

## 2-1 前人研究相關模型演進與研究動機

從 William Harvey 發表(1628 年) [1] 血液循環理論，到 O'Rourke 1980[11]年發表的一系列的文獻，血管模型從單一血管演變到強調血管系統的整體設計，這方面的模型研究從單純的管子流體力學討論逐漸的加入了生理條件。較為重要的理論如下：

Hales;" Windkessel" Model (1733):

Hales 將循環系統看成一個彈性腔。隨心臟縮收，彈性腔也對應著膨脹或恢復原來體積。

定義

$P$ : 壓力 pressure

$R$ : 血管阻力 vascular resistance

$C$ : 血管順應性 vascular compliance  $\frac{dv}{dp}$

$v$ : 容積 volume

經推導可得 
$$p(t) = P_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2-1)$$

因為過度簡化循環系統的 Windkessel Model 使得它和實際生理情況不同，具有以下特色。

(1) 波速無限大(initial wave velocity)；

(2) 血管短且硬，且沒有波的傳遞(Wave propagation)；

(3)適用於體積小的昆蟲或鳥類。

Poiseuille' s Law (1846):

單純以剛性圓柱管中的穩流(Steady flow)為血液傳導模型。其

主要方程式如下:

$Q$ : 流量                       $R$ : 管子阻尼

$L$ : 管長                         $\eta$ : 黏滯度

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta \Delta L} \quad (2-2)$$

我們可以利用此方程式用於硬管中之穩流(steady flow)且為發展成完全層流的情況。但是到了小動脈，仍是會有彈性且有徑向方向振動，因此對於在生理上出現的脈動血流(pulsatile flow)並不契合。

3. Moens-Korteweg (1878):

假設(1)血管為圓柱純彈性管；

(2)非黏滯性流體，導致各層(laminae)軸向速度相同；

(3)  $\frac{h}{R_0} \ll 1$  管徑非常薄

(4)  $\frac{dR}{R} \ll \frac{dP}{P}$  這表示了它不允許徑向運動的硬管

$$\text{導得波速} \Rightarrow c_0 = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho R_i}} \quad (2-3)$$

但實際上

- (1) 血管壁是有一定厚度且血液是有黏滯性的
- (2) 更重要的是推導的過程省略了血管壁徑向的運動，所以方程式只是描述血管內的血液在縱向方向(和管子平行)疏密的波動，和本文所討論的徑向振動方程式不同。

4. Womersley-剛性管(1955):

把血管壁當成無限長而且是不可壓縮的圓柱硬管，所以運動被侷限在軸向。

5. Womersley-彈性管(1955):

- (1) 波的傳遞不存在反射波；
- (2) 仍然解軸向方向的運動，但修正徑向膨脹(Radial Dilatation)。

6. Womersley-彈性管負載(loading)(1955):

修正上一個理論的  $\frac{h}{R}$  值

7. 類比電路模型 Noordergraaf's Electrical Analogus(1969):

- (1) 將血管視為無限多的微量長度的管流元的組合，再將管流元與傳輸網路元件類比；
- (2) 軸向及對流加速度項可以被忽略；
- (2) 以流體阻尼係數乘以流體通量(RQ)表示黏滯項；
- (3) 軸向流體速度在血管內分佈不為徑向位置的函數。

Fry and Greenfield (1964)與 Noordergraaf(1969)對 Womersley 的理論所做的假設做了仔細的分析與探討：

1. 不可壓縮的牛頓流體(Newtonian Fluid)
2. 均勻的圓柱血管(Uniform, Cylindrical Tube)
3. 忽略入口效應(Entrance Effect)
4. 波的傳遞不存在反射波(Reflection Waves)
5. 方程式的線性化(Linearization of Equation)
6. 薄管壁(Relatively Thin Tube Wall)
7. 均向性的管壁彈性(Isotropic Wall Elasticity)
8. 不可壓縮的管壁(Incompressible Wall)
9. 管壁的黏滯性(Newtonian Viscosity of Wall)
10. 管壁的負載(Wall Loading and Constraint)
11. 管壁與流體的密度假設相等(Wall and Fluid Densities)
12. 假設  $\frac{dP}{dt} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$

上述的假設有很多是與實際上的生理狀態有很大差距的，例如：

- (1)血管直徑隨著距離的增加會有縮減(tapering)現象、
- (2)血管壁與血液密度有所差異。

所以 Womersley 公式無法與實際上的生理配合，而且應用範圍有限，是因為忽略下列很重要的事實

(1)Lamb, H. (1932)[11]提出血管壓力波傳播的模式(mode)有下面四種

1. 伸縮(distention)模式
2. 軸向(longitudinal)或徑向(axial)運動
3. 扭轉(torsional)模式:血管的扭轉運動
4. 彎曲(flexural)模式

