

第二章 相關理論介紹

2.1 透地雷達簡介

透地雷達 (Ground Penetrating Radar, 簡稱 GPR), 為一應用電壓為幾百伏特的發射線圈, 產生頻率為 10 至 2000MHz、歷時為幾十億分之一秒 (ns) 的脈波 (雷達波) 射入地下或建築結構體內, 此入射波經地下具不同電磁性質的地層界面與埋藏體反射或地層內管線、空洞及結構體內鋼筋等繞射至地表, 由置放地表之高靈敏度接收天線接受此訊號 (圖 2.1)。此記錄經一般處理 (如振幅衰減補償、濾波) 或再加一些特殊處理 (如速度分析、解迴旋、移位等), 即可由接收到的各波抵達地表時間的不同, 來推測地下地層的起伏、描繪地下的形貌及偵檢地下人為的構造體 (例如瀝青路面厚度、地下管線或空洞、掩埋古蹟等) 或非金屬構造體內部結構 (如水泥混凝土牆版內的鋼筋等) (楊潔豪、陳兆年、王仲宇、林銘郎, 1997)。

一般透地雷達探測法於施測上依天線分布大致可分為等支距及同中點 (common middle point) 測勘, 前者採發射及接收天線固定距離, 測勘上較為快速; 後者以分離之天線以相同中點不同支距進行多次測勘, 再以信號疊加的方式提高信號雜訊比 (圖 2.1)。

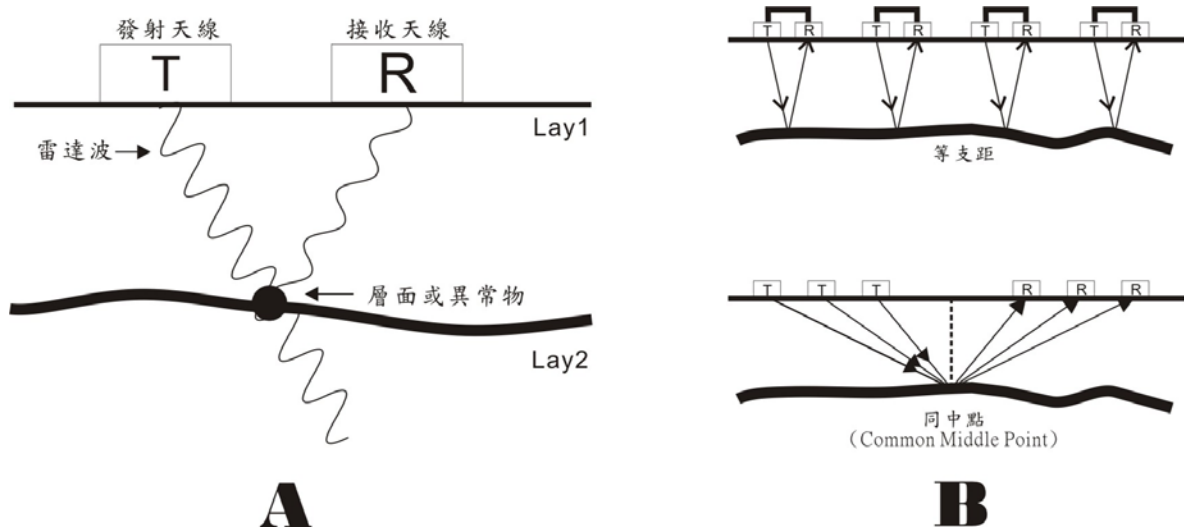


圖 2.1 雷達波傳遞示意圖 (A)；常見透地雷達測勘方法 (B)。

透地雷達測勘時雷達天線不需插入地下，測勘儀器輕巧，攜帶方便，測線易於展開。故現場測勘較工址調查常用的其他地球物理法如地電阻法或震測法迅速。且由於雷達波頻率甚高，施測時大都為同支距，故所得之雷達波反應剖面圖具高解析度並與地下狀況近似，對淺地層的描繪有極佳的效果（楊潔豪、陳兆年、王仲宇、林銘郎，1997）。

