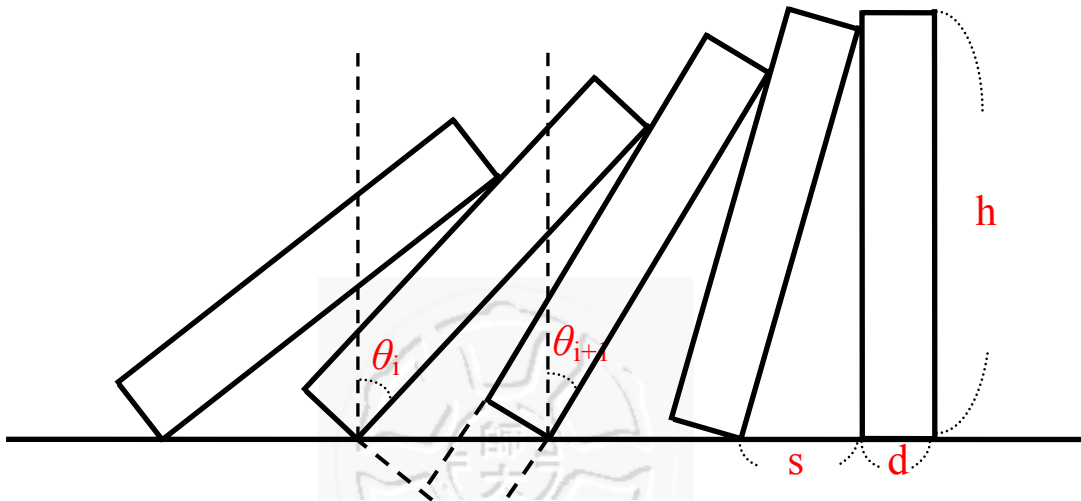


圖 2-1：骨牌運動狀態圖

其圖形表示骨牌在運動狀態中某時刻 $t$  ( $t > 0$ )下，骨牌瞬間的狀態圖，我們討論當第 $i$ 塊骨牌碰撞第 $i+1$ 塊骨牌時，其對應的角度分別為 $\theta_i$ 與 $\theta_{i+1}$ ，利用在 $t$ 時刻下，兩塊骨牌的質心在相同高度下，具有相同的重力位能，因此我們可得方程式(2-1-1)。

$$h \sin(\theta_i - \theta_{i+1}) = (s + d) \cos \theta_{i+1} - d \quad (2-1-1)$$

由方程式(2-1-1)這個關係式，它可以讓我們取代第 $i+1$ 塊骨牌，用類似於第 $i$ 塊骨牌的行為。藉由這個關係，我們用下一個 $\theta_{i+1}$ 來表示

傾斜角 $\theta_i$ ，因此所有前面的傾斜角我們可以由一個 $\theta_n$ 的觀點來表示，藉由這個循環的關係，我們定義方程式(2-1-2)。

$$\theta_i = p_{n-i}(\theta_n) \quad (2-1-2)$$

方程式(2-1-2)在另一方面表示傾斜角 $\theta_i$ 與它前面 $n-i$ 塊骨牌的個別角度的有關，因此 $P_j(\theta)$ 滿足方程式(2-1-3)。

$$p_j(\theta) = p_{j-1}(\theta) + \sin^{-1} \left( \frac{(s+d)\cos p_{j-1}(\theta) - d}{h} \right) \quad (2-1-3)$$

且起始方程的 $P_0(\theta) = \theta$ ，且起始角度 $\theta$ 在碰撞到下一塊骨牌前的範圍條件是 $0 < \theta < \theta_c$ ，而 $\theta_c$ 的角度是指剛好碰撞到下一塊骨牌的角度，即方程式(2-1-4)式表示，並稱 $\theta_c$ 為“距離角度”。

$$\theta_c = \arcsin \left( \frac{s}{h} \right) \quad (2-1-4)$$

接著我們可以由圖 2-1 看出，骨牌倒下時緊貼下一塊骨牌的最大角度為 $\theta_\infty$ ，可由方程式(2-1-1)左項為零時，可以得出方程式(2-1-5)，我們稱 $\theta_\infty$ 為“堆疊角度”。

