

## 第貳章 文獻探討

本章共分為三節，第一節所引述的文獻是探討學習樣式規律在代數領域中的重要性，第二節所引述的文獻是說明函數與表徵的相關研究，第三節所引述的文獻是關於學生學習的概念發展理論。

### 第一節 學習樣式規律在代數領域中的重要性

曹亮吉（民 92）提到「一般人學數學到底要學什麼？從實用的觀點來看，答案是學會算數計算，及一點點的幾何與代數。考試至上的氣氛薰陶之下，答案是背誦及套用公式，做各種（複雜）的計算。近年來，想法漸有改變，認為尋求數與形的規律及過程，是學習數學的主要目的」。這裡所稱的規律就是在 **Pattern** 中的規律，從教育的觀點，以探索、察覺並發現規律的課程，對中小學學生而言，或許是他們學習數學的原動力。

美國數學教師協會 NCTM（2000）對於學生應該學習的數學內容及程序做了詳盡的說明，其中在「代數」的主題上，認為學生應做到以下幾點，如【表 2-1-1】所示，NCTM 認為透過樣式規律的學習活動，學生能表示和分析數學情境，發展數學模式，並在問題情境下分析變數的特質。

【表 2-1-1 NCTM 的 K-12 年級數學代數方面課程標準】

從幼稚園至 12 年級學生能學到的數學知識	在 6-8 年級學生應能做到以下事項
瞭解樣式、關係與函數	<ul style="list-style-type: none"><li>◎ 用表格、圖形、文字或一些符號規則，來呈現、分析並一般化各種不同的樣式</li><li>◎ 比較不同形式表徵之間的關係</li><li>◎ 從表格、圖形或方程式中找出線型或非線型函數的不同性質，並能加以辨識</li></ul>

從幼稚園至 12 年級學生能學到的數學知識	在 6-8 年級學生應能做到以下事項
用代數符號來描述與分析數學的情境與架構	<ul style="list-style-type: none"> <li>◎ 對不同變數的用途，有初步的理解</li> <li>◎ 探索符號表示和直線圖形的關係，特別是截距與斜率的意義</li> <li>◎ 使用代數符號來呈現情境與解題，特別是包含線性關係的問題</li> <li>◎ 理解並形成簡易的等式形式之代數表示式，並能解二元一次方程式</li> </ul>
用數學模型來表示、瞭解數量上的關係，並分析在不同脈絡下數學內容的轉變	<ul style="list-style-type: none"> <li>◎ 能使用一些圖表和方程式等不同的表示方法來模式化與解決脈絡的問題</li> <li>◎ 使用圖形來分析一些具有線性關係的量之變化</li> </ul>

曹博盛教授指出(國科會科教處92年度九年一貫數學領域能力指標詮釋計畫成果發表會報告書，p.81-82)，所謂的「數量樣式與數量樣式之間的關係」(簡稱數量關係)隱含著「函數的對應關係」。其中簡易的數量關係指的是：使用一次的運算 (one operation) 即可描述兩個數量樣式的關係，例如：兩數列形成①「差不變關係  $y = x + b$ 」；②「和不變關係  $x + y = b$ 」；③「倍數關係(即商不變關係)  $y = ax$ 」；④「積不變關係  $xy = a$ 」。而非簡易的數量關係指的是：需用二次以上的運算 (two operations) 才可描述兩個數量樣式的關係，例如：兩數列形成的「線性關係」，以  $y = ax + b$  表示。

Bishop (2000) 為研究學生對於解決幾何量的線型數量樣式的問題時之解題表現，請學生以正方形堆疊成圖案，例如：找出推疊成 L 字形的底邊邊長與所需的正方形個數之間的關係，發現學生從解決問題中發展以符號來表示樣式關係，並且能評估符號表示的正確性。研究發現學生有四種不同的解題類型，並且有層次之分：

1. 依賴具體物表示 (Concrete)：學生能夠用具體實物操作並點數計算，將具體樣式規律模式化，但似乎還不能察覺數字序列的規律，並只能

在比較簡單的題目中使用符號，刻苦耐勞地將答案找出來。

2. 用比例表示 (Proportional)：學生已能察覺到數和位置之間存在某種關係，但卻常會發生誤用比例來詮釋此數量關係的錯誤，以為數量關係只是建立在單純的倍數關係而已，但解釋時卻無法與數量作配合。
3. 遞迴地找出關係 (Recursive)：學生將注意力放在前一項與下一項的遞迴關係，並發現數字序列中的規律，找出有意義的算則。
4. 函數的想法 (Functional)：學生注意到項數  $n$  與該項的值  $a_n$  之間的對應關係，以函數來分析與解釋該數量關係，將算則轉化成抽象一般化的符號規則。