透地雷達的相關應用上極為廣泛，大致上可分為：

- (1) 土木工程：地下管線和孔洞調查、樓板鋼筋探測、橋面及混凝土及道路鋪面品質調查、水壩及隧道裂隙檢查等。

- (2) 環境工程：化學沉積物調查、地下掩埋場探測、海域探測及地下儲存槽滲漏檢測等。
- (3) 地質環境：地下水位面、地層結構調查等。
- (4) 軍事用途：地雷偵搜等。
- (5) 考古調查：地下陵墓、遺蹟、古建築及古文物等探勘。

2.2 電磁理論

2.2.1 電磁波特性

Maxwell 方程式可用於求解電磁波於導電性介質中的平面波傳播（如地層），說明如下：

Maxwell 方程式：

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \quad , \text{即為安培定律} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad , \text{即為法拉第定律} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad , \text{即為電場的高斯定律} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad , \text{即為磁場的高斯定律} \quad (2.4)$$

式中：

H：磁場強度 (magnetic field intensity, A/m)

E：電場強度 (electric field intensity, V/m)

D：電位移 (electric displacement, C/m²)

J：位移電流密度及傳導電流密度 (current density, A/m²)

B：磁通密度 (magnetic flux density, T)

ρ ：自由電荷體密度 (charge volume density, C/m³)

而其中 D 、 J 、 B 可作下列替換：

$$D = \varepsilon E \quad (2.5)$$

$$B = \mu H \quad (2.6)$$

$$J = \sigma E \quad (2.7)$$

式中：

ε ：電容率 (electrical permittivity, F/m)

μ ：磁導率 (magnetic permittivity, H/m)

σ ：導電率 (electrical conductivity, S/m)

平面電磁波於一均質、等向及無波源的介質中傳播時，Maxwell 方程

式可改寫為：

$$\nabla \times H = \sigma E + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (2.11)$$

對上 (2.9) 式兩邊求旋度，並將 (2.8) 式代入，得

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma E + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \quad (2.12)$$

利用向量恆等式： $\nabla \times \nabla \times E = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$ ，因 $\nabla \cdot E = 0$ ，故其可改寫為： $\nabla \times \nabla \times E = -\nabla^2 E$ ，可得電磁波波動方程式如下：

$$\nabla^2 E = \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \cong \mu_0\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

同理可得：

$$\nabla^2 H = \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \cong \mu_0\sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

(2.13)、(2.14)式為電、磁場傳導方程式。其中之磁導率對一般材料而言皆極接近真空的磁導率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{H}{m}\right)$ ，故 μ 可以 μ_0 取代而視為常數，可簡化計算。

多數介質的電性變化較磁性變化為大，故雷達波傳遞主要受電性影響。介質在電場的作用下，會產生兩種電流效應，分別為傳導電流及位移電流。(2.13)式中等號右方第一項與導電性（或電磁感應）有關，第二項與位移電流（displacement current）有關。而右方第二項與第一項之比值稱為 magnitude ratio (MR)，而對以交變頻率

$$\omega \text{ 而言，} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \omega^2 E$$

$$\text{故 } MR = \frac{\varepsilon\omega^2 E}{\sigma\omega E} = 2\pi f \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\text{位移電流項}}{\text{導電項}} \quad (2.15)$$

考慮透地雷達之野外施測環境，一般岩石、土壤之導電係數 $\sigma = 10^{-5} \sim 10^{-1} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ ，礦體之導電係數 $\sigma = 10^3 \sim 10^4 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ ；而

$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ (ϵ_r ：相對介電常數； ϵ_0 ：真空中之電容率， $8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$)，於一般岩石中 ϵ_r 多半介於 5~20 間。故電磁波傳導方式受其頻率及介質特性影響：

(1) 低頻電磁波： $MR \ll 1$ ，即導電項（或電磁感應項） \gg 位移電流項，電磁波以消（擴）散的方式穿過介質，以電流與磁場交互變動轉換能量。

(2) 高頻電磁波：雷達波屬之，於低導電性介質中 $MR \gg 1$ ，即導電項（或電磁感應項） \ll 位移電流項，此時能量（或信號）以波

動方式傳播，方程式為 $\nabla^2 E = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ ，電磁波波速為