$$\cos \theta_\infty = \frac{d}{s+d} \quad (2-1-5)$$

由圖形 2-1 一樣可以看出方程式 $P_j(\theta)$ 是單一性的遞增方程式，這些方程式直接地相關，不緊緊只有方程式(2-1-3)所表示的關係。我們也可以藉由 $P_{n-i}$ 關係把 $\theta_n$ 之前面系列的角度來推算角度 $\theta_i$ ，即表示藉由 $P_{K-i}$ 關係式可得到任意一個中間 $\theta_k$ ，我們由方程式(2-1-6)表示之。

$$p_{n-i}(\theta) = p_{k-i}(p_{n-k}(\theta)) \quad (2-1-6)$$

一個更簡單的方式，我們可以把 $P_1(0) = \theta_c$ 帶入方程式(2-1-6)可得到方程式(2-1-7)。

$$p_j = p_{j-1}(p_1(0)) = p_{j-1}(\theta_c) \quad (2-1-7)$$

以上我們已經討論完角度之間的關係轉換，接下來我們討論角速度之間的關係。我們都知道角速度 $\omega_i = \frac{d\theta_i}{dt}$ ，接著我們利用連鎖率可得 $\omega_i = \frac{d\theta_i}{d\theta_n} \cdot \frac{d\theta_n}{dt} = w_{n-i} \omega_n$ ，我們定義 $w_{n-i} = \frac{d\theta_i}{d\theta_n}$ 為關係常數，由此我們可以得到 $w_j(\theta) = \frac{dp_j(\theta)}{d\theta}$ ，這個關係式使我們容易的求得 $w_j$ ，接著我們把方程式(2-1-3)微分後再用 $\theta_n$ 的關係式來轉換，可得方程式(2-1-8)。

$$w_j(\theta) = w_{j-1}(\theta) \left( 1 - \frac{(s+d) \sin p_j(\theta)}{h \cos[p_j(\theta) - p_{j-1}(\theta)]} \right) \quad (2-1-8)$$

另一個有用的關係式是把(2-6)微分後得到方程式(2-9)，在由 $P_1(0) = \theta_c$

$$\omega_j(\theta) = \omega_{j-1}(p_1(\theta)) \omega_1(\theta) \quad (2-1-9)$$

且 $w_1(0) = 1$ ，可推得 $\omega_j(0) = \omega_{j-1}(\theta_c)$ 。以上這些關係式把骨牌運動狀態中的一些限制轉換成角度與角速度之間的關係式，在下面幾節的探討中將會中一一的運動到這些關係。

## 第二節 骨牌傾倒運動中轉動部分的探討

此節我們討論假設在沒有摩擦力的作用下，兩塊骨牌間的碰撞下的能量守恆情況，其能量包含了位能與動能兩個部分[7]。在位能的部分，我們以骨牌底座的平面當作零位面，因此質心的重力位能如方程式(2-2-1)所示，其中 $H_n(\theta_n)$ 為高度的等效比例量值。

$$H_n(\theta_n) = \sum_i^n \left[ \cos \theta_i + \left( \frac{d}{h} \right) \cdot \sin \theta_i \right] \quad (2-2-1)$$

在動能方面我們只考慮骨牌的轉動動能，因此我們可得到方程式(2-2-2)，其中 $m$ 為骨牌的質量， $I$ 為轉動慣量， $K_n(\theta_n, \omega_n)$ 為轉動動能。

$$I = \left( \frac{1}{3} \right) \cdot m(h^2 + d^2), \quad K_n(\theta_n, \omega_n) = \left( \frac{I}{2} \right) \sum_i^n \omega_i^2 \quad (2-2-2)$$

接著利用(2-2-1)與(2-2-2)我們可以寫下總能方程式如(2-2-3)式所示。

$$E_n = \frac{1}{2} m g h e_n = \frac{1}{2} m g h \cdot \left( H_n(\theta_n) + \frac{I}{m g h} I_n(\theta_n) \omega_n^2 \right) \quad (2-2-3)$$

其中 $e_n$ 為間隔 $n$ 下的等效能量常數， $I_n(\theta_n)$ 為轉動慣量的等效比例量值，我們定義關係式為 $I_n(\theta_n) = \sum_j^n w_j^2(\theta_n)$ 。在(2-2-3)式中，我們提出

$\frac{m g h}{2}$ 項可以使右項括號內的係數 $\frac{I}{m g h}$ 提供一個時間因次給係數 $\omega_n$ 。

我們利用這些因次的關係我們可以計算出骨牌傳播的真實速度，首先我們把(2-2-3)式表示成以 $\omega_n(\theta_n)$ 為主的方程式如(2-2-4)式。

$$\omega_n(\theta_n) = \left( \frac{e_n - H_n(\theta_n)}{I_n(\theta_n)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-2-4)$$