(2) Patel(1969) [12]在活體實驗中得到血管徑向、軸向和環向的彈性係數 (Elastic modulus):

狗主動脈(cannine aorta)的活體實驗(in vivo)

$$E_{zz} > E_{\theta\theta} > E_{rr}$$

切下血管在外界實驗(in vitro)

$$E_{zz} \approx E_{\theta\theta} = 7.4 * 10^6$$

胸主動脈(thoracic aorta)生理實驗

$$E_{rr} = 5 * 10^6$$

$$E_{\theta\theta} = 7 * 10^6$$

$$E_{zz} = 10 * 10^6$$

我們可以由 Patal、Fry 兩人的研究結果得出，再實際活體生理狀態上，徑向的彈性係數是最小，所以徑向伸縮模式應該是最容易發

生的一種。也顯示出徑向的彈性運動較其他方向的運動更為重要。

## 2-2 徑向振動理論

林玉英教授和王唯工教授提出了「徑向振動理論」，利用彈性(材料)力學及牛頓第二運動定律，探討徑向的管壁振動，根據生理上的條件以及血管的彈性及所受張力、流體黏滯性等，推倒出徑向振動方程式，將身體上的動脈系統及分支部份，看成一個彈性系統，在整個彈性系統諧和地振動運作下，來探討血管系統的特性。[9, 10]

### 2-2-1 徑向振動方程式的推導

首先考慮一充滿流體的圓柱形(cylindrical)彈性長直管，並假設管壁某處發生振動時其截面積仍維持圓形，只有管徑隨時間與軸向位置變化，並且管壁材料遵守虎克定律。

我們取系統直管(如 Fig 2-1)中一小段(Fig 2-2)的一個小單位元。如 Fig 2-1 圖所示  $z$  方向代表軸向，如 Fig 2-2 所示考慮中心位於  $Z_i$ ，長度為  $\Delta Z$  的第  $i$  段直管由圓周上截取夾角為  $d\theta$  的一個小單位元(一片管壁)。 $r$  為管之內徑， $h$  為管壁的厚度， $d\theta$  為軸向截面的一極小角度。

