

第二章 文獻探討

本研究的目的是為探究國中生三角形外心與內心概念學習困難因素，並尋求有效的教學策略來解決學習困難。為了達成此目標，研究者需要進一步蒐集、整理相關資料，以便發展正確的研究方向。研究者認為新教材的教學流程在推理與論證方面安排的太緊湊，而推理與論證能力是數學能力中相當重要的一部份，因此先針對九年一貫暫行綱要的課程規劃與數學能力的培養作進一步的瞭解。其次，「三角形外心與內心概念」屬於平面幾何，故國中生幾何學習的背景、歷程與相關學習理論也應有基本的認識。最後，本研究使用的類比教學模式及局部推理與模仿等教學策略，當然必須介紹其來源並進行相關的探討。

第一節 九年一貫暫行綱要的課程規劃與數學能力的培養

研究對象為首屆實施九年一貫暫行綱要的學生，在新舊教材交接之際，研究者發現教師們也在摸索、適應新的課程綱要，並試圖找到正確的施力點，培養學生應具備的能力。因此研究者認為有必要瞭解九年一貫暫行綱要的內涵，並探討數學能力的培養與評量。

一、九年一貫暫行綱要的課程規劃

教育部推行九年一貫教育政策，於 2001 年訂定「九年一貫數學科暫行綱要」，並自 2002 年起自一、二、四、七年級同步實施。九年一貫課程強調以學習者為主體，以知識的完整面為教育的主軸，以終身學習為教育的目標。因此國民與中等教育數學課程的目標，要能反映出四大需求：數學能力是國民素質的一個重要指標；了解數學是人類重要資產；教學（含教材、課本及教學法）應配合學童不同階段的

需求，協助學童數學智能的發展；數學作為基礎科學的工具性特質。

九年一貫課程欲培養的基本能力乃從人與自己，人與社會及人與自然關係中研訂出十項學生適應實際生活需要的能力，做為國民教育課程所需達到的能力指標。這十項能力指標，從人與自己關係發展出來的有了解自我與發展潛能、欣賞、表現與創新，生涯規劃與終身學習三項。從人與社會關係發展出來的有表達，溝通與分享，尊重關懷與合作，文化學習與國際了解，規劃，組織與實踐四項；從人與自然關係發展出來的有運用科技與資訊，主動探索與研究，獨立思考與解決問題三項。

為了培養這十項基本能力，國民教育之課程就需以個體發展、社會文化、以及自然環境三個面向，提供語文、健康與體育、社會、人文與藝術、數學、自然與科技及綜合活動等七大學習領域。研究者認為數學對於「主動探索與研究」、「獨立思考與解決問題」這兩個基本能力的培養有直接的貢獻，從基本能力的內涵與數學能力的關係即可發現。「主動探索與研究」的內涵包括：形成問題、蒐集、觀察、實驗、分類、歸納、類比、分析、轉化、臆測、推論、推理、監控、確認、反駁、特殊化、一般化。「獨立思考與解決問題」的內涵包括：進行數學式思維；以數、形、量的概念與方法探討並解決問題。因此九年一貫的數學課程期望學生達成下列目標：

- 一、掌握數、量、形的概念與關係。
- 二、培養日常所需的數學素養。
- 三、發展形成數學問題與解決數學問題的能力。
- 四、發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。
- 五、培養數學的批判分析能力。
- 六、培養欣賞數學的能力。

（引自國民教育九年一貫課程綱要草案：數學學習領域）

為了達成這些目標，數學課程的發展以生活為中心，配合各階段

學生的身心與思考型態的發展歷程，提供適合學生能力與興趣的學習方式，發展數學學習活動。根據學生的學習方式與思考型態兩項特徵，九年一貫課程在數學領域將九年國民教育區分為四階段：階段一(1-3 年級)、階段二(4-5 年級)、階段三(6-7 年級)和階段四(8-9 年級)。另將數學內容分為數與量、圖形與空間、統計與機率、代數、連結等五大主題。研究者列出「圖形與空間」中與本研究有關的能力指標(含分年細目指標)，方便針對教學內容與課程目標作進一步的探討。

(一)「圖形與空間」中與本研究相關的能力指標(含分年細目指標)

S-3-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。

S-4-01 能利用形體的幾何性質來定義某一類形體。

S-4-02 能指出合於所給定性質的形體。

S-4-04 能利用形體的性質解決幾何問題。

S-4-08 能理解三角形的幾何性質。

S-4-10 能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同。

S-4-15 能利用三角形及圓的性質作推理。

分年細部指標如表 2-1-1：

表 2-1-1 「圖形與空間」中與本研究有關之分年細目指標

6-s-01	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。S-3-01
8-s-01	能認識生活中的平面圖形(三角形、四邊形、多邊形及圓形)。S-4-01
8-s-02	能認識並定義簡單幾何圖形的點、線、角。S-4-01
8-s-03	能認識圓形的定義及相關名詞(圓心、半徑、弦、直徑、弧、弓形、圓心角、扇形)。S-4-01
8-s-09	能以最少性質辨認三角形。S-4-01,S-4-08
8-s-11	能理解特殊三角形的定義。S-4-08
8-s-13	能理解特殊三角形的性質。S-4-08
8-s-14	能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義。S-4-08
8-s-15	能理解三角形的全等性質。S-4-08
8-s-16	能理解三角形邊角關係。S-4-08
8-s-28	能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同。S-4-10
9-s-08	能理解三角形外心的定義和相關性質。S-4-15
說明：	●過三角形三頂點的外接圓圓心稱為三角形的外心。

	●理解三角形的外心至三頂點等距離。
	●理解直角三角形斜邊中點到三頂點等距離。
9-s-09	能理解三角形內心的定義和相關性質。 S-4-15
說明：	●三角形內切圓的圓心稱為內心。
	●理解三角形的內心至三邊等距離。
	●設 $\triangle ABC$ 周長 s ，內切圓半徑 r ，則 $\triangle ABC$ 的面積 $= sr/2$ 。
	●直角三角形中，內切圓半徑 $= (\text{兩股和} - \text{斜邊}) \div 2$ 。
9-s-10	能理解三角形重心的定義和相關性質。 S-4-15
9-s-11	能以三角形和圓的性質為題材來學習推理。 S-4-15
說明：	●幾何推理：是以『已知條件』及『已知為正確的幾何性質』，推導出結論，這個過程稱為『證明』。
	●教學時可利用填充證明題開始，進而慢慢可獨立完成推理幾何證明的寫作，但推理步驟不宜過多。
	●教學時可以垂直平分線性質、角平分線性質等來學習推理。
	●學習推導三個內角分別為30度、60度、90度及45度、45度、90度的直角三角形邊角關係，可為高中職課程中三角函數的學習基礎。
	●學習推導正三角形面積及高的計算公式。

(二)教學內容

1.編排方式：配合四階段採螺旋式的編排。國一學生學習的幾何概念包括幾何圖形的性質、變動與幾何量。在幾何圖形的性質方面，透過圖形的觀察、操弄、實驗與測量等方式歸納出三角形、四邊形與圓形的主要性質，並介紹數學用語，如：外接圓、內接三角形、中垂線等等。在幾何圖形的變動方面，使用方格紙協助學生學習線對稱圖形與放大縮小圖，建立學生的對應概念，瞭解對應圖形之間的關係。在幾何量方面，提供正方形單位讓學生估測不規則圖形的面積，利用相關的幾何性質，如平行線等距離，透過計算面積的過程讓學生察覺幾何的不變性。教學內容很明顯是設定學生處於非形式論證的層次。國三學生學習的幾何教材主題幾乎相同，但內容卻以「形式論證層次的準備期」作規劃，包括：以幾何性質刻畫定義、以非形式或形式論證說明幾何性質、利用性質進行局部推理、認識逆敘述與敘述等等。雖然有部分教師基於「重複教學浪費時間」、「活動太多影響進度」、「由操作歸納幾何性質不如直接教授」等理由，對於此編排方式不表認同，但研究者認為，若將教學的目的著眼於培養學生學習數學的能

力，讓學生親身經歷學習數學的過程，而非以教會數學知識為目的，應能體會螺旋式的編排的原因吧！

2.設定對象：80%以上的學生。「暫綱」中每個階段的學習內容，都希望能讓80%以上的學生參與學習過程，具有學習能力，也就是讓每一階段的學生都能進行有意義的學習。在這個前提下，有部分的教學內容被刪除，如函數，部分的被簡化，如以局部推理完成幾何證明。雖然內容相較於88年的國編版簡單，但重點在於讓大部分的學生有機會融入教學活動中，不會中途就完全脫離數學課程的學習。因此教師可以配合學生的程度來調整教學內容，多花一節課進行銜接或補充課程都能讓學生學習更有意義。