接著再利用 $\theta_n$ 對時間的微分關係可以得到(2-2-5)式。

$$\frac{d\theta_n(t)}{dt} = \omega_n(\theta_n) \quad (2-2-5)$$

已知 $\theta_n$ 的時間範圍是從 $0 \sim \theta_c$ ，因此我們將(2-2-5)式積分可得到(2-2-6)式。

$$t_n = \int_0^{\theta_c} \frac{d\theta_n}{\omega_n(\theta_n)} \quad (2-2-6)$$

在這個 $t_n$ 時間的範圍內，骨牌向前傳播了 $s + d$ 的距離，因此我們知到 $\frac{(s+d)}{t_n}$ 的比率為骨牌行進的速率。接著我們把前面談到的方程式(2-2-2)、(2-2-3)、(2-2-4)、(2-2-5)、(2-2-6)五式整理後，我們得到最後的骨牌傳播速率 $v_{as}$ 為(2-2-7)式所示。

$$v_{as} = \sqrt{gh} \cdot \left( \frac{3}{1 + d^2/h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{s+d}{h} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \quad (2-2-7)$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n}$ 項是 $\int_0^{\theta_c} \left( \frac{I_n(\theta_n)}{e_n - H_n(\theta_n)} \right) d\theta_n$ 的積分結果定義，它是一個沒有

因次的積分項，在此我們定義此項為一個等效常數 $K_{\text{effect}}$ 。因此改寫(2-2-7)式，成為最後的骨牌速度公式，如(2-2-8)式所示。

$$v_{as} = \sqrt{gh} \cdot \left( \frac{3}{1+d^2/h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{s+d}{h} \cdot K_{effect}, \quad \text{其中 } K_{effect} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \quad (2-2-8)$$

由(2-2-8)式可以幫助我們推算骨牌向前傳播的速度，因此在第四章中我們會比較由理論求得的骨牌傳播速度與實驗測量到的骨牌傳播速度，並且討論之間的異同做出結論。



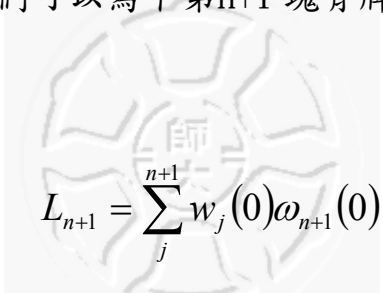
### 第三節 兩塊骨牌之間碰撞部份的探討

此節我們將由骨牌碰撞觀點來討論骨牌之間的角動量變化情況 [7][9]。我們可以想像當骨牌在傾倒時，在極短的時間內，第n塊骨牌碰撞第n+1塊，此時第n+1塊骨牌具有角速度 $\omega_{n+1}(0)$ 。接著我們假設在角動量守恆的條件下，碰撞前第n塊的角動量 $L_n$ ，可由(2-3-1)式所表示。

$$L_n = \sum_j^n w_j(\theta_c) \omega_n(\theta_c) \quad (2-3-1)$$

在骨牌碰撞後，我們可以寫下第n+1塊骨牌的角動量 $L_{n+1}$ 如(2-3-2)

式所示。


$$L_{n+1} = \sum_j^{n+1} w_j(0) \omega_{n+1}(0) \quad (2-3-2)$$

在角動量守恆的情況下，我們的知這(2-3-1)與(2-3-2)兩式相等，由整理而得出(2-3-3)式。

$$\omega_{n+1}(0) = \omega_n(\theta_c) \frac{\sum_j^n w_j(\theta_c)}{\sum_j^{n+1} w_j(0)} \quad (2-3-3)$$

這個方程式有助於我們估算總能量等效係數 $e_{n+1}$ ，並整合下一個骨牌的開始。接著我們來看第0塊骨牌，它的起始狀態是鉛直地立著，並具有角速度 $\omega_0(0)$ ，因此對於第一次的時間間隔，我們可知道 $e_0 = 1 + \omega_0^2(0)$ 。這個初始的角速度 $\omega_0(0)$ 對於漸進性的骨牌運動並沒



有影響，只要在足夠的時間間隔下，將會發展成穩定的孤立子(Soliton)