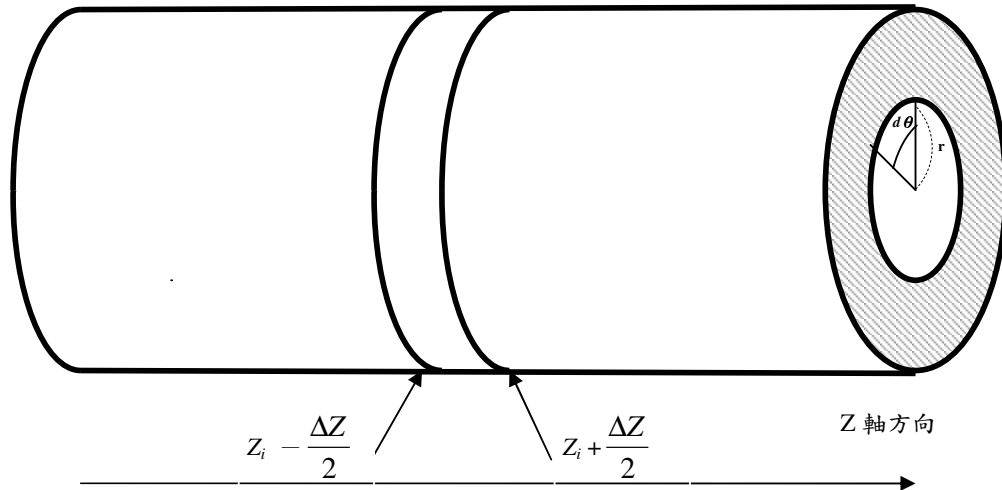


Fig 2-1 系統直管管壁

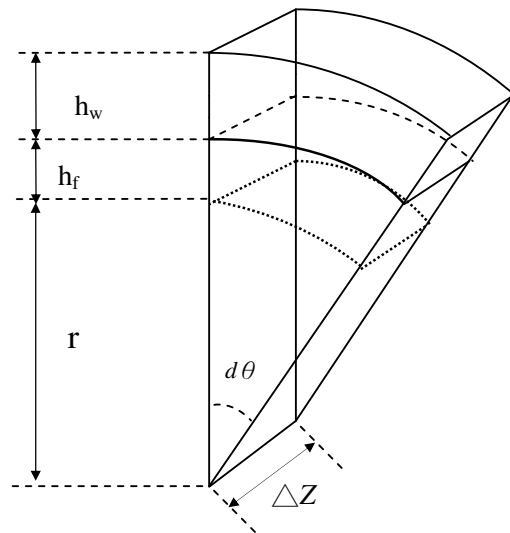


Fig 2-2 管壁單位元

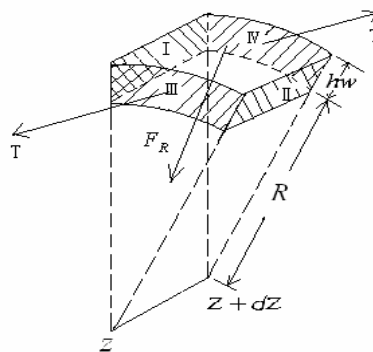


Fig 2-3 管壁單位元



此時夾角  $d\theta$  的小段管壁所受的徑向方向力為如下所列：

1. 沿壁張力在徑向之分力 (Longitudinal stretching forces)

若血管兩端有外加張力 (如 Fig 2-3)，在 III 及 IV 兩個表面上，當  $\frac{dr}{dz}$  存在時 (管壁有軸向曲折)，有一徑向分力  $T(\frac{dr}{dz})rd\theta$  ( $T$  為單長度之張力)，所以在單位元兩邊  $\Delta Z$  之間的合力為：

$$F_T = [T(\frac{dr}{dz})rd\theta]_{z_i+\frac{\Delta z}{2}} - [T(\frac{dr}{dz})rd\theta]_{z_i-\frac{\Delta z}{2}} \quad (2-4)$$

2. 管壁所受的阻尼力 (resistance force)

假設血液阻尼力與其管壁的徑向速度  $\frac{dr}{dt}$  成正比所以阻力  $F_R$  可以表示成 (如 Fig 2-3)：

$$F_R = -R_i \Delta Z r d\theta \frac{dr}{dt} \quad (2-6)$$

其中  $R_i$  為徑向黏滯係數

3. 環向虎克張應力 (circumferential force)

假設當振動時半徑為  $r$ ，管壁厚度  $h$ ，；未發生振動時管壁半徑  $r_0$ ，管壁厚度  $h_0$ 。振動時環向長度的改變量為  $rd\theta$ ，環向的形變 (circumferential stress) 為  $e_{\theta\theta} = \frac{\Delta r}{r_0}$ ，由此產生的應力 (stress) 大小為  $S_{\theta\theta} = E_{\theta\theta} e_{\theta\theta}$ ，在 I 及 II 兩個表面上， $E_{\theta\theta}$  是材料力學的環向的楊氏彈性係數 (Young' modulus)。所以由虎克張應力所造成的恢復力 (restoring force)  $F_C$  可以表示成 (如 Fig2-4 Fig2-5)：

$$F_C = -E_{\theta\theta} \frac{dr}{r_0} \Delta z r * \sin \frac{d\theta}{2} * 2$$

$$d\theta \ll 1 \quad \sin \frac{d\theta}{2} = d\theta/2$$

$$F_c = -E_{\theta\theta} \frac{dr}{dz} \Delta Z r d\theta \quad (2-5)$$

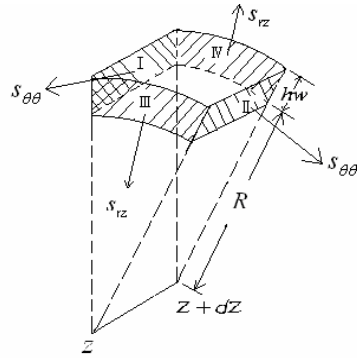


Fig 2-4

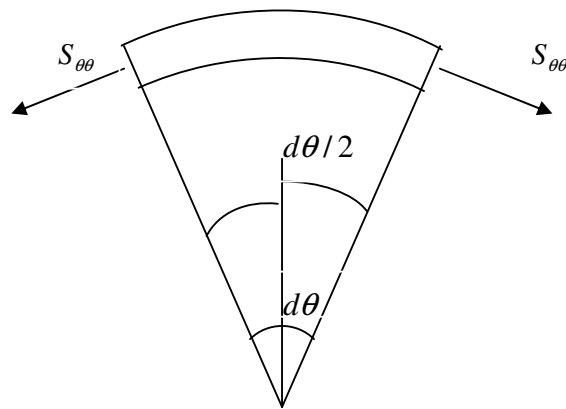


Fig 2-5

#### 4. 虎克剪應力 (shearing force)

由虎克定律，可知剪應力  $S_{rz} = E_{rz} e_{rz} = E_{rz} \frac{dr}{dz}$ 。而此力作用在  $Z = Z_i - \frac{\Delta Z}{2}$  與  $Z = Z_i + \frac{\Delta Z}{2}$  兩平面(如 Fig2-4)，在 III 及 IV 兩個表面上，