(三)課程目標

「圖形與空間」配合課程目標培養相關的數學能力，包括：

- 1.形成問題與解決問題：藉由活動讓學生觀察、歸納獲得數學性質，並以非形式或形式論證的方式說明或證明。例如：操弄等腰三角形，發現角平分線會通過底邊中點，利用對稱性說明或全等性質證明此性質。
 - 2.明確表達、理性溝通：能完整的描述自己的想法，利用數學的語言或符號以邏輯的方式進行討論。例如：讓學生說出所有長方形的性質，經由討論釐清性質間的等價關係，歸納出最容易刻畫長方形的敘述成為定義。
 - 3.數學的批判分析：針對題目內容或他人的論述，進行分析與解讀。例如：外心一定在三角形內部嗎？請學生判斷敘述的真實性，並對鈍角、直角或銳角三角形的外接圓進行分析與說明。
 - 4.欣賞數學：藉由圖形觀察或察覺規律發現數學的美，與生活上的數學產生連結。例如：數學步道、對稱圖形、七巧版、等差數列等等。
- 根據上述課程目標擬定相關的能力指標，編寫教材進行教學活動時，如S-4-15：「能以三角形和圓的性質為題材來學習推理」，教師除了協

助學生達成教學目標，獲得必要的數學知識，更應深入瞭解學生的數學能力是否真的提升了。

二、數學能力的定義

什麼是能力 (ability) 呢？張氏心理學辭典有兩種解釋 (張春興，民78)：一、指個人在其遺傳或成熟的基礎上，經由環境中的訓練或教育而獲得的知識與技能。此類能力可以由行為上表現出來。作為與別人比較高低的依據。像此類實際在行為上表現出來的能力，也稱為成就 (achievement)。二、指個人學習某事物所具備的潛在能力。此種潛在能力，如採用廣義的看法，常稱之為能量 (capacity) 或智力 (intelligence)；如採狹義的定義則稱為性向 (aptitude)。數學能力是由教育訓練出來的，屬於第一種，因此能透過成就評量來比較能力的高低。

蘇聯心理學家克魯切茨基 (Krutetskii) 自1955年至1966年投入12年時間研究數學能力的特質與結構。Krutetskii(1976)從數學思考的基本特質中，提出九項數學能力的因子：(一)形成問題的能力；(二)一般化的能力；(三)以數字與文字符號運算的能力；(四)邏輯推理的能力；(五)簡捷思考的能力；(六)逆向思考的能力；(七)彈性思考的能力；(八)數學記憶的能力；(九)空間概念的能力。這九項數學能力因子是學習數學或解答數學問題的過程中，心智活動運作歷程有關的能力。

美國全國數學教師委員會(The National Council of Teachers of Mathematics, 簡稱 NCTM) (1989)在"Principles and Standards for School Mathematics"的"Curriculum &Evaluation"中指出數學的學習應強調以下四種能力：

(一)解題：

- 1.能利用解題探究及瞭解數學內容。

- 2.能從日常生活及數學情境中形成問題。
- 3.發展及應用策略解決不同的問題。
- 4.能驗證及詮釋原本問題的結果。
- 5.能將解答與策略一般化到新的情境。
- 6.從有意義地使用數學中獲得信心。

(二)溝通

- 1.能使用口語、書寫、具體、圖像、圖表及代數方法模式化情境。
- 2.能指出與數學想法相關的物理材料、圖像與圖表。
- 3.能反思及闡明數學想法與情境。
- 4.能指出日常語言與數學語言、符號的相關。
- 5.瞭解表徵、討論、和讀寫數學是學習和使用數學不可缺少的一部分。

(三)推理與證明

- 1.能察覺並應用歸納及演繹推理。
- 2.能使用模式、已知事實、性質及關係解釋自己的思考。
- 3.能解釋答案及解答過程。
- 4.能使用樣式和關係分析數學情境。
- 5.能創造並評估數學臆測與數學推論。

(四)連結

- 1.能連結概念與解釋性知識。
- 2.能使用圖表、數值、代數和口語的數學模式或表徵探究問題及描述結果。
- 3.能指出不同概念或程序的表徵之間的關係。
- 4.能察覺不同數學主題之間的關係。
- 5.能利用數學思考與模式解決其他課程領域或日常生活中的問題。
- 6.能重視數學在文化與社會中的角色。

近年美國國家研究院(National Research Council,2001) (引自黃志

賢,民 92)的研究報告指出，學生的數學能力就如同五股相互交織的繩索，五種能力必須同時地、統整地發展，方能成就其功能。五股數學能力包括：

(一)概念的理解：理解數學概念、運算及關係。(二)流暢的運算能力：彈性地、準確地、有效地及適當地執行程序技巧。(三)選擇策略的能力：能形成、表徵及解決數學問題。(四)適當的推理能力：邏輯思維、反思、解釋及辯證的能力。(五)具生產力的數學性向：習慣性的傾向視數學是有知覺的及有價值的。這五股能力在數學能力的發展中是同等重要的，且其間的關係並不是獨立的，而是相互依賴的，它們表徵了一個複雜全體的不同面向，形成數學能力的定義。

至於歐洲方面，丹麥數學家 Niss (2003)認為精熟數學就是擁有數學能力，而數學能力是指能瞭解、判斷、實做，及能在各種不同數學情境與脈絡的內外使用數學。由 Niss 主持的一項研究計畫「能力與數學學習」，目的是為丹麥數學教育的改革創造一個平台，研究結果將數學能力結構分成兩群，解題與工具的觀點，包括：

(一)數學思維

- 1.能提問有數學意義的問題，並能辨識何種答案為數學答案。
- 2.對於給定的概念，能清楚掌握其適用範疇。
- 3.透過抽象化與類化擴展數學概念的範圍。
- 4.辨識各類數學敘述（條件、定義、定理、假設、臆測、數量值的敘述、案例）。

(二)擬題與解題

- 1.確認、提出及詳細說明不同類型的數學問題(純數的或應數的；開放的或封閉的)。
- 2.能解自己或別人提問的不同類型數學問題。
- 3.如果合適，能以不同方法解題。

(三)數學建模

- 1.分析既有數學模式的性質與屬性，並評估該模式適用的範疇及其效度。
- 2.轉化或解讀既有數學模式在現實問題中的意義。
- 3.在給定情境中建立數學模型：
 - (1)結構場域
 - (2)數學化
 - (3)在模型裡工作，包括解決模型所產生的問題
 - (4)模型內外的有效性
 - (5)分析和批判模型
 - (6)對模型及其結果進行溝通
 - (7)監控整個建模過程

(四)數學推理

- 1.能理解別人論證的條理，並能評估該論證是否有效。
- 2.知道什麼是數學證明，並能區分數學證明與直觀的不同。
- 3.能從論證的條理中找到基本的想法。
- 4.能將直觀論證轉化成有效的證明。

(五)數學表徵

- 1.能解讀、詮釋及辨識數學物件、現象、情境的各類表徵。
- 2.瞭解相同數學物件不同表徵間的關係，並掌握不同表徵的優勢與限制。
- 3.可以在表徵之間進行選擇與轉化。

(六)符號化與形式化

- 1.解讀與詮釋符號的形式數學語言，並瞭解他們與日常語言的關係。
- 2.瞭解數學語言的語意及語法。
- 3.日常語言與數學正式/符號語言間的轉換。
- 4.處理和操弄包含符號與公式的敘述與表示式。

(七)數學溝通

- 1.瞭解別人以書寫、視覺及口語所傳達的數學資訊。
- 2.能使用精確的數學語言表達自己的意思(口語、視覺或書寫)。

(八)工具的使用

- 1.知道已存的數學活動工具或輔具的性質，並清楚其功能與限制。
- 2.能反思地使用這些工具或輔具。

由上述數學能力的結構與「暫綱」作比較，研究者發現「推理與論證」的確是重要數學能力之一，而「幾何與空間」是最適合培養學生推理與論證能力的教材，能透過相關活動讓學生產生連結，引發學生的學習興趣。因此，研究者認為教師應提供更多實驗性質的教學活動，讓學生透過操作、觀察、討論、歸納培養正確的數學思維，作為發展數學能力的基礎。

三、數學能力的評量

數學能力需要有適當的評鑑模式，才能檢視學童所處的的層次，並比較各教學方法的成效。美國全國教育進步評量 National Assessment of Educational Progress，簡稱NAEP，於1990與1992提出的評量架構，由內容標準（content strand）與數學能力（mathematical ability）交叉結構而成，如表2-1-3：

表2-1-2 NAEP(1990,1992)數學評量架構表

Content Areas					
Mathematical Abilities	Numbers and Operations	Measurement	Geometry	Data Analysis, Statistics, and Probability	Algebra and Functions
Conceptual Understanding					
Procedural Knowledge					
Problem Solving					

NAEP的模式是從數學活動的角度來看數學能力，著重在學習數學概念、過程技巧與解題活動中所需的能力，可以從學生解題的整個流程中發現。NAEP於1996年所進行的數學科評量中，修正內容標準，依次為：數感、數的特質與運算；測量；幾何與空間；資料分析、統計與機率；代數與函數，並加入推理、連結及溝通三種數學力 (Mathematical Power)。並進一步解釋數學能力為：

(一)概念理解

當學生能表現下列各項行為或事實時，我們可以說他理解某一概念：

- 1.能辨識、指認和舉出實例或反例。
- 2.能運用有關概念的模型、圖表，及各種表徵。
- 3.能指認並運用有關原理。
- 4.能知道事實與定義以說明概念。
- 5.能比較、對照並統整相關概念與原理。
- 6.能指認、說明，及應用有關概念的符號或術語。
- 7.能解釋數學概念有關的假設與關係。

