

第二章 文獻探討

研究者根據研究目的：探究中學生對幾何證明閱讀理解的現象，以文本和讀者兩個面向的發展，來思考文本預計設想的公認內涵和讀者所認識和理解的產出間有何不同的特徵與落差。由於閱讀的文本內容以幾何證明為主，研究者首先整理幾何圖形的概念與思考之相關文獻，再配合圖形瞭解與論證的學習特徵，探討幾何證明的閱讀理解與幾何圖形的認知有何關聯。由於證明除了與所指涉的內容相關以外，也包含了所依循的推論規則，兩者共同影響讀者判斷證明所呈現的有效性。所以，研究者希望透過數學證明在公認的和學生所認識理解的有效性的分析和比較，從中臆測學生從自發性朝向公認的形式化語言可能面臨的阻礙。此外，亦須參考語文科閱讀理解的相關研究，一方面瞭解閱讀理解的認知歷程，一方面也想選出影響學生對幾何證明閱讀理解的主要因素。透過回顧文本和讀者所延拓的關於幾何與閱讀等文獻後(如圖 2-1)，擬定有關學生閱讀理解一個證明過程的預測變項，依此探討其對幾何證明閱讀理解可能產生的影響。

本章共可分為三節：一、幾何圖形的認知與論證，二、數學證明的有效性，三、閱讀理解，第一節包含(一)幾何概念、(二)van Hiele的幾何思考層次理論、(三)圖形的瞭解與論證，第二節包含(一)有效化數學證明的特徵、(二)解讀與建構數學證明的有效性、(三)學生所認知的有效性，第三節包含(一)閱讀的觀點 (二)閱讀理解的歷程 (三)理解歷程中的認知處理、(四)影響閱讀理解的因素，經由統整與探討這三大主題的九個分項之相關文獻，初步瞭解影響閱讀理解的讀者內在認知和文本外在規約等面向上的因素。