學生在解決樣式規律的問題時，其解題策略的過程為：①觀察數字；②將焦點放在兩相鄰的數字上，並計算出這二個數字之間的差距；③比較這些差距之間的關係。普遍來說學生在找到一般化的規律之前，通常算術性的思維會先出現，學生要檢視整個數列（或表格）以找出各數字間可能隱含的關係，而數字的運算類型包括如：加法、減法、乘法、除法以及指數的運算等。當發現整個數列的樣式規律後，應用所找到的樣式規律，計算出接下來幾項的數字為何，甚至將數量關係用函數來分析，將點數計算的過程轉換成以符號代表數的一般式，並解決從已知的函數值求未知的  $n$  值為何，或某一個數值是否符合該數列的樣式規律等問題。對於樣式規律的題目，學生從點數計算尋找規律，由發現規律到找出有意義的算則，最後到抽象一般化的符號規則，教師必須引導學生將算術思維經過推理並歸納，進而過渡到一般化的符號規則，給學生足夠的時間去思考從具體到抽象的過程，是有意義且必要的，並且教師應對於學生不同的想法給予肯定，瞭解學生在解題中所引發的代數思維。

李佩玟（民94）為探究國小六年級學生對於數列解題中發現樣式之歷程，經文獻整理後建立了一套數列推理解題之認知歷程：編碼→發現樣式（單位化→計算與推論→映射）→應用／類化→反應。單位化意指將數列分群為數個有意義單位以利推論項次關係；計算與推論意指運用各種算術能力計算項次階差，推論鄰

近項次間的關係；映射意指對應組之間的關係以確認數列之共同數量關係。

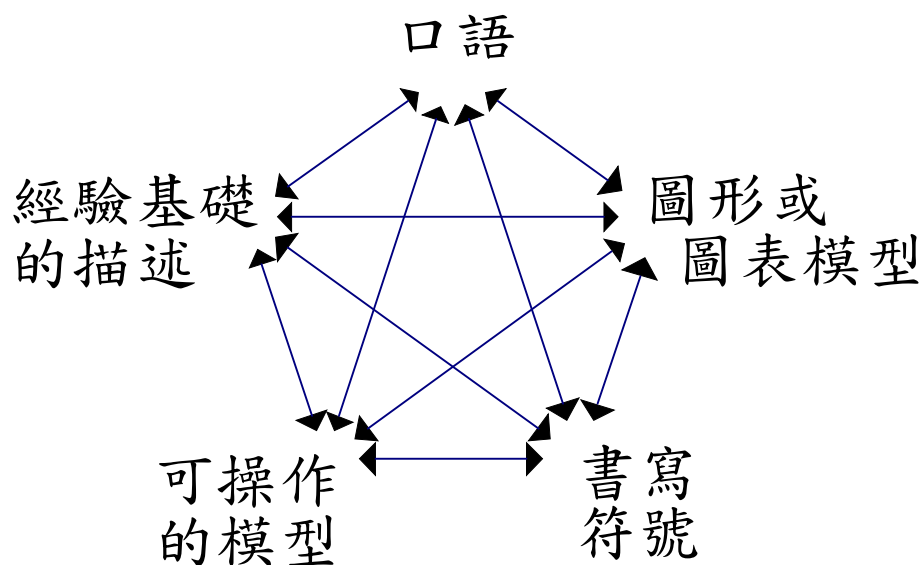
陳勝楠（民 92）為探究國一不同數學能力學生，處理樣式之解題歷程與處理樣式之解題策略，發現：①解題歷程方面：該研究發現國一生在樣式分類上較弱，比較不能抽離計算，去探討圖形或數字的本質。很少出現回顧的步驟，只要能得到答案就表示完成解題。只有在對結果有疑慮時，才會經過驗證階段。能力高的解題者，其解題歷程大多會出現讀題、分析、計劃、執行等四個階段，能力低者，則大多未經分析和計劃就匆忙去解題。②解題策略方面：國一生的解題策略不多，數學能力較好的學生解題時大都能用觀察，重複規律的方法解題。中、低數學能力學生大都用對數據隨意的進行反覆運算，採用嘗試錯誤或檢查答案。