(二)過程知識

當學生有如下列行為表現時，我們可以說他具有數學的過程知識：

- 1.能判別或判斷具體模型或符號運用方法過程的正確性或適切性。
- 2.能正確地計算。
- 3.能運用不同的數學邏輯以有效地解決數學問題。
- 4.能讀、能設計圖表以表現過程。
- 5.能執行幾何構圖
- 6.能操作非計算技能，如：四捨五入、排序等。

(三)解題能力

- 1.推理與分析的能力
- 2.能認清問題並能用數學式表示。

- 3.能判辨資料的充分性和均質性。
- 4.能使用策略、數據、模型。
- 5.能產生、修訂、充實過程。
- 6.能判斷問題答案或方法的正確性。
- 7.能空間推理、歸納推理、演繹推理、統計推理及比例推理。

綜合標準內容、數學能力與數學力，所成的數學評量結構如圖 2-1-1：

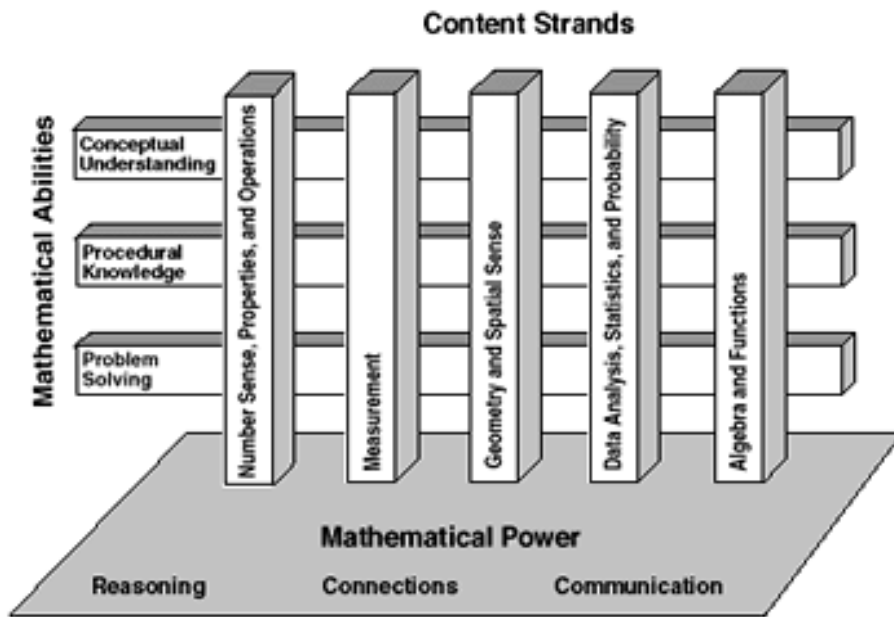


圖 2-1-1 NAEP(1996,2000,2003)數學評量架構表

研究者參考 NAEP 的數學能力，針對外心的教學目標，分成「概念」「論證」「作圖」三個面向編製診斷工具，進行學生學習困難的診斷工作。

第二節 幾何學習

國中的數學教材中包括平面幾何，主要是因為平面幾何的學習能訓練學生的思考與推理能力，而非公理系統本身的理解。配合學生的幾何認知發展，歐氏幾何的公設、公理可視為直觀的事實，以觀察、操作、繪製等方式引入教學中，與學生日常生活中接觸的實體或經驗產生良好的連結，因此非常適合作為教學的材料。教師若能熟悉相關

的幾何研究，如：Van Hiele(1986)的幾何思考層次理論、Duval(1995)幾何圖形的瞭解，便能透過學生學習幾何的過程，更有效的幫助學生建立必要的能力。

一、歐氏幾何對數學教育的影響

遠自巴比倫、埃及時代，人們已知道利用一些圖的性質來丈量土地，劃分田園。但是並沒有把它當作一門獨立的學問來看，只把它當作人類生活中的一些基本常識而已。真正認真去研究它，則是從古希臘時代才開始的。王懷權(1994)在「數學發展史」一書中，將古希臘的幾何(西元前 600 年~西元 400 年)分成五個年代，由「畢達哥拉斯年代」至「衰敗年代」作了初步的介紹。直接影響國中數學幾何教育的人物包括：塞樂斯(Thales)首創演繹幾何;畢達哥拉斯(Pythagoras)的畢式定理，主張數學要引入教育，注重思想的啟發;歐德克斯(Eudoxus)首創窮盡法;歐基理德(Euclid)編著第一本數學教科書「幾何原本」等等，其中「幾何原本」對於後來的幾何教育影響最大，目前國中所學的平面幾何，內容仍以「幾何原本」這本書為主。

「幾何原本」這本書共有 13 冊，內容包括：

(1)1-6 冊：平面幾何學，它是以下列五大公設為基礎：

- a、任二點之間可作一直線。
- b、直線可以任意延長。
- c、可以以任意點為圓心，任意長為半徑，畫出一圓。
- d、直角皆相等。
- e、平行公設。

以研究下列性質：三角形的性質—全等、相似。平行線的性質—內錯角、同位角。畢式定理。圓的性質—內接圓、外切圓。比例的問題。平行四邊形的性質。

(2)7、8、9 冊：整數論，討論奇數、偶數、質數的問題，另外也討論

了窮盡法的應用。

(3)11、12、13 冊：立體幾何，討論角錐、圓錐、圓柱等性質，也提到了窮盡法的應用。

(4)第 10 冊：不可測問題，類似無理數的性質。

Euclid 用了五個公設，五個公理與 23 個定義來公理化古希臘幾何，但 Pasch 覺得像 Euclid 規定點為不具有位置的，那等於沒有定義，因此主張點、線、面為無定義名詞，而 Hilbert(1899)進一步將歐氏幾何整理成 5 個公設，是一般認為將歐氏幾何的公理化做的最好的。根據這些公設，推導出一連串的定理，最後變成一套完整的理論，在因果之間確立了嚴密的邏輯推理，由此確立了數學為一門演繹的科學。

圖形與空間是我國的數學能力指標之一，Neap(2003)也將幾何與空間感納入評量內容，這是因為幾何學能提供多方面的訓練，包括觀察、猜想、描述、分析、歸納、邏輯推理與論證等數學能力，以及建築、設計、美學等生活上的應用。然而公理體系本身是很困難的學問，並不適合全部套用在教學上，因此平面幾何教材在國中階段應把公設、公理視為事實，或以實驗幾何的方式呈現，注重的是察覺幾何的不變性、引用事實或性質進行推理與簡單的幾何證明，並鼓勵學生以非形式或形式論證的方式來表達他的想法。

二、Van Hiele 的幾何思考層次理論

荷蘭數學教育家 Van Hiele 夫婦根據完形心理學的結構論，以及皮亞傑 (J. Piaget) 的認知理論 (Moline, 1990; Van Hiele, 1986)，提出五個層次的幾何思考模式，在幾何發展的相關研究中被廣泛地使用 (Hoffer, 1983; Battista, 1994; 吳德邦, 民 92)，依次敘述如下：

層次 0. 視覺與辨識期 (Visualization / Recognition)：

學生能根據圖形外觀，辨識並操弄各種形狀的圖形(如正方形、三角形)，同時進行簡單的命名與構圖。(如線、角、方格)。

層次 1.分析與描述期(Analysis/Descriptive)：

學生可以分析圖形的組成元素，和這些元素之間的關係，且能發現某種圖形的特性，利用此特性解決問題。(例如：可以發現三角形有三個邊，四邊形有四個角，圓形沒有角，故可以滾動)。

層次 2.非形式演繹期(Informal Deduction)：

能根據圖形性質形成定義，藉由非形式化的推論，將之前所發現之性質分類(例如：等腰三角形底角相等)，並能跟著做演繹推論，提出論證結果。

層次 3.形式演繹期(Deduction)：

學生能在一個公設系統中，建立定理系統間的關係，並辨認無定義名詞、基本定義、做必要的假設，邏輯地解釋一個幾何敘述並能自行寫出一個符合邏輯的演繹證明。(例如：以論述的方式證明畢氏定理)

層次 4.嚴密期(Rigor)：

學生能在不同的公設系統中建立定理，分析與比較這些系統。(例如：歐氏幾何與非歐幾何)。

這些層次能清楚的描述人類幾何概念的發展，而且各層次之間具有以下的通性：

1.序列性(Sequential)：

學生的幾何概念層次發展有一定的順序，需具備低層次的概念後，才能發展出更高層次的概念。

2.階序性(Advancement)：

學生透過有效的學習，具備這一階段所設定的相關技能與知識，才能銜接下一層次的教學內容。當教師用任何方法都無法令學生學會，就必須退回到前一層次補足學生欠缺的技能或知識。

3.隱顯性(Intrinsic and Extrinsic)

前一層次設定的能力與知識，在下一層次將隱藏而成內在物件，

學生不需刻意思索便能自然的操弄或提取。如：層次 0 時知道正方的外貌與名稱，到了層次一分析其性質時，外貌與名稱就成了內在的理解。

4. 語言特性(Linguistics)