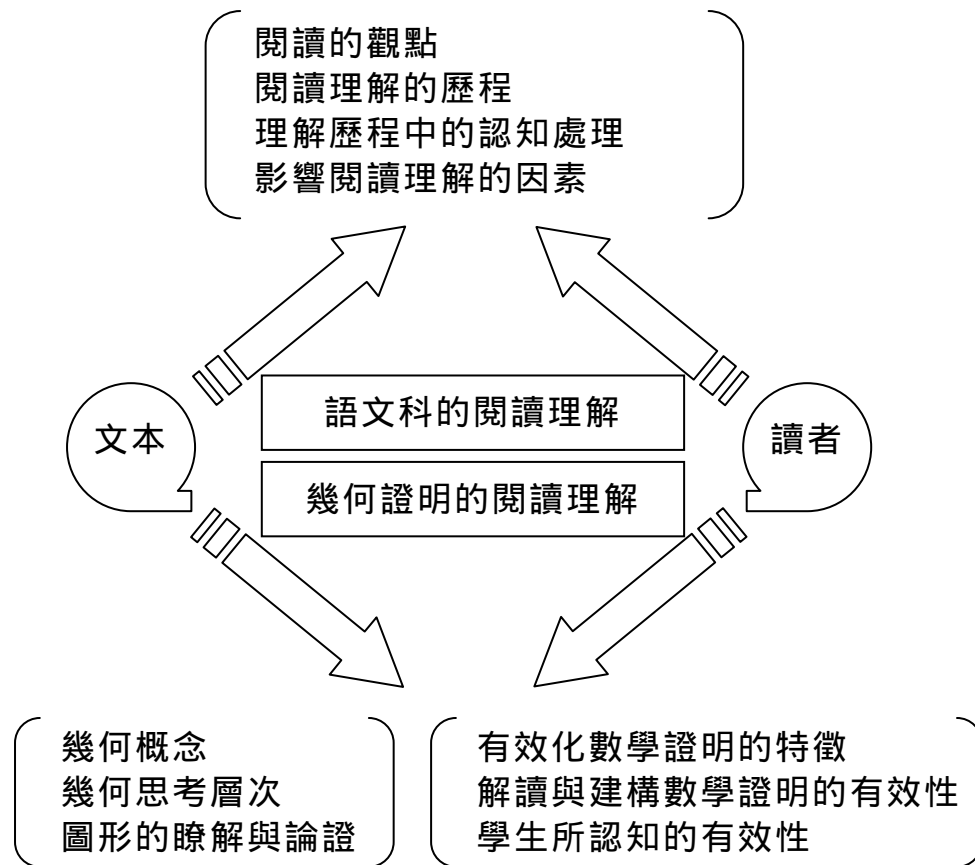


圖 2-1：相關文獻的架構

第一節 幾何圖形的認知與論證

一、幾何概念

在數學的發展中，數學概念都有一個形式且嚴密的定義，稱為概念定義(concept definition)，和另一方面在個體心中對該概念所反映的概念心像(concept image)。當學生在決定一個數學物件是否為某個概念的例子時，並不一定以形式上的定義來決定，而是以存在的影像來決定，稱為概念心像(Vinner, 1983)。Vinner(1991)將概念定義和概念心像看成兩個區塊(cell)，並依此描述學生在某個認知工作下(cognitive work)，概念定義和概念心像的互動狀態，理想中符合規約的互動狀態可能會有如下圖的三個種類：

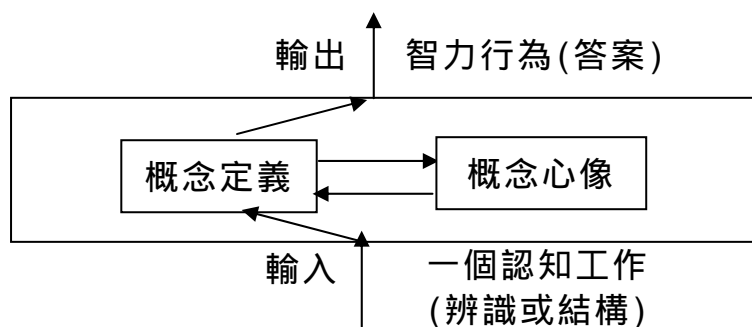


圖 2-1-1：概念定義和概念心像的相互作用(Vinner, 1991)

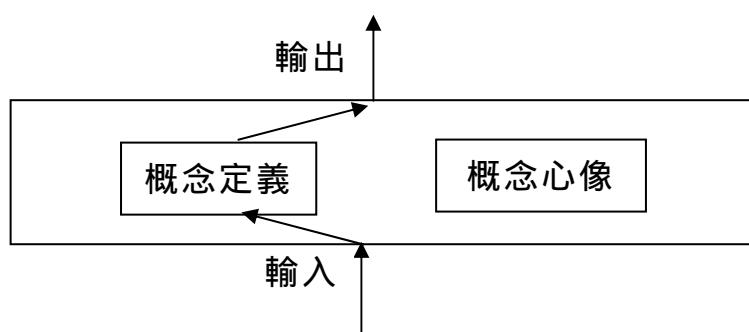


圖 2-1-2：純粹的形式演繹(Vinner, 1991)

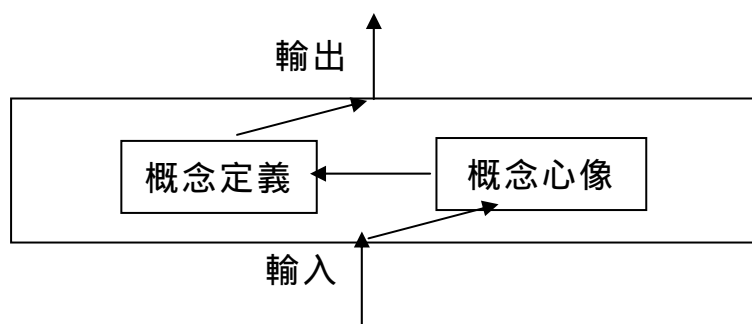


圖 2-1-3：直觀思考下的演繹(Vinner, 1991)