學生由問題中所提到的情境或條件，先做察覺與辨識的工作，獲得特定的規律後，將現實的問題轉換成數學的問題，並進行解題，而轉換成數學問題的過程中，學生則必須依賴不同的表徵類型進行溝通。

## 第二節 函數與表徵的相關研究

表徵是指模式化各種心智過程時所使用的符號系統，如圖、表、文字等，如同 Lesh et al.（1987）所謂的內在概念化的外顯具體表現（可觀察的）之意義。NCTM（2000）更是將表徵列入「學校數學原則和標準」的十個標準之一，指出表徵是學生理解數學概念關係，與他人溝通數學想法、論點與理解，辨識相關數學概念之間的關連及對於實際狀況問題進行建模的重要因素，所以表徵是溝通數學觀念、思想的工具。

Lesh et al.（1987）研究發現，大多數的學生在學習數學時僅用一種表徵，而很少使用多重表徵。他因此強調區分不同的表徵系統有其重要性，而表徵之間的轉換與統合對學習者更是重要，所以數學學習的理想方式是能在同一概念上運用數個表徵。Lesh et al.（1987）從數學的學習與解題中，進一步具體地鑑別出五種不同的表徵類型，如下【圖 2-2-1】：



【圖 2-2-1 Lesh 的數學學習表徵類型】

1. 經驗基礎的描述 (experience-based “scripts”)：將日常生活中事件的狀況組織成一般的脈絡，並用以說明或解決其它種類的情境問題。
2. 可操作的模型 (manipulatable models)：在日常生活中常見的物品例如積木、數線等，這些物品就其本身而言不具意義，但能利用操作它們建立關係。
3. 圖形或圖表模型 (pictures or diagrams-static figural models)：將圖形或靜態圖表形式呈現的模型內化成內心的圖像，例如：對於可操作的模型，可以將利用圖形或靜態圖表形式呈現操作它們所建立之關係。
4. 口語 (spoken language)：能使用與特殊主題相關的語言，如用邏輯推理。
5. 書寫符號 (written symbols)：能如同使用一般的句子與片段一樣，使用特別的句子或片段，例如： $x + 3 = 7$ ， $A' \cup B' = (A \cap B)'$ 等。

Lesh et al. (1987) 認為學生必須具有下列條件才算瞭解一個概念：(1)必須能將此概念放入各種不同的表徵系統之中；(2) 必須能在給定的表徵系統內處理

這個概念；(3)必須很精確地將此概念從一個表徵系統轉換到另一個表徵系統。所以除了這五種不同形式的表徵系統很重要之外，Lesh et al.同樣也強調表徵系統之間的轉譯（translation）與表徵系統內部的轉換（transformation）亦是同等重要。

表徵系統之間的轉譯（translation）代表從某一個表徵到另一個表徵，建立其之間的關係，並保留結構上的特性，以『書寫符號轉譯成圖像』為例：

下列那個圖中的陰影佔整個圖案的 $\frac{1}{3}$ ：



表徵系統內部的轉換（transformation）代表能在給定的某個表徵系統內處理這個概念，以『書寫符號』為例：

班上男、女生的比例為 3：8，如果這個班上有 9 位男生的話，則請問該班有幾位女生？

(A) 17；(B) 14；(C) 24。

楊敦州（民 93）針對國中數學幾何問題，讓學生嘗試利用多媒體進行數學解題，在解題的過程中，學生除了可以利用圖像與算式表徵之外，還可以使用口語表徵。結果發現具備多重表徵能力的學生，其學習成就較高，因為其能在不同的表徵方式中自由轉譯，既可以清楚掌握數學概念的意義，在其解題困難時，有可運思另一個表徵來幫助解題，有助於解決問題與數學的學習。

在孫文先、陳碧真（民 71）所編的簡明數學百科全書中，函數的表徵可分為以下幾種：

1. 圖形（文氏圖）：函數的圖形是將此函數的定義域和值域以圖示之，而將其中的對應關係用箭頭示出。但由於此一名稱容易與現今教科書中所謂的函數圖形（畫在直角座標系中的圖形）互相混淆，所以本研究中將