每一層次使用的語言與符號均不相同，使用的模式也會改變，學生進入下一層次時需重新調整或修正。如：層次 2 時教師接受學生利用口語或操作的方式進行說明，到了層次 3 即不能接受這樣的論述方式，需轉化成形式證明的模式。

5. 教與學的不配合(Mismatch)

若教師設計的教學層次與學生所屬的層次不合，則教學效果與學習歷程將不會發生。例如：教師以形式證明的方式進行教學，當學生只停留在實驗說明的階層，教師與學生是無法溝通的，學生在無法理解的情形下學習當然沒有效果。

根據 Van Hiele(1986) 的理論，教師需透過對學生的觀察與本身的教學經驗，釐清學生所屬的層次，並依此層次對應的認知能力設計適當的教學內容與教學方式，才能產生良好的教學成效。

三、Van Hiele 的五階段學習模式

為了使學生能由低層次順利提升至高層次，Van Hiele (1986) 提出「五階段學習模式」(five-phase learning model)，提供教師適當的教學方法協助學生進行學習。分別為：

1. 訊息探究(information)：

教師在教學前，經由觀察與提問來了解學生的先備知識，判斷學生所處的幾何思維層次，作為教材與教學方式的參考。此時教師的角色是透過對話讓學生知道教學內容的背景與方向，並適時的介紹此階段需學習的新用語或符號。

2. 直接引導(guided orientation)：

教師提供教具或資訊讓學生直接接觸，透過操作、閱讀與探索的過程將學生導引至相關的主要概念，對這些概念建立基本的架構與學習方向，因此設計的教學活動以強調概念的獨特性為主。

3.自我表達(explicitation)：

學生由活動中獲得一些想法，其中部分與主要概念有關，部分需要修正。教師需提供充分的機會讓學生表達，讓學生獲得談論與分享幾何概念的經驗，適時點出與主題相關的想法，並對學生的不當用語稍做修正即可。

4.自由探索(free orientation)

教師斟酌學生的概念理解狀況，提供具挑戰性的題目讓學生發揮探索的本能，利用學生的求知慾增加學生的學習興致。開放探索的教學過程提供學生多樣化的思維路徑，這樣的經驗能讓學生更注意到與主要概念相關的想法，同時幾何思維與解題能力也趨於成熟。

5.統整(integration)

學生回顧此階段的學習過程，整合探索與討論的經驗成為完整的新概念。教師提供整體的概念讓學生自行印證與調整，重點是此時不能呈現任何新的事物，以免妨礙學生對此概念形成共識。

Van Hiele (1986) 認為幾何思維層次的提升需仰賴教學，而成功的教學活動才能達到教學目標。如何讓教學活動成功呢？研究者認為，由以上的「五階段學習模式」，可以發現師生的互動與討論是教學活動成功的主要因素。國三學生的幾何發展層次，屬於非形式演繹至形式演繹的過渡期，配合層次之間的通性並參考「五階段學習模式」，教師進行教學活動時應注意以下幾點：

- 1.討論時使用的語言與符號必須是師生認同的。
- 2.概念的啟蒙例必須是直接明確的。
- 3.師生對話的時間必須是充裕的。
- 4.教師的提問必須具備整體性的考量。

5.教師的角色必須是引導與輔助兼顧的。

四、幾何圖形的瞭解

幾何學習必伴隨圖形的輔助，甚至能由學生對圖形的描述，得知學生瞭解幾何概念的狀況。例如：能根據題意繪出參考圖，能做出正確的輔助線，能以符號標示出相關的幾何性質等等。Duval(1995)認為幾何圖形的瞭解(apprehension)可分成以下四種：

1.知覺性的瞭解(perceptual apprehension)

我們以視覺在平面或空間辨識東西。察覺到的圖案所顯示的東西，是根據圖案的組織規律或是圖形提供的暗示來決定，經過無意識整合的結果，使得察覺的圖案和視覺圖像不同。雖然已察覺到的圖形性質不變，但視覺影像卻能改變，此時我們仍能叫出辨識物的名稱(如旋轉、翻轉正方形，視覺上的圖案改變，但認知的性質不變)。我們可以區別和辨識所察覺到圖形的一些子圖形，平坦或有深度，這些子圖形可能像是一些不需要依靠圖形建構的成分。幾何圖形包含的圖形單位或子圖形，常比本身建構所用的更多。例如：圓形在圓與三角形建立關係後，稱為外接或內切圓，圓心稱為外心或內心。圓與三角形的關係不變下，圓可以放大縮小，三頂點或切點可以為動點。我們可以區別何種情況下此種圓與三角形的關係被破壞。

2.序列性的瞭解(Sequential apprehension)

無論是構圖或描述圖形建構，都需要瞭解其序列。不同的圖形單位各有特殊的順序浮現。此時圖形軌跡(或基本的圖形單位)的組織並非依靠知覺的規則和線索，而是技術的限制與數學的性質。技術的限制隨構圖工具不同而改變，如：尺、圓歸、幾何軟體中可用的設定。相對的，徒手畫就沒有工具上的限制。工具的限制能產生回饋，若沒有顧及工具的限制與圖形性質之間的關係，則設定的圖形無法被瞭

解。在這情況下，幾何圖形像是一個模型在活動中運作，並觀察到與數學表徵物的操作相關的結果。若有時非透過屬於所求圖的圖形來運作，序列性的瞭解將與知覺性瞭解產生分裂。例如，給一個三角形與其外接圓，知覺性的瞭解可以辨識出一個三角形與一個圓、圖形的大小、三角形是鈍角三角形、三角形的三個頂點落在圓周上；而構圖性的瞭解需先決定順序，先畫三角形還是先畫圓形（只有直尺與圓規），先畫三角形的話需要兩條中垂線來決定圓心位置，先畫圓形的話三頂點位置需在一直徑的同側才能構成鈍角三角形。所以知覺性與構圖性瞭解過程中出現的圖形不同，構圖性的瞭解將與知覺性瞭解產生分裂。

3. 論述性的瞭解(Discursive apprehension)

在繪圖中呈現的數學性質無法由知覺性的瞭解來決定。有一些必須透過口語（命名與假設）呈現，另一些由其他的性質導出。沒有命名與假設的繪圖是不明確的表徵，以致於並非每個人看到的性質或事物會一樣。（假設給一個圓…；假設給一個三角形…，雖有一樣的圖形卻得到不一樣的性質）班上的某些學生會說：「有兩條幾乎平行的線」，無論認定平行或不平行都可以（知覺上的認定）。事實上推理上的爭議在於第一句如何認定圖形。在任何幾何的表徵中，幾何性質的知覺認知仍然在敘述的控制下。這些推論的敘述決定了圖形所表徵的意義。我們可以將圖形的呈現與圖形所表徵的意義做出區隔，察覺到的圖形呈現不需要有意識的分析，已辨認的圖形或物體具有從察覺中導出的意義。察覺到的圖形所表徵的意義由言語行為來決定，例如透過命名、定義、選單上的設定。構圖性的瞭解在知覺瞭解不變的情況下仍可改變，因為只要修改同樣圖形的起論條件或假設即可。（例如：外心、外接圓的命名需由老師的言語決定，否則學生知覺性瞭解只能察覺三角形與圓形，且外接圓圓心對學生也不具意義）

4. 操作性的瞭解(Operative apprehension)

透過操作性的瞭解，當我們看圖形時可以洞察到它的解。操作性的瞭解是依靠以各種方法對給定的圖形加以修改。

割補方式：將給定的圖形切割成幾個部分的各式圖形；或是將幾個圖形（或子圖形）拼補成一個圖形。

光學方式：將一個圖形放大、縮小、鏡射與傾斜（投影點的改變）。

位移方式：在平面或螢幕上改變位置或方向。

透過操作，這些不同的修正可以在心智上或實物上完成。這些操作構成特定圖形的加工，提供圖形啟發的功能。在幾何問題中，一個或多個操作能突顯出一個修正的圖形，提供解題或證明中主要步驟的建議。這就是圖形能提供洞察出題解的方式。

國內外的研究指出（譚寧君，民 82; Battisa, 2001），教師時常要求學生記憶許多抽象公式，或著重於學生能否列出幾何的定義與屬性，而忽略學生建立幾何概念歷程的重要性，這樣的幾何教學方式會阻礙學生培養推理思考與解決問題的能力。Van Hiele（2003）認為幾何概念發展是由遊戲中開始的（*geometry begins with play*），Duval(1998)也提到圖形的操弄具有啟發性，因此教師應配合學生的程度，設計適當且生動有趣的教材，採循序漸進的方式，誘導學生體會幾何概念的建構模式，培養數學思考的能力。

五、幾何學習活動的認知模型

Duval（1998）認為個體在進行幾何學習活動時，主要引入的認知歷程有三種，其類型與說明如下：

1. 視覺化（*visualization*）：對於圖形空間的表徵的認知，可能針對複雜的情境作啟發性的探究，可能只是概要的掃視或主觀的確認。
2. 構圖（*construction*）：根據作圖工具對圖形的再製過程，由相關的結果去發現數學物件所表徵的幾何意義。
3. 推理（*reasoning*）：在推論的過程中為了擴展知識、證明或解釋，而