如果學生要達到正確理解幾何敘述「等腰三角形的兩底角相等」和此敘述的證明時，學生必須區分等腰三角形的定義和外延的屬性，以及解碼形式上的表示方式，才可能瞭解此敘述和完整的演繹證明。因此概念定義和概念心像的互動模式則必須為圖 2-1-1，即概念定義和概念心像相互作用下的認知歷程。如果學生的概念心像只有某些典型的類型，可能影響原本概念定義的辨識，或是造成幾何推論有效性

的錯誤判斷，也將在本研究中進行調查。

大部分基本的幾何概念都是由某些相關的屬性所交集而成的，例如：等腰三角形可以看成(1)三角形(2)有兩邊(3)是等長的，而由這些相關屬性的最小集合則形成某數學概念的定義，這又成為往後判斷例子和非例的標準(Hershkowitz et al., 1990)。Fischbein(1987, 1996)認為直觀是形成概念心像的主要來源，而且概念並不是一個孤立的心靈實體，在本質上它能夠維持各觀念間不同的動態關聯。外在物件雖有其原始的抽象概念，但各種關於此概念的表徵形式也會影響學生的認知方式與成果。當學生閱讀文本中的幾何證明時，除了受到圖形概念的抽象性質與表徵方式的干擾，勢必也和本身所具有的圖形概念心像和定義產生交互作用。而且，在學習經驗中定義是否已經被明確地認識，也應該會影響學生幾何證明的閱讀理解。

二、van Hiele 的幾何思考層次理論

van Hiele 的幾何思考層次理論探討幾何思維的認知特徵與發展層次，從 Gestalt-like 視覺開始，透過描述、分析和抽象等歷程，才漸漸發展到形式證明的思考層次。van Hiele 認為幾何思考有五個層次，這五個層次依照相同的順序而漸進式的發展。下面就簡述 van Hiele 幾何思考的五個層次(引自 Clements & Battista, 1992)：

層次 0：視覺(visual)；學生能根據圖形的整體外貌來辨識和思考圖形，主要以視覺上的典型特徵來判斷，例如：看起來像長方形。推理方式也是以感覺為依歸，並非以某個性質來比較分類不同的圖形。

層次 1：分析(analytic)；學生可以辨識圖形的構成元素以及元素及元

素間的關係，且能經由觀察、測量、繪圖、建模等方式發現圖形的性質，而以性質分類圖形也為往後的發展奠下幾何論證的基礎。

層次 2：關係性(relational)；能根據圖形性質形成定義，區分充分和必要條件，並能夠推論圖形的包含關係。當學生發現不同圖形的性質時，也產生對於建立這些性質間的邏輯關係的需求，但學生還是無法瞭解邏輯演繹是有效化幾何關係的重要方法。

層次 3：演繹(deduction)；可以在一個公設系統中建立定理，能辨認無定義名詞、基本定義、公設及定理的差異性，可以從給定的已知邏輯地推論出一個幾何命題的結論。

層次 4：嚴密(rigor)：不需要可參照的模型，即可形式地推論抽象化的數學系統，除了瞭解公設化系統的意義，也能建立、精緻化、比較不同的公設系統。

van Hiele 的幾何思考層次理論也注意了不同層次間的語言特徵，各層次的語言不只在豐富性和精確性大不相同，而且在每一層次所使用的符號以及這些符號的參照系統也不盡相同。在某個層次被視為正確的符號語言在下一層次可能是不當的，因此順應新層次的參照系統下，符號的使用也必須加以調整修正。若期望以形式前的直觀式論證分析圖形間的關係或性質，則至少必須達到思考層次 2；若更進一步要求推論過程的嚴謹和形式化，則必須達到層次 3。但是，在層次 2 或 3 的學生，有關於幾何證明的閱讀理解又有什麼不同呢？因此本研究的研究對象也選擇了未學過和學過幾何證明的學生，比較他們閱讀理解的表現和閱讀的心智特徵。