其合力  $F_s$  如下式

$$F_s = (E_{rz} \frac{dr}{dz} h r d\theta)_{z_i + \frac{\Delta z}{2}} - (E_{rz} \frac{dr}{dz} h r d\theta)_{z_i - \frac{\Delta z}{2}} \quad (2-7)$$

$E_{rz}$  為剪向彈性係數

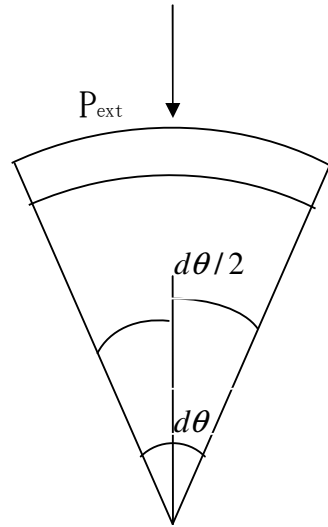


Fig 2-6

5. 血管外界壓力對血管壁所造成的力(Fig 2-6)

$$F_{P_{ext}} = -P_{ext} \Delta Z r d\theta \quad (2-8)$$

$P_{ext}$  為在  $Z_i$  處的管外壓力

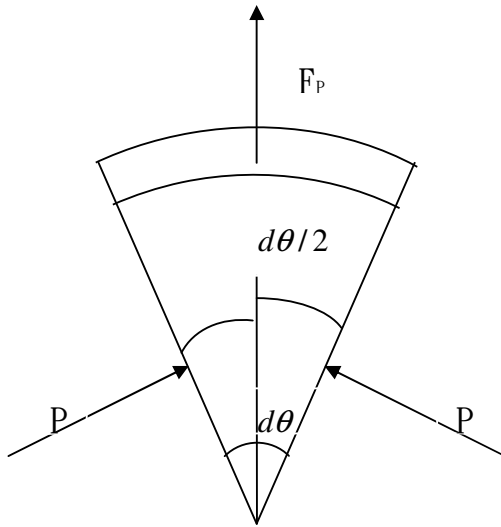


Fig 2-6

6. 兩側流體壓力所造成的力(Fig 2-6)

$$F_p = P\Delta Zr \sin \frac{d\theta}{2} * 2 \quad d\theta < 1 \quad \sin \frac{d\theta}{2} = d\theta/2$$

$$F_p = P\Delta Zrd\theta \quad (2-9)$$

$P$  為兩側流體對管壁的壓力

我們利用牛頓第二運動定律，合力為動量對時間的微分：

$\sum F_i = \frac{d(P_r)}{dt}$ ，其中  $P_r$  為一單位元的(包含其中的流體)的徑向動量，動

量  $P_r$  可以表示成：

$$P_r = \mu \delta z r d\theta \frac{dr}{dt} \quad (2-10)$$

$$\text{其中 } \mu = \rho_w h_w + \rho_f h_f \quad (2-11)$$

$\rho_w$  為管壁的密度， $h_w$  為管壁厚度， $\rho_f$  為管內流體密度， $h_f$  則為與管壁一起振動的液體厚度(如 Fig 2-2)。

我們將式(2-4) (2-5) (2-6) (2-7) (2-8) (2-9)代入式(2-10)，

整理可得下式：

$$d\theta\mu\Delta Z \frac{d}{dt} \left( r \frac{dr}{dt} \right) = d\theta \left\{ -\frac{E_{\theta\theta}}{r} r\Delta Z dr + (E_{rz}h+T)r \frac{dr}{dz} \Big|_{z_i+\frac{\Delta Z}{2}} - (E_{rz}h+T)r \frac{dr}{dz} \Big|_{z_i-\frac{\Delta Z}{2}} \right\} \\ - R_i r \Delta Z \frac{dr}{dt} + r \Delta Z (P_i - P_{ext})$$

對  $\theta$  積分

$$2\pi\mu\Delta Z \frac{d}{dt} \left( r \frac{dr}{dt} \right) + R_i \Delta Z 2\pi r \frac{dr}{dt} + \frac{E_{\theta\theta}}{r} \Delta Z 2\pi r dr - 2\pi r \Delta Z (P_i - P_{ext}) \\ = (E_{rz}h+T) \left[ \left( 2\pi r \frac{dr}{dz} \right) \Big|_{z_i+\frac{\Delta Z}{2}} - \left( 2\pi r \frac{dr}{dz} \right) \Big|_{z_i-\frac{\Delta Z}{2}} \right] \quad (2-12)$$