從給定的訊息中形成新訊息的歷程。

由上述的說明可知，視覺化、構圖、推理分別與知覺性、構圖性、論述性理解具有密切的關係。圖形理解強調個體進行學習活動時，對圖形表徵的各種理解方式，而視覺化、構圖與推理等歷程則著重於個體思維運作的呈現，其仍分別以三種認知理解為基礎。這三種歷程可以被分開執行，例如：學生能在沒有畫出正方形的情形下，說出正方形的四邊等長。因此無論有沒有完成構圖，視覺化歷程仍然能完成。雖然某些情境下這三種歷程可以被分開執行，然而在大部分的幾何問題情境中，此三種歷程中的兩種或全部將會緊密的連結在一起以成為學習活動所必要的認知歷程。Duval(1998)認為此三種歷程的交互作用模式如圖 2-5-1：

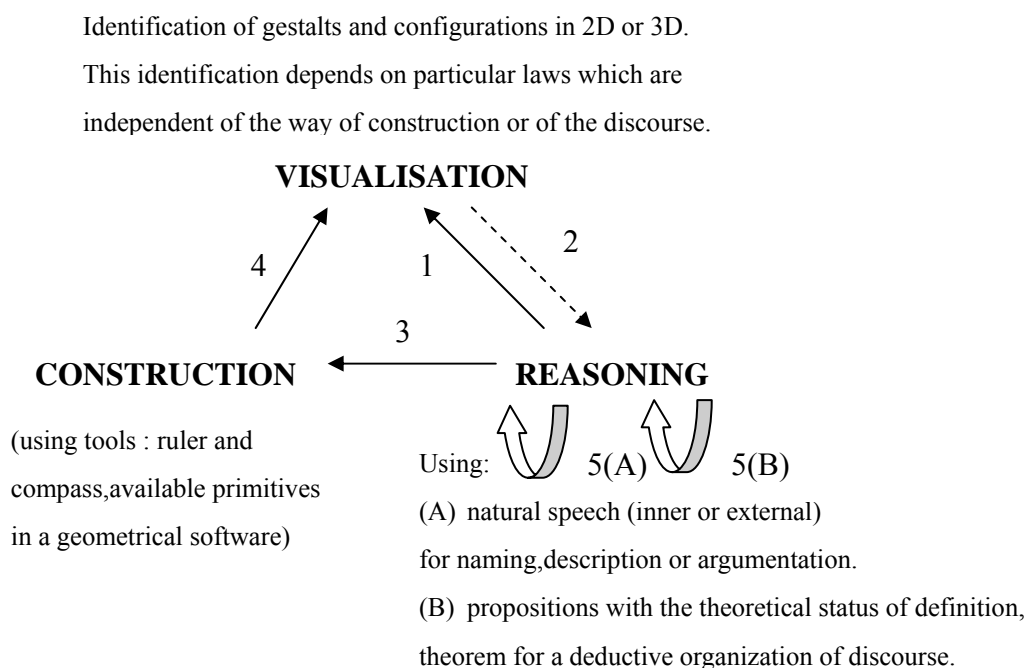


圖 2-5-1 幾何學習活動中的基本認知互動圖

圖 2-5-1 的箭號表示某個歷程可以輔助另一個歷程的運作，其中箭號 2 為虛箭號，意義為視覺化歷程雖可輔助推理歷程的產生與運作，但卻不一定有效。至於箭號 5(A)與 5(B)則強調推理歷程的形式有兩種，可獨立運作；其中 5(A)為個體使用自然的語言以進行命名、描述與討論，而 5(B)則是以定義、定理等理論層次的命題進行論述的演繹與組

織。

由圖 2-5-1 及上述說明可知，構圖與推理歷程皆可輔助視覺化歷程的產生與運作，然而構圖歷程僅依賴構圖工具的限制與數學性質，因此推理歷程可輔助其產生與運作，但視覺化歷程則無此功能。推理歷程主要的運作基於自然或數學的語言，雖然視覺化歷程有時可提供個體對問題的解答獲得重大啟發，但有時不但無法提供協助，甚至還會產生誤導；至於圖形的構造歷程並沒有提供推理歷程任何的輔助。根據研究者的教學經驗，學生不會操作構圖工具或不熟悉尺規作圖的流程，並不會影響學生視覺化或推理歷程的發展，但是提供附圖的題目有助於學生思考與瞭解題意，提高學生的解題信心，因此，鼓勵或要求學生自行畫出參照圖，能協助學生產生連結，提高解題與論證的能力。

第三節 教學與診斷

研究者在現實的教學環境中，一方面受制於有限的教學時數，一方面希望能讓學生發展有意義的學習，因此採用講解釋教學法進行三角形外心與內心的教學，並在教學後尋求有效的診斷工具，探究學生的學習困難與原因，以便作為補救教學的依據。

一、講解式教學法

美國認知心理學家 Ausubel(1968)提倡「有意義的學習」和「講解式教學」。他認為接受式學習(灌輸式學習)比啟發式學習能使教室中學生的學習更有意義，特別是大部分的學校仍採用此教學方式，而主要原因是學習者的時間效益與利於團體教學(Guy R,1997)。以下分別敘述他的學習觀點和教學理念。

(一)有意義的學習(meaningful learning)

所謂「有意義的學習」，是指學習材料以非獨斷的（有理的、明顯的、非隨機的）、真切的（非逐字的）與任何合適的認知結構相互關連（Ausubel, 1968）。所謂「非獨斷」（nonarbitrarily）是指材料與材料間合宜的關連；「真切的」（substantively）是指材料與認知結構以非逐字的方式相連，可能是某個意像、或有意義的符號、概念或命題（Ausubel, Novak, & Hanesian, 1978）。當學習者的認知結構中具有相關的定錨觀念（anchoring ideas）時，新的學習材料可以與舊知識相互關連，同時規劃的教學理論和方法必須與教室內學習過程的性質相關（Ausubel, Novak, & Hanesian, 1978）。也就是說，學生接受的新教材能與舊有知識（或結構）產生連結，並在適當的教學活動中進行，稱為有意義的學習。

相反的，「機械式學習」是指學習者無法將新的學習內容與其舊經驗取得關聯，於是偏重機械式練習、從事零碎知識的記憶。在這樣學習方式下，知識即使被記住，仍處於孤立的狀態，而無法融入學習者原有的認知結構（我們常稱為死記）。Ausubel(1968)並未把「有意義的」與「機械的」學習作截然的二分，而是將兩者視為一個連續的向度，他認為許多學習是兼具「有意義的」與「機械的」兩種性質，只是程度上的多寡而已。

(二)講解式教學(expository teaching)

Ausubel(1968)根據其主張的「有意義學習論」，而倡導「講解式教學法」，主張全部學習訊息以最終形式向學習者提示。教學以聽講的模式進行，而教師的責任即是解釋教材，因為只要教材的組織形式和提示方法適當，解釋法和發現法一樣皆可產生更多的學習保留。講解式教學法的教學流程包含四個步驟：

1.考慮學生的「學習準備度」(readiness)

「學習準備度」即是相關先備知識呈現的狀態，包括知識、技能、經驗、學習發展層次等等。新的學習必須與舊經驗相連才有意義，因

此主張教師在教學前，可透過正式的「前測」或是非正式的「口頭問答」，確定學生是否有足夠的先備知識包容新教材（Ausubel,1978），然後據此決定教學目標與教材內容。若先備知識不足，則應透過「前導組織」提供相關的背景知識。

2. 「前導組織」(advance organizer)的呈現

為導引學習者將新的學習內容與其原有認知結構連結，Ausubel（1978）設計了兩種「前導組織」。當學習材料是學習者陌生的內容時，可用「說明式架構」提供適當的先備知識，包括為新的概念下定義，陳述一個原則，或是提供一段相關的背景知識。當學習材料與學習者已有知識或經驗相關時，可用「比較式架構」使新舊知識發生關聯，包括圖形的比較，數量的比較，方位的比較等等。

3. 以「漸進分化」的原則編織與呈現教材

Ausubel（1978）認為知識在個體的認知結構中是以層級組織的方式儲存，他堅信各個學科的知識，也都以此種方式來組織。Ausubel認為學習者的認知結構中，較高抽象性與概括性的概念，可提供現成的掛鉤（hook），掛上較具體特殊的訊息，因此新訊息較容易為學習者同化與保留。教學時先配合「前導組織」所呈現的架構，再採「漸進分化」的方式呈現教材，這種從一般性概念到詳細內容的講解，從概括到分化的教學活動，稱之為「演繹式」的教學順序。

相對於由上至下的「演繹式教學」，由下至上的「建構式教學」則持完全相反的態度。國內學者張靜馨（1996）將建構主義內容歸結成三大原理：(1)知識是認知個體主動的建構，不是被動的接受或吸收；(2)認知功能是用來組織經驗的世界，不是用來發現本體的現實；(3)知識是個人與旁人經由磋商與和解的社會建構。因此在學習活動中每個學生都在組合、轉換，或忽略部分傳遞訊息的意義，所以每位學生所持的看法與解題角度都有所不同(Von Glasersfeld,1989)。