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon_r \epsilon_0}} \cong \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}}, \quad \mu_0、\epsilon_0 \text{ 為常數，所以此時波速}$$

取決於介質之相對介電常數 ϵ_r 。

2.2.2 地層電性參數

相對介電常數 (relative dielectric constant)

相對介電常數之定義為材料電容率與真空中電容率之比值，其關係式如下：

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (2.16)$$

式中， ϵ_r ：相對介電常數； ϵ ：材料之電容率； ϵ_0 ：真空中之電容率， $8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$ ）。若電磁波頻率一定時， ϵ_r 愈大則位移電流越強，電磁波天線的輻射波束 (antenna radiation patterns) 主波束愈窄，電磁波之能量較能往地下集中而將更易於施測 (Annan et al., 1975; Smith, 1984)。影響地層相對介電常數的因素包括：土壤或岩石種類、土壤含水量及孔隙率。

反射係數 (reflection coefficient)

電磁波傳遞至不同介電常數之邊界時，其反射係數 (R) 為：

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}} \quad (2.17)$$

式中， ϵ_1 ：上地層的相對介電常數

ϵ_2 ：下地層的相對介電常數

可知電磁波經過不同介質時，會將能量反射，反射能量之大小受上下地層之介電常數之差異影響。

導電率 (electrical conductivity)

導電率為介質傳導電流之能力，與電阻率成倒數關係；地層中導電率主要受含水量及礦化作用影響。導電率會影響 MR，因為 $MR = 2\pi f \frac{\epsilon}{\sigma}$ ，若 σ 太高的話， $MR \gg 1$ 的條件就不滿足，此時信號就不能看成以波動的方式傳播，而雷達波能夠探勘地下構造的條件就不成立了。導電率可表示為：

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (2.18)$$

式中， σ ：導電率 (S/m)； ρ ：電阻率 (Ω -m)

一般透地雷達施測環境，可依導電率分為三類：

- (1) 高導電率 ($\sigma \geq 10^{-2} S/m$)：透地雷達之不良施測介質。如濕黏土、濕頁岩、海水。

(2) 中導電度 ($10^{-7} \leq \sigma \leq 10^{-2} S/m$) : 透地雷達之一般施測介質。

如純水、乾黏土、砂。

(3) 低導電度 ($\sigma \leq 10^{-7} S/m$) : 透地雷達之較佳施測介質。如空氣、

花崗岩、瀝青。

衰減常數 (attenuation)

衰減度為電磁波於介質中的衰減程度，與介質之介電常數、導電率有關。其關係為：

$$A = \frac{1635\sigma}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.19)$$

式中，A=衰減常數 (db/m)，與導電度成正比

電磁波衰減耗損的原因大致包括下列三項 (Beres and Haeni, 1991) :

(1) 電磁波能量穿越導電介質時部分轉換為熱能。

(2) 水中的介電衰減。

(3) 黏土礦物化學離子擴散。

介質名稱	電阻率 ρ (Ohm-m)	介電常數 K	速度 (m/ns)
乾沙	$10^3 \sim 10^7$	3 - 6	0.1 ~ 0.122
飽合含水沙	$10^2 \sim 10^4$	20 - 30	0.067 ~ 0.055
粉砂	$10^2 \sim 10^3$	5 - 30	0.134 ~ 0.055
頁岩	$10 \sim 10^3$	5 - 15	0.134 ~ 0.077
飽合含水黏土	1 ~ 10	5 - 40	0.134 ~ 0.047
溼土	50 ~ 100	30	0.055
墾殖土	200	15	0.077
岩質土	1000	7	0.113
乾砂質土	7100	3	0.173
濕砂質土	150	25	0.06
乾壤質土	9100	3	0.173
濕壤質土	500	19	0.069
乾黏土質土	3700	2	0.021
濕黏土質土	20	15	0.077
溼砂岩	25	6	0.122
乾石灰岩	10^9	7	0.113
濕石灰岩	40	4 - 8	0.15 ~ 0.106
濕玄武岩	100	8	0.106
花崗岩	$10^3 \sim 10^5$	4 - 6	0.15 ~ 0.122
淡水	$30 \sim 10^4$	81	0.033
冰凍層	$10^2 \sim 10^5$	4 - 8	0.15 ~ 0.106
乾雪	$10^5 \sim 10^6$	1	0.3
冰	$10^3 \sim 10^5$	3 - 4	0.173 ~ 0.15
瀝青	0.1 ~ 1	4 - 7	0.11 ~ 0.148
水泥混凝土	0.1 ~ 1	6 - 11	0.09 ~ 0.12
空氣	無限大	1	0.3