以『文氏圖』稱呼。

2. 值表：函數的對應法則亦可記錄在值表裡，定義域的元素被填在表中的上列，而將它在值域的對應元素列在下方，在本研究中將以『表格』稱呼。
3. 文字敘述法：當一個函數的定義域和值域不是有限集合，或者大到不能在一張紙上用圖形或值表表示時，即可對這定義域和值域作一個恰當的描述，並定出對應法則，據此法則任何定義域中的元素均可找到值域中與之對應的元素。只要用日常用語就可定義函數而不需數學符號。
4. 圖解：選取  $x$  軸中的一組數當作定義域，並選取  $y$  軸上的一組數當作值域，若自變數  $x$  對應於值  $y$ ，則坐標  $(x, y)$  的點即為圖解上的一點，在本研究中將以『圖形』稱呼之。
5. 公式：在數學上，公式是表示出一個函數最經常使用的方法，此時定義域與值域中的元素僅是些數或能給訂適當計算法則的數學物元，在本研究中仍以『公式』稱呼之。

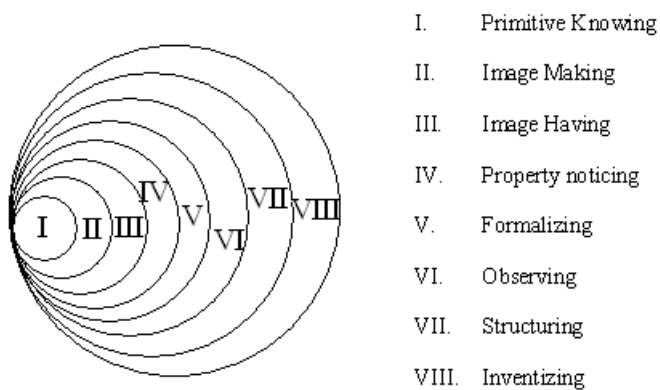
NCTM (2000) 指出，若學生能輕易地由某一種表徵轉移至另一種，即表示該學生有較好的能力解決代數問題。在中年級，學生通常以數值資料表開始調查以線型函數為基礎的樣式，但當他們想抽出一般線型函數關係的特質，就應該學習以圖形或公式的表徵呈現資料。學生也應該流暢地辨識線型函數的方程式表徵，這個流暢性可由學生獲得以多重表徵呈現脈絡化問題的經驗中顯現。

蔡志仁 (民 89) 提出將多重表徵作為課程設計的架構，期使學生能將學習的焦點放在概念的 formed 上，讓學生對於概念表徵內部的轉換與表徵之間的轉譯可以在教學時就有所學習，使學生能在教學中學習到表徵之間的轉譯過程，應是一個可行的方法。由於函數概念有各種不同的表徵，學生在學習函數概念時，必須學習「轉換：函數單一表徵的內部關係」和「轉譯：函數各表徵之間的關係」，這樣才能對函數概念更加的瞭解。

教師在進行函數教學時，除了將函數的各種表徵呈現出來，更需要強調表徵之間的連結（或轉換）才能幫助學生學習函數概念，陳正明（民 92）爲了提升學生線型函數三個表徵（表列，代數式，圖形）的概念成長，在設計補救教學活動時，考量學生需學習表徵的內部關係以及學習函數表徵間的轉換，設計了一些活動，目的不僅是要讓學生能夠從表列中注意到  $x$ 、 $y$  值變動的規律（表徵內部關係），最後還需要讓學生能夠從表列中，找出對應的代數式（表徵間轉換）。

### 第三節 學生學習數學概念的發展理論

在 Pirie & Kieren（1989，1991）提出的「數學理解成長的動態理論」中（A Dynamic Theory of the Growth of Mathematical Understanding），認爲數學的理解是一個動態的（dynamic）、非線性（nonlinear）以及遞迴（recursive）的過程，並且學習者可以同時在許多層次上理解同一件事情，而在個體與他人互動的情境之中，數學的理解發生了成長。其數學理解的模型是八個由內到外的層次，如下【圖 2-3-1】：