4. 以辨別異同促進「統整融合」

所謂「統整融合」是指教師在呈現教材時，應協助學生釐清學習內容中各項事實、概念、和原則彼此間的關係（包括平行和上下從屬關係），並對學習內容中重要相似及相異點進行比較，以便將各個內容要項之間的關係統整後，清晰而穩定的融入學習者的原有認知結構。

在「漸進分化」和「統整融合」的過程中，Ausubel（1978）相當重視「實例」（examples）的運用，包括圖示在內。例如：在數學課，要求學生舉出教室內有關長方形的例子。Ausubel（1978）認為「實例的應用」有助於學生切實瞭解各個概念與原則。並且所舉的例子必須是學生所熟悉的，才有意義。除了教師講解外，Ausubel（1978）也鼓勵班上進行分組討論及其他學習活動。認為這些方式（包括舉例），都有助於學生透過自己的經驗來了解學習內容，符合有意義學習的原則。從 Ausubel（1978）主張中，不難發現學習並非單向，也非被動。相反地，學生往往被要求回答問題，自行舉例，進行比較等，師生互動頻繁。

研究者在「外心與內心」的教學採用講解式教學法的精神，在現實的狀況下，以有限的課程規劃上述的四個教學流程。簡述相關的教學的步驟如下：

- 1.考慮學生先備知識決定教學目標：根據能力指標、南一版數學第五冊內容與研究者本身的教學經驗，並配合學生的先備知識訂出教學目標。
- 2.決定「前導組織」規劃教學內容：由學生國一時對圖形的印象引入，先介紹圖形的名稱(如三角形的外接圓)，再定義外心(外接圓圓心)。引用中垂線的性質證明中垂線的交點為外接圓圓心，根據圓周角的性質解釋外心的位置。內心的教學方式與外心相同。
- 3.配合外心與內心的性質，由易至難設計不同層次的應用題供學生練習。

4.整理外心與內心的概念與性質並進行比較，以加強學生的印象。

二、診斷學生的概念

(一)概念的瞭解

學生在教學活動後沒有達到預期的教學目標，可能的原因很多，例如：活動進行時沒有全力參與，學生產生自發性的迷思概念，教材設計的思考層次與學生不符，教學情境不理想等等。研究者認為根據學校的現實狀況，教學進度與教學目標不可能大幅調整，而班級的人數過多，教師也不可能在教學活動後為每個學生做個別診斷，因此本研究探討的學習困難主要原因，指的是大部分學生在正常教學下概念形成的困難，而不探討教學活動的進行、教案設計的方式、教材內容、教學情境等因素。

如何診斷學生概念形成有困難呢？可以由學生對概念的瞭解程度來判斷。White & Gunstone(1992)(引自陳世峰,民91)認為要瞭解學生的概念可以從六個面向來看：

- 1.學生所陳述自己的意見和信念：不管學生陳述的對不對，這些想法和信念都存在於他們的內心並影響他們對概念的瞭解。
- 2.學生限制用法（string）的陳述：所謂的限制用法是只要有固定的陳述方式，例如格言、九九乘法表、詩文。陳述意見和信念是將意義轉譯（encoding）成自己的話表現出來；限制用法有固定的格式，而且表達也必須要有固定的格式。
- 3.學生的意像（image）：意像是感覺或知覺的心智表徵，通常以視覺的型態存於內心。意像可以和一個人內心的想法連結。
- 4.學生歷史經驗的插曲（episodes）：歷史經驗的插曲乃是存在於記憶中的事，那些事是曾經發生的或是親眼目睹的。
- 5.學生智力的技能（intellectual skill）：也就是能運用課堂上所學的知識之能力。智力的技能是口語陳述和實際應用的分水嶺，這可以用

來瞭解學生的概念。

6.學生動作技能 (motor skill)：擁有此技能的人，他知道如何做，但他卻不知道如何描述。動作技能的定義和智力技能的定義是一樣的，也就是應用課堂上所學知識的技能，但是此技能重視實際的過程，而較不重視心智的過程，也就是實際的應用重於口頭的知識的陳述。例如一個人是很難將如何騎腳踏車用文字陳述出來。

我們可以說，若學生對一個概念六種型態的能力越豐富，六種能力間的連結越緊密，則學生對概念越瞭解。

本研究是針對學生幾何概念，因此需考慮相關的數學能力與幾何學習的特殊性。NAEP(1996)對概念理解的解釋包括：

- 1.能辨識、指認和舉出實例或反例。
- 2.能運用有關概念的模型、圖表，及各種表徵。
- 3.能指認並運用有關原理。
- 4.能知道事實與定義以說明概念。
- 5.能比較、對照並統整相關概念與原理。
- 6.能指認、說明，及應用有關概念的符號或術語。
- 7.能解釋數學概念有關的假設與關係。

除此之外，NAEP(1996)認為數學能力包括過程知識與解題能力，與幾何直接相關的有：

- 1.符號運用方法過程的正確性或適切性。
- 2.能運用不同的數學邏輯以有效地解決數學問題。
- 3.能執行幾何構圖。
- 4.推理與分析的能力。
- 5.能判斷問題、答案或方法的正確性。
- 6.能空間推理、歸納推理、演繹推理、統計推理及比例推理。

(二)診斷工具

為了診斷學生是否有學習困難，概念不瞭解的程度與原因，研究

者需要一套有效的診斷工具。郭重吉(1980)、郭重吉和江武雄(1993)曾對研究概念認知的方法作一有系統的整理，並將研究概念認知的方法分為陳述性知識、程序性知識及臨床晤談三類，各類常用的方法為：

- 1.陳述知識的評估：作概念圖、紙筆測驗等
- 2.程序知識的評估：放聲思考的原案分析、誘發回憶等
- 3.臨床晤談：事例晤談、事件晤談、證明觀察解釋(Demonstrate, Observe, Explain)晤談(簡稱DOE 晤談)及預測觀察解釋(Predict, Observe, Explain)晤談(簡稱POE 晤談)。

張惠博(1999)整理國外有關迷思概念研究的方法，歸出下列六種方法：

1. 診斷式的傳統測驗題：用於大量施測。
2. 概念圖法：展現概念關係之測量方法。
3. 晤談法：對個案學童進行事例或事件晤談。
4. 關係圖法：如單字聯想、樹狀圖、圖形建構、網狀圖、語意分析等。
5. Vee圖：利用集合關係圖來推論學生根據何種概念、原理、理論來支持其想法。
6. 二階段式測驗(Two-tier Test)：第一階段以選擇題診斷學童對科學概念之理解，第二階段再以問答題來根據學童之說明探索學童對概念之真正想法。

研究者對二階段式測驗最感到興趣，因為Treagust & Haslam (1986)認為傳統的診斷工具無法瞭解學生填答背後的真正原因與學生的另有概念，兩階段式(Two-tier)評量診斷工具卻能有效的改善了這些缺點，且相對於晤談法具有更高的時效。然而二階段式測驗也有其缺點，根據Griffard & Wandersee (2001)的研究，發現施測過程學生會把此二階段評量診斷視為考試，尋找類似正確答案或較符合邏輯的答案，並非反應自己腦海中的真正理由，而且如果施測者與學生不認識，學生可能會隨便亂答。另外，施測的結果可能將學生的另有概念估計過高或低估了學生的知識，且理由的敘述會為了配合選擇

題而調整原有的想法。

Haury(1993)指出各種評測工具皆有其限制，評測工具的必須能夠反應出學生概念的特性。因此研究者嘗試以問答題診斷學生的學習困難，並以選擇題分析學生學習困難的原因，根據預試結果規劃以下內容：1.問答題包括概念與論證兩部分。2.選擇題以預試結果中將發現的困難原因為依據，設計問題進行全班的調查與分析。3.實施訪談，深入瞭解個人學習困難的因素。

第四節 類比學習

類比是科學三大思考技巧(演繹、歸納、類比)中最具創造力，同時也是最無跡可循的，最難以捉摸的技巧(李靜、宋立軍和張大松,1994)。Duit (1991)認為類比在概念改變上是重要的軸心，因為它可以同時再建構新、舊兩個資訊。Glynn(1989)認為類比推理對於學習者的理解能力或解題能力都有顯著的幫助。Brown 和 Clement(1989)在其研究中發現許多的類比對學習並無幫助，可能是類比物並非是學習者熟悉的，或是類比物與目標物的類比關係並不明顯，使類比思考無法發生。由於類比教學並非適用於所有的教學內容，同樣的，並非所有學生接受一樣的教材均會發生類比學習，因此教師需考慮多方面的因素，讓類比學習發揮功效。

一、類比對應理論

(一)Gentner之結構對應理論

Gentner(1983)結構對應理論(Structure Mapping Theory, SMT)，指出兩個知識領域對應是透過結構上的關係而非屬性。Gentner(1983)基於心智模式，認為領域知識可表徵為包括節點(nodes)和述詞(predicates)的命題(proposition)網絡，並將述詞(predicates)