表 2.1 在頻率 1 至 100 MHz 範圍內，地體物質之孔隙水為淡水時，其典型的電阻率及相對介電常數。（改自 Epp et al.，1988；Davis and Annan，1989；Ulriksen，1982）

2.3 小波分析 (wavelet analysis)

2.3.1 小波分析特性

傳統的信號分析大都是建立在傅立葉轉換的基礎上，傅立葉轉換屬於一種全域的分析，係將完整的時間序列轉換為頻率域的信息，因此無法完全表達信號的時頻域特性，而這種性質恰恰是非穩態信號最關鍵的性質。而在大多數的信號中，均含有大量的非穩態成分，例如偏移、趨勢、突變、事件的起點與終止等情況。以透地雷達信號而言，在目標出現的位置會對應一個回波信號，它們的頻域特性都隨著時間而變化。

小波分析是一種窗口大小固定但形狀可以改變，時間窗和頻率窗都可以改變的時頻局部分分析方法，其與傅立葉分析在數學上是相似的，只是傅立葉分析是以三角函數為基底函數，而小波分析是以小波函數為基底函數（黃俊諺，2003）。相較於傅立葉分析，使用不規則小波函數來逼近尖銳變化的信號顯然要比光滑的正、餘弦曲線要好，同樣的，信號局部特性用小波函數來逼近的效果也較佳（圖 2.2）。

小波分析具有下列特性 (WaveletToolbox User' s Guide , The MathWorks, Inc. , 2000) :

- (1) 具有多尺度的特點，可以由粗至細地逐度觀察信號。
- (2) 可以看成基本頻率特性為小波函數的帶通濾波器在不同尺度下對信號作濾波。
- (3) 適當的選擇小波，使小波函數在時域上為有限支撐，在頻域上也比較集中，可以使小波轉換在時、頻域具有表徵信號局部特性的能力，有利於檢測信號的瞬態或奇異點。

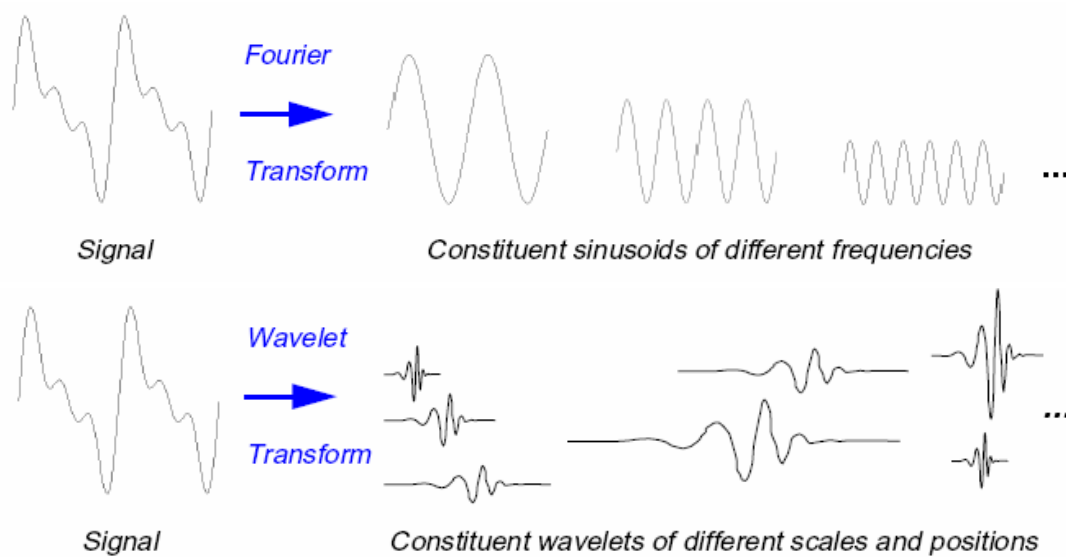


圖2.2 傅立葉與小波轉換之比較 (WaveletToolbox User' s Guide , The MathWorks, Inc. , 2000)