【圖2-3-1 Pirie 與 Kieren 的動態遞迴理論層次】

這八個層次的意義如下：

層次一 **Primitive Knowing**（起始知識）：

觀察者假設當學習者要開始新的課題時，學習者腦中就已經擁有



的知識。

層次二 **Image Making**（製造心像）：

透過新的問題、目標，學習者用以前的理解作區分，以進行獨特的、指引性的活動。

層次三 **Image Having**（形成心像）：

在一連串的操作活動之後，這些製造心像的活動被內在的物件所取代，學習者能看見所經驗的所有例子之樣式，並可明確清楚說出。

層次四 **Property Noticing**（注意性質）：

學習者注意到各心像間的區別、組合和關連，且能預測這些性質如何達到，並將這個關係明確地記錄下來。

層次五 **Formalizing**（形式化）：

學習者有意識地思維所注意到的性質，且抽象出共通性，並能察覺依據心像以及其抽象屬性所建構出的內在物件之分類。

層次六 **Observing**（觀察）：

學習者能觀察自己的思考結構並加以組織，會去和先前注意到的性質與心像作比較。

層次七 **Structuring**（結構化）：

當進一步理解時，學習者必須能回答為何思考的結果是正確的，這需要察覺到先前思維間的連結與結果。由數學的角度來看，即表示能以公理結構思考。

層次八 **Inventizing**（發明）：

已擁有完全結構化知識，學習者從原先的概念中掙脫，且創造出新的問題，並有可能導致全新的概念。

Pirie & Kieren (1994) 針對動態可折回成長模式加以詮釋，認為此一模式有三個特性：

(A) 不需要邊界(Don't need Boundaries)：

數學的特性之一是在一個符號層次運作而不用參酌基本概念的能力，若兩層次之間「不需要邊界」，超越這個邊界，學習者不需要特別內在的理解便可以提升到外面的理解。在成長模式中三個邊界是不需要的：(1)「製造心像」與「形成心像」之間；(2)「注意性質」與「形式化」之間；(3)「觀察」與「結構化」之間。

(B) 可折回(Folding back)：

當一個人在任何一個層次，面臨一個不能馬上得到答案的問題時，他便必須要折回內部的層次重新建構知識，所以學習者在理解一個概念的時候，他可以同時處於兩個以上的理解層次，也就是理論中所謂的「非線性、動態、遞迴」的過程，學習者的理解會在各層次之間遊走。比如說當學習者已經進展到「注意性質」的層次四時，當他面臨到新情境與困惑時，他可能以同樣層次四的「注意性質」來回應新的情境，也可能「折回」到之前的「製造心像」或「形成心像」等層次，對先前的理解進行重新建構，之後再來回應新的情境。

(C) 行動與傳遞的互補 (The Complementarities of Acting and Expressing)：

成長模式的每一個層次都包含兩個互補的元素—行動和傳遞，並且理解的成長在從一個層次移向另一個層次時，都需要這兩個元素，因為行動包含所有以前的理解，而傳遞則給予到另一個層次時所需的本質。

陳正明 (民 92) 依據這個理論各層次的特徵，將之應用到線型函數的三個表徵 (表列、代數式、圖形)，得到各層次對應到學生學習線型函數之特徵，其內容如下【表 2-3-1】所示：

【表 2-3-1 陳正明的線型函數表徵理解層次】

標籤	特徵	學習線型函數的特徵
層次一 起始知識	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 觀察者假設當學習者要開始新的課題時，學習者腦海中已經擁有的東西。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 給一個函數 <math>f(x)</math> 的代數式時，若給訂一個 <math>x</math> 值為 <math>a</math>，能求出函數值 <math>f(a)</math>。</li> <li>2. 對於所給的表列，能根據特定的自變數或應變數值，帶入函數 <math>f(x)</math> 的代數式並找出對應的數值。</li> <li>3. 會在坐標平面上畫出一個數對所在的位置。</li> <li>4. 能說出函數式子 (<math>y = f(x)</math>) 的自變數、應變數的意義。</li> <li>5. 當一個 <math>x</math>、<math>y</math> 的關係式以表列呈現時，學生僅直接任意猜測關係式，或根據一組 <math>x</math>、<math>y</math> 值，就認定該表列的規則。</li> <li>6. 給任一表列，能用「一個 <math>x</math> 值對應一個 <math>y</math> 值」的方式判斷他是否為函數關係；任給一圖形，能用「鉛直線判別法」判斷是否為函數圖形。</li> <li>7. 能說明一次函數何嘗數函數的意義及其一般型式。</li> <li>8. 能將合於 <math>y = f(x)</math> 關係的數對 (<math>x</math>，<math>y</math>)，代入正確位置。</li> <li>9. 能根據題意，列出關係式。</li> </ol>
層次二 製造心像	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 透過特定的工作或者新的問題、新的目標，在以前的能力上做區分。</li> <li>2. 是獨特的、指引性的活動。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 在畫線型函數圖形的過程中，能獨立表列，並且取多個 <math>x</math> 值或 <math>y</math> 值（無規律性或有規律性），然後根據線型函數的關係式，求出另一個變數 (<math>y</math> 或 <math>x</math>) 的數值。</li> <li>2. 當線型函數以表列呈現時，能以規律的 <math>x</math> 值代入表列，以得出對應的 <math>y</math> 值。</li> <li>3. 能知道一次函數其代數式是一個等式，等號的左邊是 <math>y</math>，等號的右邊是 <math>x</math> 的一次式，它是線型函數的一類；常數函數其代數式是一個等式，等號的左邊是 <math>y</math>，等號的右邊是數字，它也是線型函數的一類。</li> <li>4. 能根據線型函數關係式所得到的表列數值，轉成數對，及將數對在坐標</li> </ol>