區分為屬性 (attribution) 和關係 (relation)，其中屬性 (attribution) 是指僅包含一個論證 (argument) 的述詞；關係 (relation) 則是包含兩個或兩個以上論證 (argument) 的述詞。因此領域 (domain) 和情境 (situation) 可視為物件 (object)、物件屬性與物件關係所組成的系統。依據此假設前提下，結構對應理論 (SMT) 指出類比的規則取決於知識表徵的語法 (syntax) 結構而與其內容無關。因此在對應時，應該會捨棄物件屬性的對應，而尋求物件間的關係，並且一組有關聯的關係結構 (亦即具有高階關係的系統性原則) 會比單獨的關係更容易產生對應 (高淑芬、邱美虹，1998)。

(二) Holyoak 與 Thagard 的限制滿足理論

Holyoak 與 Thagard (1990；引自高淑芬、邱美虹,1998) 提出平行限制滿足理論 (Analogical Constraint Mapping Engine ,ACME)，認為類比應受到三種限制：同構性 (isomorphism)、語義相似性 (semantic similarity) 和實用性 (pragmatic centrality) 所決定，其中同構性是指兩者的對應具有結構性及一對一的特性，語義相似性則單指意義上的重疊，實用性則是依使用的目的而發展出不同的類比對應。

(三) Keane 的累進理論

Keane (1990；Keane, Ledgeway & Duff, 1994；引自高淑芬、邱美虹，1998) 認為上述結構對應理論和限制滿足理論，僅考慮到訊息層次的限制 (同構性、語義相似性和實用性) 而已，而累進理論主張類比的限制應該包含訊息和行為限制兩個層次，其中行為層次的限制考慮到工作記憶的限制、背景知識的影響。其中，工作記憶的限制，會使得某些訊息的遺失，而影響到類比運作的過程；當背景知識與對應部分相符合時，花費時間較短，但當背景知識與對應的結果相衝突時，很有可能產生錯誤。

根據以上相關的類比對應理論，研究者認為外心與內心的教學實驗的確符合幾個重要的條件：

- 1.外心與內心的教學目標與教學流程具有同構性。
- 2.外心與內心的性質敘述具有語意相似性，如三中垂線(角平分線)共點，外接圓（內切圓）的圓心稱為外心(內心)。
- 3.構圖技能與先備知識相對應，能縮短類比運作的過程。
- 4.學生可參考外心概念系統，進行內心概念的類比，避免工作記憶的限制。
- 5.外心與內心教材應設計成相同結構、具關連性的系統，讓學生更容易發現對應關係而產生類比遷移，建立知識之間的關係。

二、類比推理的過程

類比遷移是否成功，與類比的過程有關，因此需瞭解類比過程具有哪些成分。

(一)成分分析理論

Sternberg (1977) 認為類比是在 $a:b::c:d$ 的類比題中，找出「 $a:b$ 」的關係，並將其關係對應到「 $c:d$ 」的關係，使兩者關係具有某種程度的相似性與關聯性。Sternberg (1977) 以訊息處理觀點，提出成分分析理論 (Component Theory)，分析類比問題中類比推理的過程包括以下六個運作成分 (引自黃幸美，1994)：

- 1.編碼 (encoding)：辨認類比題目中A、B、C、D 四個項目的相關屬性，並提取其意義，存至工作記憶中。
- 2.推論 (inferring)：建立A 與B 的各種關係，並儲存工作記憶中。
- 3.對應 (mapping)：發現A與C 的各種可能關係。
- 4.應用 (applied)：應用推論所得的各種關係，來對應C 與D 的關係，以尋找正確答案D。
- 5.辨明 (justified)：從所提供的各種選項中，刪除與D 不相同的答案。
- 6.反應 (response)：將答案反應出來。

Sternberg (1977) 將類比執行的方式分成兩種：

1. 自我中止式 (self-terminating)，即一次只引出一種關係和屬性，然後重複此種方式推論，直到找到理想的答案為止。
2. 整體完全式 (exhaustive)，即開始解題時立刻引出所有的屬性和關係，而不管這些關係和屬性是否為答案所需。

他認為兒童可能因為工作記憶負荷量有限，或概念性知識的理解程度不足，偏向以連結的方式解題，並未推論所有可能的關係，屬於自我中止式，而成人則剛好相反，屬於整體完全式。

(二) 基模歸納理論

Holyoak認為類比推理的核心，在於來源問題(source problem)與標的問題(target problem)的對應，確認出成分屬性、目的、功能等表徵之對應後，將已有的知識遷移到待解的標的問題來解題。雖然兩者的訊息結構不完全相似但具有某種程度的關聯性。Holyoak等人(Gick & Holyoak,1983；Holyoak & Koh,1987) (引自黃幸美，1994)

提出基模歸納理論，認為類比推理包括以下五個基本歷程：

1. 建立表徵：將來源與標的的訊息，建立心理表徵。
2. 注意並提取類比表徵：注意來源，提取或選擇可用的類比表徵。
3. 對應：將來源與標的的類比表徵進行對應。
4. 類比推理或遷移。
5. 後續學習與應用，擴展對應所產生的解決方案。

除此之外，推理者需注意並選擇重要的成分表徵，避免被表面的相似性誤導，是類比解題的成功步驟。而抽象的問題表徵是類比遷移的媒介，包括知識內容在記憶中建構的形式與知識結構表徵，其中最普遍的問題表徵為觀念與程序。

由以上兩個理論，可解釋教師提出的範例，未必能達到讓學生「理解概念」的目的，學生可能只有察覺表徵，產生對應，卻未必能成功的進行類比推理或僅完成部分的推理。

三、類比教學模式

(一)GMAT

Zeitoun (1984; 引自郭人仲, 1993) 根據基模理論為基礎, 考慮學生的能力、類比的適當性和呈現方式, 最後評估類比並加以修正, 提出完整的類比教學模式 (The General Model of Analogy Teaching, GMAT), 其教學步驟如下:

- 1.測量相關的能力, 包括: 類比推理能力, 認知發展層次, 圖形操弄與心像能力等。
- 2.評估學生先備知識。
- 3.分析新事物的內容。
- 4.判斷類比的適當性。
- 5.決定類比的特性。
- 6.選擇教學策略和類比呈現的媒體。教學策略包括: 學生自發性類比策略、引導式教學策略、說明式教學策略等。呈現類比物的媒體包括: 板書、口頭說明、示範、角色扮演、遊戲、模型、圖片、照片等。
- 7.呈現類比物給學生, 順序為: 呈現欲學習的新事物 (須在學生熟悉類比物的情況下呈現, 否則必須教到學生熟悉為止); 呈現連結類比物和新事物的敘述; 提出類比屬性 (尤其是明顯可觀察或重要的屬性); 呈現類比遷移的敘述, 轉移學生的注意力; 提出不相關屬性, 改正學生可能產生的另有概念。
- 8.評估類比的成效。評估範圍包括: 學生能否利用類比來學習新事物、學生對新事物的瞭解、學生於學習過程中是否產生另有概念。
- 9.由學生的回饋修正教學模式。

(二)TWA

Glynn (1991) 提出另一套類比教學模式 (The Teaching With

Analogies Model, TWA) , 其主要的教學步驟如下：

1.介紹目標概念。2.喚起類比物概念。3.確認目標物和類比物的概念相似性。4.對應相似性。5.引出概念的結論。6.指出類比的失效。

(三)FAR 導引模式

Treagust, Harrison與Venville (1998) 藉由分析五位教師來修正TWA 模式 (Glynn et al.,1989) , 修正TWA 模式忽略的課程計劃與課後反思, 認為教學前、中、後期應該分別注意聚焦 (Focus) 、行動 (Action) 、反思 (Reflection) 三個面向, 簡稱FAR, 分析如下：

1.聚焦(教學前)

教材內容：教材所屬的認知層次、與類比物的相似度、需要的知識與能力。學生背景：學生所處的認知層次、起點行為、相關經驗、學習態度與教學情境。

2.行動(教學中)

正向思考：教師是否呈現教學計畫中所有的類比關係，學生於教學互動中是否達到類比學習的預定程度。

逆向思考：教師是否指出學生可能發生的錯誤類比行為，學生是否能分辨由不當類比產生的另有概念。

3.反思(教學後)

教師：學生透過類比形成的新概念，是否與教學目標相符，如何修正或補救？學生：對類比學習的感受為何，能否將類比學習的技巧使用在其他領域或新概念？

研究者欲進行外心與內心概念的補救教學，重點在於重建學生概念中性質之間的關係，並透過類比遷移讓學生經歷如何統整相關知識成為有系統的概念。因此參考GMAT與FAR的教學步驟，採用學生自發性類比策略，讓學生自行完成內心概念的結構。

四、類比教學的成效與影響類比教學因素

Gentner等人(1997)指出創造力是深層結構表徵的表現，在結構性的表徵中，高階關係的結構可以容許兩個截然不同的信念，迅速產生概念的改變。Gentner等人認為在許多學習機制中，類比是唯一提供自我產生較大尺度知識的轉變。因此，有對應關係的概念透過類比學習能產生結構上的改變。教師可多利用類比策略進行教學，啟發學生想像的空間，連結已知的概念到待學的概念上，達到概念學習或概念改變的目的(邱美虹,2000)。Venille與Treagust(1996)指出類比對於概念改變有以下四種不同的角色：