2.3.2 小波轉換 (wavelet transform)

小波轉換的定義是把某一個稱為基本小波 (或稱母小波 mother wavelet) 的函數 $\Psi(t)$ 經尺度伸縮與時間平移後所得到的一組函數 $\Psi_{a,b}(t)$ 與待分析的信號作折積 (convolution)。而基本小波 $\Psi(t)$ 需滿足下列兩項性質：

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.20)$$

$\Psi(t)$ 對時間軸的平均值為零，且具有正負交替的波動性。

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)^2 dx = 1 \quad (2.21)$$

$\Psi(t)$ 在時域具有緊支集 (compactly supported) 或近似緊支集，即 $|\Psi(t)|$ 所佔面積不大且衰減迅速。

$\Psi_{a,b}(t)$ 與 $\Psi(t)$ 之關係為：

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in R \quad a \neq 0 \quad (2.22)$$

其中， a 為尺度 (scale) 參數：可將 $\Psi(t)$ 作壓縮或伸展處理。

b 為平移 (translate) 係數：可將 $\Psi(t)$ 在時間軸上平移。

當尺度愈大時，意味著小波函數在時間軸上愈長，即被分析的信號區間也愈長。因此尺度愈大意味著頻率的分辨率愈低，主要獲得為信號的低頻特性；反之，尺度愈小時，小波函數只與很小的局部信號進行比較，因此主要獲得為信號的高頻特性（圖 2.3）。尺度與頻率的關係可歸納如下：

小尺度 a → 壓縮的小波 → 快速變換的細節 → 高頻部分

大尺度 a → 拉伸的小波 → 緩慢變換的細節 → 低頻部分



圖2.3 不同尺度之小波函數示意圖（WaveletToolbox User's Guide, The MathWorks, Inc., 2000）

2.3.3 一維小波轉換

一信號 $f(x)$ ，其連續小波轉換的定義為：在一平方可積分的 Hilbert 空間 $L^2(R)$ 中之內積過程（Miao et al., 1998）：

$$CW_{a,b} = \langle \psi_{a,b}(x), f(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \psi_{a,b} \left[\frac{x-b}{a} \right] f(x) dx \quad (2.23)$$

其中， $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ ， $a, b \in R \times R$ ， $a \neq 0$

而小波的逆轉換式為 (Leblanc et al., 2001)：

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CW_{a,b} \psi_{a,b} \frac{dad b}{a^2} \quad (2.24)$$

其中，當 $a > 0$ 時， $C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|} |\psi(k)|^2 dk$ ， $\Psi(k)$ 為 $\Psi(x)$ 的傅

氏轉換。可知小波轉換即是將輸入的信號函數對不同寬度及移動因子的基本小波函數作折積 (convolution)，所得到輸出的就是此信號函數對不同小波的投影量 (貢獻量) (鄭軒儒, 2004)。

而若要使用電腦計算小波轉換時，使用離散小波轉換是較為容易的。進行離散小波轉換時首先對參數 a 、 b 進行離散取 (Daubechies, 1992)：

$$a = a_0^m, \text{ 一般取 } a_0 = 2, m \in Z$$

$$b = nb_0 a_0^m, \text{ 一般取 } b_0 = 1, n \in Z$$

其中， m 、 n 為代表解析度之整數； a_0 、 b_0 分別為代表波數範圍的指數與位置移動變化的間隔指數。依此，可將 $\psi_{a,b}(x)$ 改寫成為二進制小波 (dyadic wavelet)： $\psi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n)$ 。因此可將離散小波轉換定義為 (Kumar et al., 1994)：

$$DW_{m,n} = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(a_0^{-m} x - nb_0) dx \quad (2.25)$$

2.3.4 多層次分析 (multiple-level decomposition)