這裡  $S_i = \pi r^2$ ，我們定義  $C_A = \frac{dS}{dP}$  (Area Compliance)，用來連結壓力與徑向運動的關係，讓方程式中的面積隨時間的變化可以表示成壓力隨時間的變化。

$$C_A = \frac{dS}{dP} \Rightarrow C_A \int_{P_0}^{P_i} dP = \int_{A_0}^{A_i} dS \Rightarrow C_A \Delta P_i = \Delta S_i$$

我們把  $C_A$  帶入式(2-12)可得

$$\Rightarrow \mu C_A \frac{dP_i}{dt^2} + R_i C_A \frac{dP_i}{dt} + C_A \frac{E_{\theta\theta}}{r} \Delta P_i - 2\pi r (P_i - P_{ext}) = (E_{rz}h+T) \frac{1}{\Delta Z} \left\{ C_A \left[ \left( \frac{dP_i}{dz} \right) \Big|_{z_i+\frac{\Delta Z}{2}} - \left( \frac{dP_i}{dz} \right) \Big|_{z_i-\frac{\Delta Z}{2}} \right] \right\} \quad (2-13)$$

上述是在  $Z = Z_i$  處  $Z_i - \frac{\delta z}{2} \sim Z_i + \frac{\delta z}{2}$  間，壓力波隨時間的變化

對於任意  $Z$  而言，將上式表示法稍作改變

$$\begin{aligned}
Z_i &\rightarrow Z \\
\delta z &\rightarrow dz \\
P_i - P_{ext} &\rightarrow P(z, t) \quad \text{且令 } \kappa = \frac{E_{\theta\theta}}{r} - \frac{2\pi r}{C_A} \quad \tau = E_{rz}h + T \quad (2-14) \\
R_i &\rightarrow R \\
r &\approx r_0
\end{aligned}$$

可整理得一可描述彈性管上隨著位置及時間變化的二階偏維方程式

$$\mu \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial t^2} + R \frac{\partial P(z, t)}{\partial t} + \kappa P(z, t) = \tau \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial z^2} \quad (2-15)$$

由此式出發，可討論壓力波在黏彈性(viscoelastic)管中，因徑向振動所造成的傳播等現象。

### 2-2-2 徑向共振理論的脈衝響應解

若我們於  $Z = \xi$  處打入一週期性脈衝，我們令其加入外力為  $F_{ext}$ ，

則徑向共振方程式(2-15)式可以寫成：

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + b \frac{\partial P}{\partial t} + \omega_0^2 P = V_\infty^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{2\pi r_0}{L_m C_A} F_{ext} \quad (2-16)$$

令  $P = P_i - P_{ext}$  且單位長度質量  $L_m$ ， $P_0$  為靜水壓(外接水槽提供的壓力)， $P_i$  則為血管壁  $Z_i$  處所測量到的壓力。

壓力隨時間的變化可表示如：

$$P(z, t) = P_i(z, t) - P_{ext}(z) \quad (2-17)$$

其中， $b$  為阻尼常數， $r_0$  未振動時管壁半徑， $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ 、 $V_\infty = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$  為

波速(2-18)。

1. 如兩端外接水槽(如 Fig 2-6)：

其邊界條件為

$$P(z=0, t) = 0$$

$$P(z=L, t) = 0$$

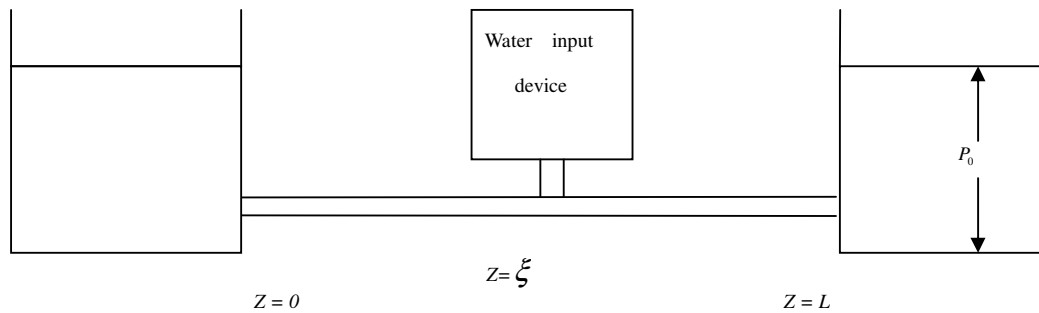


Fig 2-6

若我們於  $z=\xi$  處打入一週期性脈衝波，如此外力  $F_{ext}$  可以寫成下

式：

$$F_{ext}(z, t) = F(t)\delta(z - \xi) \quad (2-19)$$

$F(t)$  可以寫成一個 Fourier series

$$F(t) = F \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{i\omega_m t} \quad (2-20)$$