三、圖形的瞭解與論證

在與幾何證明有關的研究中，Clements & Battista 也提到學生要成功的完成一個證明，則必須將證明本身和證明的附圖作一個語義上的連結，否則可能會依照視覺的圖像來得到答案。因此當一個題目附上圖形時，學生必須將焦點放在思考圖形中哪些是本質上的要點，哪些不是。任何幾何概念其實都只是一個抽象的概念，並不存在於物理世界。而一個具體的幾何圖形雖然能幫助我們瞭解幾何概念或找到幾何證明的關鍵想法，但也可能有礙於形式化和一般化的幾何思考。Duval (1995)認為某些圖形是具啟發性的(heuristic)，經由圖形的操弄及維度的轉變，可以幫助我們解決原來並不容易解決的幾何問題。因此在他的研究中，提出了四種關於圖形的瞭解：知覺性、序列性、操作性和啟論性瞭解。當學生面對幾何命題或圖形時，或許也會喚起知覺性的瞭解或其他的瞭解來幫助證明的閱讀理解。為了充分瞭解所閱讀的幾何證明，必須應用哪些瞭解型態？學生是否能夠充分利用不同的圖形瞭解來促進自身的閱讀理解呢？

Duval(1998)透過幾何活動觀察認知層面時，提出幾何牽涉到三個不同的認知過程(1)針對空間位置的概要性視覺處理(visualization) (2)藉由工具呈現結構性的構圖(construction) (3)為求知識延伸、證明、解釋等論證性的推理(reasoning)。在這三種認知的互動模式下，Duval 又進一步說明從一個已知的資訊到新資訊的過程就是推理，如歸納、推斷等，這也正好呼應了 Tabachneck-Schijf 和 Simon (1996)對於表徵的詮釋。他們認為表徵是用來記錄、儲存資訊和遵循一套規則來操作資訊的過程，在這個詮釋中，不僅蘊含表徵的內涵與多重功能，也顧及一組操作資訊的規則，所以數學論證所需的推理規則即融入其中。此外，資訊的主要功能是讓人能從資訊本身擷取出其他資訊，擷取的

過程也需要推論規則來評估新資訊的原創性和有效性。

Duval 針對圖形思考的認知分析，也有助於進一步瞭解擷取和推論資訊的過程。依據記號系統的特徵，可將擷取和推論圖形資訊的方式區分為(1)單純的配置過程：用操作性瞭解來描述圖形，(2)自然語言的論證過程：自然地用敘述、解釋、論辯等一般語言來表現，(3)理論語言的論證過程：以演繹來進行，可以單純的用符號表徵。以理論語言和以自然語言來表達的關係非常密切，但對學生所造成的困難和所感受的重要性則有所不同。在推論過程中，Duval 依據不同的資訊量也可細分成三種不同組織資訊的層次：(1)整體的層次：根據整體過程將每個步驟連結，(2)局部的層次：根據命題或圖形的局部狀態，將至少三種性質或過程組織起來，(3)微觀的層次：必須能從論點中，分辨出被用來證明的前提和結論。

研究者將各層次類比到閱讀證明的過程時，假設微觀的層次是能夠分辨證明中各單一論點的前提或結論，局部層次必須判斷兩個論點以上的邏輯關係，而整體層次則進入統整的階段，企圖勾勒證明的結構或大綱。

第二節 數學證明的有效性

一、有效化數學證明的特徵

數學證明不同於自然科學中經驗性的實證，也不同於社會科學中詮釋性的舉證。到底數學證明是什麼？我們如何評鑑一個數學證明可以證明了某個命題呢？其中判斷的標準又是什麼呢？數學家將他們的信念放在嚴謹的證明，但卻無法有條理的解釋嚴謹指的是什麼，或嚴謹的證明具備什麼。在他們的工作中，完整和不完整證明的界線總