連續小波轉換等式為線性系統原理形式，可改寫成為 (Abbate et al., 2002)：

$$CW_{a,b} = f(x) \otimes \psi_{a,b}(x) = f(x) * \psi_{a,b}(-x) \quad (2.26)$$

因此小波轉換可視為在時間域中信號 $f(x)$ 輸入到一脈衝響應為 $\psi_{a,b}(-x)$ 的濾波器。原始信號 $f(x)$ 通過兩互補的濾波器後得到一組代表低頻的近似信號與代表高頻的細節信號 (圖 2.4) (Daubechies, 1992)：

$$(1) \text{ 細節信號： } D_m f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \psi_{m,n}(x) \quad (2.27)$$

其中， $c_{m,n} = \sqrt{2^m} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^m x - n) dx$ ，稱為小波係數。

$$(2) \text{ 近似信號： } A_m f(x) = \sum_{b \in \mathbb{Z}} s_{m,n} \phi_{m,n}(x) \quad (2.28)$$

其中， $s_{m,n} = \sqrt{2^m} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(2^m x - n) dx$ ，稱為尺度係數。

而原始信號 $f(x)$ 可表式為： $f(x) = A_m f(x) + \sum_m^{+\infty} D_m f(x)$ 。即可將原始信號的近似信號進行多次分解，結果可得到多層的近似信號及細節信號，以此即可對原始信號作多層次的分析 (圖 2.5)。而信號分解的層數限制為 $\log_2 N$ 層， N 為原始信號長度。

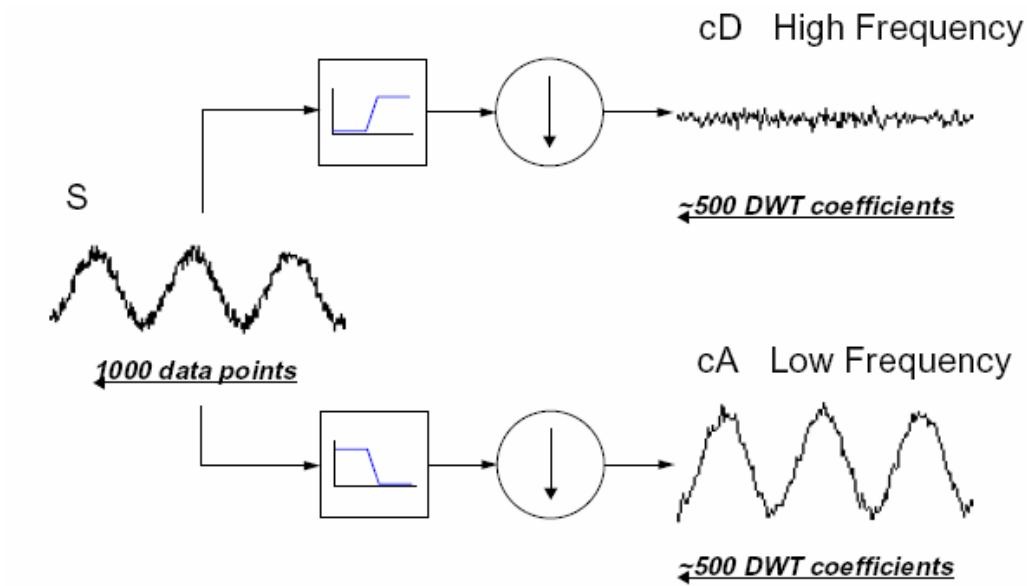


圖2.4 小波轉換可視為一濾波器。原始信號通過兩互補的濾波器後得到一組代表低頻的近似信號與代表高頻的細節信號 (WaveletToolbox User' s Guide , The MathWorks, Inc. , 2000)