式中

$$\frac{\partial^2 P_\omega}{\partial t^2} + b \frac{\partial P_\omega}{\partial t} + \omega_0^2 P_\omega = V_\infty^2 \frac{\partial^2 P_\omega}{\partial z^2} + F \delta(z - \xi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{i\omega_m t} \quad (2-21)$$

此處  $F = 2\pi r_0 a_m / L_m C_A$  ,  $\omega = \omega_m$ .

$$P_\omega(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi\xi}{L} \sin \frac{n\pi z}{L} e^{-i(\omega t + \phi_n)} \quad (2-22)$$

其中

$$A_n = \frac{2a_m F}{[(v_n^2 + \omega_o^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (2-23)$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{-b\omega}{v_n^2 + \omega_o^2 - \omega^2} \quad (v_n = \frac{n\pi V_\infty}{L} \quad n=1, 2, 3, \dots) \quad (2-24)$$

當  $dA_n/d\omega = 0$  的地方，與外力的頻率為  $\omega$  與天然頻  $\omega_{Rn}$  相同時

$$\omega_{Rn}^2 = v_n^2 + v_o^2 - \frac{1}{2} b^2 \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2-25)$$

我們假設當  $v_o^2 - \frac{1}{2} b^2 = 0$  或是很小，則  $\omega_{Rn}$  由天然頻  $v_1$  組成

$$v_1 = \frac{\pi V_\infty}{L} \quad (2-26)$$

$$\omega_{Rn} = n v_1 \quad (2-27)$$

2. 如一端外接水槽(如 Fig 2-7) :

其邊界條件為

$$P(z=0, t) = 0$$

$$P(z=L, t) = P_0$$

可解得



$$P_{\omega}(z, t) = \left( \sum_n A_n \cos \frac{n\pi z}{2L} \right) e^{-i(\omega t + \Phi_n)}, \quad n = 1, 3, 5 \dots \text{odd numbers only} \quad (2-28)$$



Fig 2-7

### 2-3 徑向振動的動能(TKE)的公式推導

對黏滯性高的流體而言只要流體流動都會造成能量的損耗 [13]，人的血液亦是如此。但人類的演化應該是要避免浪費能量，讓心臟達到最高的效率。所以我們假設一個最理想系統就是利用動脈壁來儲存能量和傳遞而使因傳遞而損耗的能量盡可能變小。以徑向共振原理為出發點，推其彈性管管壁橫波傳輸時的能量，如下：

$P_r$  為彈性管管壁徑向振動的動量

$h_w$  為彈性管管壁厚度

$\rho_w$  為彈性管管壁密度

$\partial r / \partial t$  為管壁振動速度

$$\text{所以管壁振動的動量 } P_r = 2\pi r \mu_w \partial r / \partial t dz = \mu_w \partial S / \partial t dz \quad (2-29)$$

其中  $\mu_w = \rho_w h_w$  ,  $S = \pi r^2$

彈性管dz長度的質量為  $m_w = 2\pi r \mu_w dz = \lambda_w dz$  , 而  $\lambda_w$  為彈性管的軸向單位長度密度, 則徑向振動的動能 TKE( The transverse kinetic energy )  $dK_r$  可以表示成:

$$\begin{aligned} \text{單位長度之能量 } dK_r &= \frac{p^2}{2m} = \frac{\mu_w^2 \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2}{2(2\pi r \mu_w)} \cdot dz = \frac{\mu_w}{4\pi r} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 dz \\ &= \frac{2\pi r}{2\pi r} \cdot \frac{\mu_w}{4\pi r} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 \cdot dZ \\ &= \frac{\lambda_w}{8\pi^2 r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 \cdot dZ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_w}{4\pi S} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 \cdot dZ \end{aligned} \quad (2-30)$$

我們利用  $C_A = dS/dp$  (area compliance)[14], 面積隨時間的變化可以表示成壓力隨時間的變化, 所以  $dK_r$  亦可表示成:

$$dK_r = \lambda_w C_A^2 (\partial p / \partial t)^2 dz / 8\pi S. \quad (2-31)$$

單位面積動脈順應適  $C_A$  可用  $E_p$  (pressure-strain elastic modulus) 表示  $C_A = 2S/E_p$