1. 幫助理解，從類比領域到目標領域來遷移概念的基本結構，促進對新科學內容的理解。
2. 幫助記憶，幫助學生回憶很難記憶的概念。
3. 幫助轉換，加速概念從物質本體類別轉換至過程類別中。
4. 激發動機，增進學生學習的自我效能和自信心。

Duit(1991)認為類比有以下的優點：

1. 類比是概念改變的有效工具。
2. 類比能透過真實世界的相似實例了解抽象觀念。
3. 類比可以將抽象觀念視覺化。
4. 類比可以提高學生的學習興趣進而增進學習動機。
5. 應用類比會促進老師將學生的既有知識納入教學的考量。

雖然類比教學的成效獲得多位研究者的認同(郭人仲,1994; Duit,1991;)，但並非任何結果都符合預期，例如Gentner(1983)使用類比教學以水流或人潮解釋電流。Brown和Clement(1989,引自林建隆,民92)在教學實驗中提出下列幾點影響類比推理成效的因素：

1. 學生擁有很少或根本沒有靶問題的相關知識，對靶問題沒有概念。
2. 學生對源問題無法形成一個泊定的類比概念(anchoring conception)。
3. 泊定概念至靶概念間的中介類比(intermediate analogies)無法形成。

- 4.類比推理須要一個互動的教學環境，而不是只有教科書與講義的教學。
- 5.類比推理的結果，要真正出於學生自行組織與建構，不只是老師單方向的講解。
- 6.類比物必須適當並具備有效性。

除了以上的影響因素，研究者再根據其他研究的結果，列舉可能影響類比學習的因素：

(一)類比系統性：

系統性是指由一群彼此相關且能完整傳達目標概念的相似關係所組成的高階關係(high-order-relation)。吳正己,林挺裕(1998)以程式設計中的巢狀迴圈為教學內容，依類比的清晰度的高低與系統性的有無設計四組教材，探討類比清晰度及系統性與程式設計概念學習的關係。結果發現：

- 1.類比教材的清晰度與系統性對學習成就的影響並未顯著。
- 2.具高清晰度之類比教材能使學生發現較多的類比關係。
- 3.具系統性的類比教材較易使學生發現類比的高階相似關係。
- 4.能察覺類比清晰度與系統性的學生其學習成就較高。

(二)類比的表面相似和結構相似

表面相似是指探究來源問題和標的問題在表面上是否有映射關係。由於表面特徵較易捕獲，因此表面相似的類比最常被使用。結構相似是指其對應關係的產生，必須使得來源與標的物問題之間的基本原理、結構、規則或概念具有相似性。Gentner (1988) 發現孩童使用類比的方式與成人不同，五歲左右的孩童較易以物件的表面特徵做對應，而年紀較大的孩童或成年人則較易以物件的結構關係做對應。Gentner (1989) 指出類比的對應不需表面相似性的支持，但是對於生手和孩童而言，類比對應成功與否仍決定於其表面相似性，並且進一步指出這些表面相似性會導致錯誤推論。王婉馨(2005)研究國一學

生進行類比遷移時的表現，發現對於擁有成功地類比解題經驗的學生而言，若要將先前成功的經驗進行類比遷移，以解決後續「表似結似」的問題，並沒有太大的困難，但要將先前成功的經驗做適當的「調適」，來進行類比遷移，以解決後續「表異結似」的各類問題，相對地較為困難。因此建議學習歷程的初始階段，教師可以提供適當的提示，幫助學生「憶取」、「映射」、「調適」，以便進行類比遷移，在學生在擁有成功地類比解題的經驗後，針對後續各類「表異結似」的問題，教師在幫助學生學習如何「調適」的部分，應多多著墨。

(三)教師與學生的配合

Duit (1991) 認為類比教學失敗的原因來自於學生不了解類比，和無法推論類比的意圖。Flick (1991,引自蔡聰輝,民90) 從對學生晤談中得知，特別是在類比太遙遠和學生無法區分出想要學習的內容時，類比教學會失敗，甚至有些學生只記得類比卻不記得學習內容，有些聚焦在類比的其他部分而作出錯誤的結論，而引起另有概念。因此教師進行的類比教學時，除了讓學生充分瞭解教師的意圖為何，設計的教材能讓多數學生察覺類比對應關係，並要形成良好的互動教學環境，才能發揮類比遷移的效果。

(四)學生的學習條件

Van Hiele的幾何思考層次理論中提到學生必須靠適當的學習才能提昇層次，因此類比教學時所用的類比問題與標的問題若屬於不同的層次，類比學習的發生便有困難。其他領域亦是如此，例如郭人仲 (1994) 研究類比對於國中生學習生物概念的影響，結果指出類比對於學習具有正向的影響，其中發現類比對於形式操作期與具體操作期的學生有顯著的成效，但是對於過渡期的學生則無顯著的成效。此外，類比物的熟悉度與學生的類比經驗在類比教學中扮演催化劑的角色，若學生對類比物不熟悉，或類比學習的經驗不足，會直接影響類比教學的效果。因此黃幸美(1995)建議教師在類比教學時，一方面多

提供範例或線索，並以結構相似的類型為主，一方面注意生手與好的問題解決者之間，知識基模與解題歷程的差異，提升學生的先備知識與建構能力至一定的程度，才能使類比學習有正向的發展。

第五節 局部推理與模仿

國三學生的論證訓練以幾何推理的部分佔大多數，例如：全等三角形、相似形、四邊形與圓形等等，因此教師必須對幾何認知的過程有所瞭解。Duval(1998)將幾何認知過程分成三類，分別是：視覺化歷程、構圖歷程與推理歷程。

Duval(1998)認為推理(Reasoning)的意義廣泛，任何的進展、試驗和錯誤、或是解決困難的過程都是一種推理的形式，特別是由一個已知的資訊到新資訊的過程，如歸納、推斷等。他將與解題和證明有關的認知過程區分如下

- 1.單純的圖樣過程：以操作性瞭解來描述圖形
- 2.自然的推論過程：自然地用敘述、解釋、論辯等一般語言來表現。
- 3.理論的推論過程：以演繹來進行，可以單純的用符號表徵，也可以用語言來表達。

單純的圖樣過程隱藏在自然的推論過程中，而自然的推論過程又可區分出兩個組織層次(i)整體的層次：以圖形或一般語言，表達出具邏輯性且有次序性的三個敘述(ii)局部的層次：每個敘述可用非形式語言，如「和(and)」、或圖示表達出關係。而在理論的推過程中，更細分了三個層次(i)整體的層次：根據結論將每個步驟連結(ii)局部的層次：根據之前的結論、定義或定理等性質，將至少三個性質組織起來(iii)微觀的層次：必須能從被當成規則來用的性質中，分辨出被用來證明的部份和結論的部份。

曾政清(民 91)根據 Duval(1998)的理論設計局部推理的教學活

動，發展數學局部推理的教學套件(包括偵錯、排序、配對、接龍)，並評估數學證明教學實驗活動的成效。結果發現：局部推理小組合作學習較傳統教學有較佳的表現；局部推理能力的發展與數學證明能力的發展有顯著相關；局部推理小組合作學習在數學論證試題記憶性與數學證明能力推論的學習遷移性方面，均有較佳的學習成效。

研究者對局部推理的認知，從 2004 年參與陳創義教授主持的國科會專題計畫「九年一貫數學能力指標詮釋－國中平面圖形部分」開始，當時負責協助發展非形式論證過渡到形式論證的相關教學活動，如：下定義活動，包含關係之邏輯推理活動，配對、接龍、排序之局部推理活動，模仿與轉譯活動等等。我們希望能由活動中，找到適當的教學模式當作墊步，彌補學生於非形式演繹到形式演繹之間的學習落差。為了讓學生順利發展至局部推理層次，我們藉由少量步驟的證明活動提高學生論證的信心與興趣，並在活動中逐漸熟悉形式證明的格式架構以及數學敘述的圖形化與符號化。教學活動包括：「排序－根據邏輯推演的順序重新排序完成證明的能力」，「配對－分辨、判斷出推理的根據完成證明的能力」，「接龍－根據現有的陳述，瞭解證明的想法後，補齊證明的空缺完成證明的能力」。至於整體證明的層次，發展「模仿」與「轉譯活動」的教學活動，讓學生由類化計算題的運算過程中提取基本想法以完成形式證明；由轉化非形式證明中析出合理的想法轉化為形式證明；由模仿數學證明格式完成形式證明；由幾何圖形的操弄與過程中所得之非形式論證想法，提取形式論證中「如何證明」與「畫輔助線」的線索，將實驗幾何與綜合幾何連結，轉譯非形式論證想法為形式論證模式。

因此，研究者在外心與內心的教學實驗中，以「類比遷移」及「局部推理與模仿」為教學策略設計的教學活動，希望這個教學活動能解決學生外心與內心概念的學習困難。