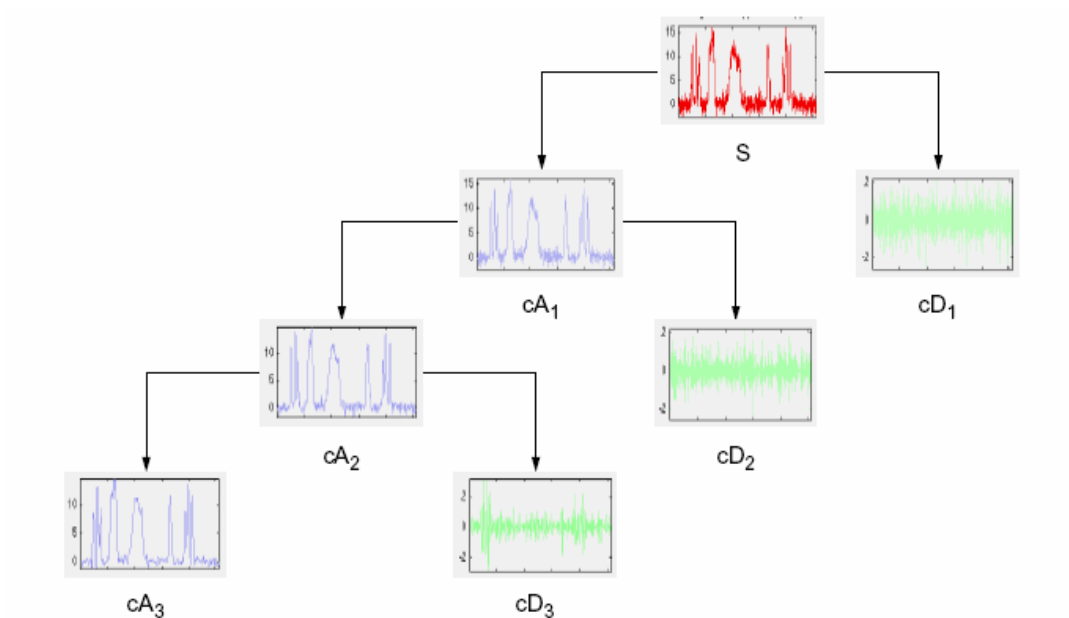


圖2.5 多層次分析示意圖 (WaveletToolbox User' s Guide , The MathWorks, Inc. , 2000)

2.4 希伯特轉換 (Hilbert transform)

希伯特轉換的特性是由分析函數 (analytic function) 而來 (梁家銘, 2002)。一可分析函數的定義為：若一函數在一個區域 (複數域) 或區間 (實數區間) 內的每一點皆有一微分值，則稱之為可分析。一可分析信號能夠以希伯特轉換表示成一隨時間變化的複數函數。原始信號經過希伯特轉換後並不會改變其定義域，轉換後會得到一具實部及虛部的分析信號 (analytic signal)，實部為原始信號，虛部為經希伯特轉換後之信號，兩者間僅作一 90° 的相位轉移，其振幅及頻率不變。故利用希伯特轉換可以表現出時間序列的瞬時特性，包括瞬時振幅、相位及頻率。

對一維實數信號序列或函數 $X(\tau)$ 之希伯特轉換的定義如下：

$$Y(t) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2.29)$$

其逆希伯特轉換 (inverse Hilbert transform) 為：

$$X(t) = -\frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2.30)$$

其中， PV 為柯西主值 (Cauchy Principal Value)

在電腦處理的使用上，可利用傅立葉轉換求取希伯特轉換。Y(t)可藉

由 X(t) 與 $\frac{1}{\pi}$ 之折積獲得：

$$\frac{1}{\pi} \xleftarrow{F} -j \operatorname{sgn}(w) \quad , \quad \operatorname{sgn}(w) = \begin{cases} +1, w > 0 \\ 0, w = 0 \\ -1, w < 0 \end{cases} \quad , \quad F: \text{傅立葉轉換}$$

依此可得： $X(t) \xleftarrow{F} X(w)$

由 (2.29) 式定義，X(t) 及 Y(t) 可組成一共軛複數，可得下列一解析

信號：

$$Z(t) = X(t) + iY(t) = A(t)e^{i\theta(t)} \quad (2.31)$$

其中：

$$(1) A(t) = [X^2(t) + Y^2(t)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

為瞬時振幅 (instantaneous amplitude)

$$(2) \theta(t) = \tan^{-1} \frac{Y(t)}{X(t)} \quad (2.33)$$

為瞬時相位 (instantaneous phase)

將瞬時相位微分後可得瞬時頻率 (instantaneous frequency)：

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2.34)$$