現象。



## 第四節 骨牌運動中展現孤立子(Soliton)現象的探討

此節我們討論在骨牌中發展的孤立子現象，我們可以想像當多米諾骨牌(Dominoes)運動已經在一個穩定的狀態，只有存在轉動與碰撞作為一個穩定態的開始[7]。因此我們可以由碰撞定律確定 $\omega_{n+1}(0)$ 與 $\omega_n(0)$ 的關係，這個關係使我們能夠解得穩定態下的 $\omega_n(0)$ 。我們利用(2-1-9)式寫出有效的轉動慣量式(2-4-1)式。

$$I_n(\theta_c) = \sum_{j=0}^n w_j^2(\theta_c) = \sum_{j=0}^{n-1} w_{j+1}^2(0) + w_n^2(\theta_c) = I_n(0) - w_0^2(0) + w_n^2(\theta_c) \quad (2-4-1)$$

對於骨牌數目很多的情況下(即n很大)，最後一項 $w_n^2(\theta_c)$ 可以被抵銷為零，並且得到 $I_n$ 是依靠n的變數，由此我們得到(2-4-2)式。

$$I(\theta_c) = I(0) - 1 \quad (2-4-2)$$

接著考慮碰撞定律的關係式，(2-4-2)可以被近似改寫成(2-4-3)式。

$$I(0)\omega_n(0) = [I(0) - 1]\omega_n(\theta_n) \quad (2-4-3)$$

再根據能量守恆，我們寫出(2-4-4)式。

$$I(\theta)\omega_n^2 + H_n(\theta) = I(0)\omega_n^2(0) + H_n(0) \quad (2-4-4)$$

我們可由 $w_j(\theta) = \frac{dp_j(\theta)}{d\theta}$ 之關係，解得高度函數 $H_n(\theta_n)$ 在 $\theta=0$ 之值，其結果展現在(2-4-5)式中。

$$H_n(\theta_c) = \sum_j^n \left[ \cos p_j(\theta_c) + \frac{d}{h} \sin p_j(\theta_c) \right] = H_n(0) - 1 + \cos p_n(\theta_c) + \frac{d}{h} \sin p_n(\theta_c) \quad (2-4-5)$$

由上式我們知道 $p_n$ 的限制值是在於堆疊的角度 $\theta_\infty$ 上，因此在起始位能與最終位能上的不同可以被寫成(2-4-6)式，並把其結果定義成一個 $P(h,d,s)$ 的函數關係，此函數關係表示形成孤立子(Soliton)運動所需損失的位能能量。

$$H(0) - H(\theta_c) = 1 - \cos \theta_\infty - \frac{d}{h} \sin \theta_\infty \equiv P(h, d, s) \quad (2-4-6)$$

由上式它顯示出在 $\theta_\infty$ 時挺直的骨牌與形成堆的骨牌之間的差異。因此我們可以明白地寫出方程式的形式如(2-4-7)式。此式也說

$$P(h, d, s) = \frac{sh - d(s^2 + 2sd)^{0.5}}{h(s + d)} \quad (2-4-7)$$

明多米諾骨牌效應在 $P$ 為負值時不存在，即表示一個骨牌在堆疊角的傾斜下比起挺直的骨牌有著較高的位能。

我們再利用剛剛推得的(2-4-6)式，配合能量守恆定律並取 $\theta = \theta_c$ ，將其改寫成(2-4-8)式。

$$I(\theta_c)\omega_n^2 - I(0)\omega_n^2(0) = P(h, d, s) \quad (2-4-8)$$

接著我們利用(2-4-3)與(2-4-8)兩式配合，可以解得 $\omega_n(0)$ 與 $\omega_n(\theta_c)$ ，其結果如(2-4-9)式。

$$\omega_n^2(0) = P(h, d, s) \frac{I(0) - 1}{I(0)}, \quad \omega_n^2(\theta_c) = P(h, d, s) \frac{I(0)}{I(0) - 1} \quad (2-4-9)$$

我們由(2-4-9)式之結果可以知道，角速度的大小主要決定在 $\sqrt{P}$ 這項，而與 $I(0)$ 的關係非常的小，對於一個大的 $I(0)$ 狀況下，它就可以被消去。而且在一個大的骨牌間距下， $I(0)$ 最小值為2。

至此我們由探討骨牌的基本限制到最後的孤立子現象結論，已經完整地討論了多米諾骨牌效應，接著我們在第四章實驗的部分，將會結合這些理論來計算多米諾骨牌運動的實驗結果，並在第五章做出結論。