所以(2-31)又可表示成:

$$dK_r = \lambda_w S (\partial p / \partial t)^2 dz / 2\pi E_p^2 \quad (2-32)$$

今若考慮一個壓力波, 頻率為  $f$ , 振幅為  $P_m$

$$p(z) = p_{\max} \sin(n\pi z/L) \quad , \quad n=1, 2, 3, \dots$$

我們可以得到單位彈性系統的徑向振動的平均動能。

$$d\bar{K}_r = \lambda_w S P_m^2 f^2 / 2\pi E_p^2 dz \quad (2-33)$$

(式2-33)便是單位長度徑向平均總動能的方程式，我們從(式2-33)可以看出徑向平均動能分別與(1)動脈血管壁的線密度 $\lambda_w$ 或厚度成正比(2)動脈內血液流通面積 $S$ 成正比(3)壓力波振幅 $P_{\max}$ 平方成正比(4)the pressure-strain elastic modulus  $E_p$ 平方成反比(5)壓力波頻率平方成正比，如果考慮TKE中  $f^2$  項，則顯示出壓力波高頻的部份也佔了重要的角色。

,

,

,

## 2-4 兩段粗細不同彈性管之連接天然頻推導

當兩段不同的彈性管相接時(如 Fig 2-8) ，長  $L_1$  粗的軟管與長  $L_2$  細的軟管，在兩端有固定的靜壓  $P_0$ 。

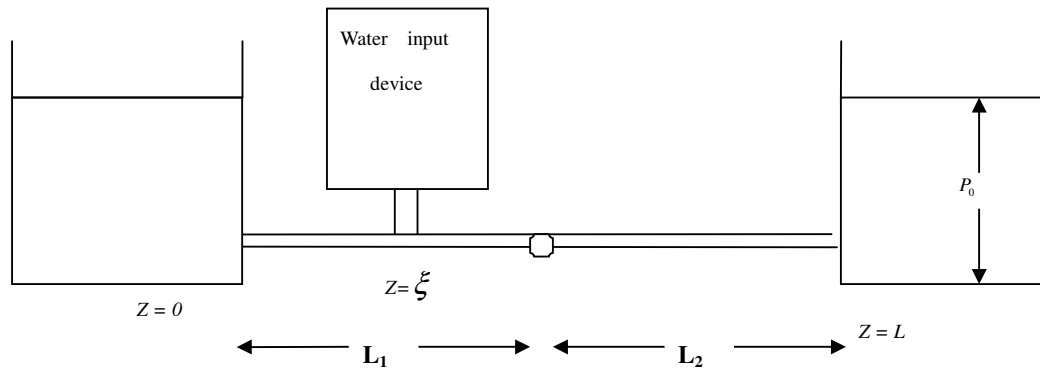


Fig 2-8

我們考慮在彈性管中的壓力  $P$  與流量  $Q$ ，在彈性管中的壓力  $P$  與流量  $Q$  對時間及位置的關係可以用下式描述

$L_1$ (粗)和  $L_2$ (細)分別為粗細不同彈性管

$$P = \begin{cases} P_1(z, t) & 0 \leq z \leq L_1 \\ P_2(z, t) & L_1 \leq z \leq L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} Q_1(z, t) & 0 \leq z \leq L_1 \\ Q_2(z, t) & L_1 \leq z \leq L_1 + L_2 \end{cases}$$

因為兩跟管子接合的一點上，壓力必定相等而且流量也會相等，而且在靜壓兩端壓力為固定值  $P=P_0$

1. 靜壓兩端  $P=P_0$

所以我們可以得到邊界條件 B. C.

$$P_1(0, t) = 0 \quad (2-4-1)$$

$$P_1(L_1 + L_2, t) = 0 \quad (2-4-2)$$

令  $P_1(Z) = A_1 \sin k_1 Z + B_1 \cos k_1 Z$  代入 B. C. (2-4-1)

$$\text{得 } B_1 = 0$$

所以我們可以將兩根管子的壓力分別假設成

$$P_1(z, t) = A_1 \sin k_1 z e^{-i\omega t} \quad (2-4-3)$$

$$P_2(z, t) = A_2 \sin[k_2(L_1 + L_2) - Z] e^{-i\omega t} \quad (2-4-4)$$

2. 因為兩跟管子接合的同一點上，壓力必定相等而且流量也會相等

所以我們可以得到邊界條件 B. C.

$$P_1(L_1, t) = P_2(L_1, t) \quad \text{將(2-4-3), (2-4-4)式代入}$$

$$Q_1(L_1, t) = Q_2(L_1, t) \quad \text{將(2-4-3), (2-4-4)式代入}$$

我們可以利用連續方程式  $\frac{dQ}{dz} = -C_A \frac{dP}{dt}$  ( $C_A$  是單位長度之可膨脹性

$\frac{d\pi r^2}{dP}$ )，流量隨位置的變化可以表示成壓力隨時間的變化。

$$\text{得 } Q_1 = -A_1 C_{A1} \frac{i\omega}{k_1} \cos k_1 z e^{-i\omega t} \quad (2-4-5)$$

$$Q_2 = -A_2 C_{A2} \frac{i\omega}{k_2} \cos[k_2(L_1 + L_2 - z)] e^{-i\omega t} \quad (2-4-6)$$