		<p>平面上標出，並用直線連接。</p> <p>5. 知道一次函數圖形為斜直線，常數函數圖形為水平線，但未能區分線型函數圖形、一次函數圖形、常數函數圖形的包含關係。</p>
層次三 形成心 像	<p>1. 外在的活動被內在的物件所取代。</p> <p>2. 能看見所經驗的所有例子的規律 (pattern)，並將之明確清楚地說出。</p>	<p>1. 當線型函數以表列呈現時，以 <math>x</math> 值用規律的整數代入表列時，會注意到 <math>y</math> 值的變動關係；或者能注意 <math>x</math> 值變動時，<math>y</math> 值也隨之變動，但是還未能注意這兩者變動的關係。</p> <p>2. 已形成一次函數圖形為直線，故在畫圖過程中，列表列時僅用兩組數值。</p> <p>3. 已形成常數函數圖形為橫線，故在畫圖過程中，列表列時僅用一組數值。</p> <p>4. 能說出線型函數的代數式包含一次函數、常數函數代數式這兩類。</p> <p>5. 將合於線型函數關係的所有 <math>(x, y)</math> 點描畫出來所得的圖形就是線型函數 <math>f(x)</math> 的圖形。</p> <p>6. 合於線型函數代數式的實例，其圖形為直線，其中能說出一次函數圖形為斜直線，常數函數圖形為水平線。</p>
層次四 注意性 質	<p>1. 注意到各心像間的區別、組合和關連，且能預測這些區別、組合和關連是如何達到的，並將這個關係明確地記錄出來。</p>	<p>1. 當線型函數以表列呈現時，能從 <math>y</math> 值變動方式判斷它是一次函數代數式或是常數函數代數式。</p> <p>2. 當線型函數以表列呈現時，能注意到 <math>y</math> 值變動和 <math>x</math> 值變動具有規則性，如 <math>x</math> 增 (減) 1，<math>y</math> 隨之增 (減) <math>a</math>，然後能以此方式預測未知的 <math>y</math> 值。</p> <p>3. 當線型函數以表列呈現時，能注意到兩數列中每組 <math>x</math> 值與 <math>y</math> 值之間關係；最後能注意 <math>y</math> 數列值與對應 <math>x</math> 數列值的常數倍相差為固定值，即「<math>y - ax = b</math>」。</p> <p>4. 能將一次函數以「<math>y = ax + b, a \neq 0</math>」的形式表示；能將常數函數以「<math>y = ax + b, a = 0</math>」的形式表示。</p> <p>5. 從線型函數的表列中，能注意 <math>x</math> 值遞</p>