整理(式 2-4-5) (式 2-4-6)可得

$$-A_1 C_{A1} \frac{i\omega}{k_1} \cos k_1 L_1 = A_2 C_{A2} \frac{i\omega}{k_2} \cos k_2 L_2$$

$$A_1 \sin k_1 L_1 = A_2 \sin k_2 L_2$$

我們可以利用上面兩個關係式，求得兩段粗細不同彈性管之連接天然  
頻

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sin k_1 L_1 & -\sin k_2 L_2 \\ \frac{C_{A1}}{k_1} \cos k_1 L_1 & \frac{C_{A2}}{k_2} \cos k_2 L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{C_{A2}}{k_2} \sin k_1 L_1 \cos k_2 L_2 + \frac{C_{A1}}{k_1} \cos k_1 L_1 \sin k_2 L_2 = 0 \quad \text{其中 } k = \frac{2\pi f}{V_\infty}$$

$$C_{A2} \frac{V_2}{2\pi f} \sin \frac{2\pi f}{V_1} L_1 \cos \frac{2\pi f}{V_2} L_2 + C_{A1} \frac{V_1}{2\pi f} \cos \frac{2\pi f}{V_1} L_1 \sin \frac{2\pi f}{V_2} L_2 = 0$$

由上式，可固定粗管改變細管的長度、張力變化和波速  $V_2$  去搭配粗管的波速  $V_1$ ，可求得理論值的天然頻  $f$ ，再去驗證實驗量測的測量值  $f$ ，兩者相對照。

## 2-5 徑向振動傳輸功率的公式推導

動脈系統中，由壓力造成的彈性能佔了動脈系統總能量的 90% 以上，而由流速所造成的動能只有 2~5%。

一般管壁振動時的徑向移動會隨著壓力改變[15]，當壓力從  $P_{\min}$  舒張壓到  $P_{\min}$  收縮壓時，管壁從  $r_{\min}$  變到  $r_{\max}$ ，此時血液把從鄰近管壁傳遞過來，此時血壓會對管壁作正功，血液會受(牛頓第 3 定律)一個向內的力，進而使血液的徑向動能逐漸變為零，動能變為位能，當壓力從  $P_{\min}$  收縮壓到  $P_{\min}$  舒張壓時，管壁會擠壓血液，使位能變為動能流向鄰近的管壁。

若今管壁內徑從  $r_i=r_{\min}$  變到  $r_f=r_{\max}$ ，血壓在  $dz$  這段管子的管壁作

功  $\frac{dW}{dz}$ 。

$$\frac{dW}{dz} = \int_{r_i}^{r_f} p(z, r, t) 2\pi r dr = \int_{r_i}^{r_f} P dS = \int_{p_i}^{p_f} P \frac{\partial S}{\partial P} dP \quad (2-5-1)$$

因為  $K = S \partial P / \partial S = E_p / 2$  [16]

所以(式 2-5-1)等於

$$\frac{dW}{dz} = \int_{p_i}^{p_f} P (S / K) dP \approx 2S / E_p \int_{p_i}^{p_f} P dP = S (P_f^2 - P_i^2) / E_p \quad (2-5-2)$$

管壁內徑從  $r_{\min}$  變到  $r_{\max}$  時，血壓在  $dz$  這段管子的管壁作正功，管壁內徑從  $r_{\max}$  變到  $r_{\min}$  時，血壓在  $dz$  這段管子的管壁作負功，所以總作

功為零，所以在此過程中沒有能量消散。

若  $P_d$  為舒張壓， $P_s$  為收縮壓

令  $P_p = (P_s - P_d)$  為脈衝壓力大小， $P_m = (P_s + P_d)/2$  為平均壓力大小

所以(式 2-5-2)等於

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\max} = S (P_s - P_d) (P_s + P_d) / E_P = 2 S P_p P_m / E_P \quad (2-5-3)$$

血壓在管子的管壁作正功，等於管壁的最大環向彈性位能  $(U_c)_{\max}$

$$(U_c)_{\max} = 2 S P_p P_m / E_P \quad (2-5-4)$$

所以徑向振動傳輸功率  $P_c$  可以寫成，管壁的平均位能密度乘上波的傳  
波速度  $(V)$

$$P_c = \overline{U_c} V \approx (U_c)_{\max} V / 2 = V S P_p P_m / E_P. \quad (2-5-5)$$

(式 2-5-5)就是利用徑向振動傳輸功率方程式