		<p>增（或遞減），<math>y</math> 值的遞增（或遞減）與對應圖形的方向有關。</p> <p>6. 能注意到兩點就能決定一個一次函數的圖形；一點就能決定一個常數函數的圖形。</p> <p>7. 能注意 <math>y = f(x) = ax + b</math>（此 <math>a, b</math> 是數字），當 <math>a &gt; 0</math> 是左低右高的直線；<math>a &lt; 0</math> 是左高右低的直線；<math>a = 0</math> 是水平的直線；且點 <math>(0, b)</math> 是和 <math>y</math> 軸的交點。</p>
層次五 形式化	<p>1. 對於層次四所注意到性質作有意識的（自覺的）思考且抽象出共通性。</p> <p>2. 個體能感覺到像集合般的心裡物件。</p>	<p>1. 能理解出：線型函數的一般式子為 <math>f(x) = ax + b</math>，且能以 <math>x</math> 的一次項係數 <math>a</math> 是否為 0 為判斷此式子為一次函數或常數函數。</p> <p>2. 能理解出：線型函數的一般式為 <math>f(x) = ax + b</math>，且它的對應圖形是一直線；並歸納出 <math>a \neq 0</math> 是斜的直線（當 <math>a &gt; 0</math> 是左低右高的直線；<math>a &lt; 0</math> 是左高右低的直線），<math>a = 0</math> 時圖形是 <math>x</math> 軸或平行 <math>x</math> 軸的直線。</p> <p>3. 從線型函數的表列中，將 <math>x</math> 增（減）1，<math>y</math> 增（減）<math>a</math>，轉變成 <math>x</math> 增（減）<math>n</math>，<math>y</math> 增（減）<math>axn</math>，並以此方式預測未知的 <math>y</math> 值。</p> <p>4. 從線型函數表列中，能以「<math>y = ax + b</math>」方式找出該表列的規則。</p>
層次六 察覺	<p>1. 去考慮和反映個人的形式思考，包括察覺個人正在形式化和組織的這些觀察項目。</p> <p>2. 會去和先前注意到的性質、先前心像的特徵做比較。</p>	<p>能觀察出：</p> <p>1. <math>f(x) = ax + b</math>，<math>a \neq 0</math>，<math> a </math> 越大，直線越陡（越接近 <math>y</math> 軸）；<math> a </math> 越小，直線越平緩（越接近 <math>x</math> 軸）。</p> <p>2. <math>f(x) = ax + b</math>，<math>b</math> 越大，圖形與 <math>y</math> 軸的交點越高。</p> <p>3. 將 <math>f(x) = ax + b</math> 的圖形旋轉，僅其參數 <math>a</math> 的改變；將圖形平移，僅其參數 <math>b</math> 的改變。</p> <p>4. 從線型函數表列中，知道「<math>x</math> 增（減）」</p>

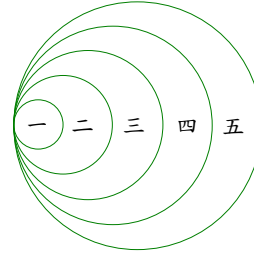
		1, y 增 (減) $a$ 」與「 $y = ax + b$ 」的 $a$ 有關，並以此方式找出該表列的規則。
層次七 結構化	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能夠以一種邏輯的結構方式解釋自己的觀察。</li> <li>2. 能夠察覺到自己的假設及觀察的結果，且符合邏輯地建立它們之間的相互關係。</li> <li>3. 能在一個公理結構中安置自己的想法，且使用形式化的證明。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能解釋為何個體他自己所提出的觀察是對的。</li> <li>2. 能以公理和邏輯來從事證明或說明自己的觀察。</li> </ol>
層次八 創造發明	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 以擁有完全結構化知識的個體，從原先的概念中掙脫，且創造出新的問題，它有可能導致全新的概念。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 從不同以往的角度去發展線型函數的概念。</li> </ol>

Pirie & Kieren (1994) 認為動態可折回成長模式有一個特性：在某兩個層次之間是「不需要邊界」的，學習者不需要特別內在的理解便可以提升到外面的理解，超越這個邊界。在這個成長模式中有三個邊界是不需要的：「製造心像」與「形成心像」之間；「注意性質」與「形式化」之間；「察覺」與「結構化」之間。

但若對照於本教學試驗中學生所學習的數量樣式與初步的函數概念（線型函數概念），因為此概念的範圍不大，若將學生的理解分為八個層次似乎又過於細分，且不容易觀察出其中的區別，所以研究者將原先的八個層次中的「製造心像」與「形成心像」，「注意性質」與「形式化」，「察覺」與「結構化」，分別各整合成一個新的層次，並提出一個假設：學生對於學習數量樣式與初步的（線型）

函數的發展階段由內至外，依次可分為以下五個層次，如【圖 2-3-2】所示，詳細內容將於第四章進行說明：

- 層次一 起始知識
- 層次二 製造與形成心像
- 層次三 形式化
- 層次四 結構化
- 層次五 創造發明



【 圖2-3-2 數量樣式與函數的學生理解層次 】