是模糊不清，也常常有所爭議(Davis & Hersh, 1981)。大部分的數學家在學習和實作數學過程中累積模仿、修正、調整和創造的經驗，漸漸地才直觀地認知什麼是正確或不正確的證明。那麼有效化數學論證的需求究竟源自哪些活動呢？在各種活動中個體所需的知識內容、論證信念、推理能力又是什麼？研究者先從歷史上數學知識形成過程中，抽離一連串關於有效化論證過程的活動。Lacatos (1978)在證明與反駁裡主要以尤拉公式的形成為背景，導演了一個原猜想的發展與完成是需要經過子猜想的形成、檢驗、反駁、修正的循環過程，甚至動搖原猜想，再重構或者解構原猜想。他也提出數學發現具有一種簡單的模式，它是由下列七段片子所組成的：

1. 提出原猜想。
2. 非形式證明(一個粗糙的思想實驗或論點，把原猜想分解成一些子猜想或引理)。
3. 出現全盤的反例(原猜想的反例)。
4. 再檢驗非形式證明(突顯附罪引理，產生新的概念，改善原猜想)。

前四個片子是論證過程的重頭戲，以下三個也常常穿插其中不定時演出。

5. 和其他定理的證明作交叉檢驗。
6. 檢查一開始被接受但現在遭受反駁的猜想。
7. 視危機(反例)為轉機(就是例子，開拓新領域)。

從這七段片子中，研究者抽離幾個活動來說明有效化已經提出的定理與證明的活動。在出現粗糙的思想實驗或造出例子時，數學家必須辨識它是否是一個反例。或是先想著找反例也果真造出反例後，我們也朝向改善原猜想或引理。又或是在非形式證明與製造反例的過程

中，析出潛在的假設或概念更是無可避免的。甚至在完成臆測與反駁之後，也可能比較其他的證明和新的定理有何關聯，比較前提、條件、結論之間的異同；也可能思考是否有不同的假設來合理化既有的反例，還是修改遭受反駁的猜想。這些辨識、比較、析出、檢驗、合理化等思維活動，也就形成了有效化已提出的定理與證明過程中的具體目標。在定理與證明的完成後，則進入思考如何應用或推廣此定理，就如同在數學文本上所出現的系理。從歷史數學經驗的分析，我們已點出幾個有效化數學論證需求的來源，而且也看到它確實是證明與反駁過程中的一環。

數學證明隱含知識組成定理的過程中，知識所呈現的不同定位；數學證明需要一個社群來辨認出這樣的特徵，而且命題、定理的有效性與演繹規則也是透過社群溝通所共享(Balacheff, 1987)。Duval(1991)也曾特別深入剖析知識的定位，他提出數學證明不同於一般論證的兩種特點是：其一，它是基於敘述在演繹操作中的真值(truth value)而非認識上的真值(epistemology value)。其二，數學證明中演繹推理的發展有賴串連基本演繹步驟的可能性，而一般論證只是有賴於再詮釋或累積不同觀點下的論點或解說。當讀者閱讀某一命題的證明過程時，都與命題中的某些數學例子、概念或性質互相關聯，除了從符號或命題的表層結構觸動腦中數學意義的深層結構，也必須排除認識上的真值(例如：我知道”兩個偶數相加一定是偶數”)，把焦點放在演繹邏輯的真值(例如：基於”任意偶數結構”和”代數運算規則”的前提評論”任意兩個偶數相加一定是偶數”的證明過程)。如果讀者原有的偶數基模是算術型，透過閱讀比較某些證明過程或許也可漸漸將偶數的認知調整成代數型基模，並從中體會有效化”任意”的可能性與協調有效化”任意”的不同方式。更進一步地，可以猜測類推新的命題”兩個

奇數相加一定是偶數”(此猜測不只是單純的類比還需要歸納性一般化的調整)，再應用證明偶數的過程來證明奇數。

Skemp(1982)也曾提及數學符號系統的意義來自數學的深層結構，包含數學想法和想法間的關係，而意義只能透過表層結構間接地傳遞與接收，這種數學深層結構的意義則是來自於數學社群公認的結果。另一方面，個體也透過表層結構來觸動腦中基模(概念系統)的深層結構，真正的數學理解需要深層結構的吸力強過表層結構的吸力，因為深層結構的好處在於內部的一致和連貫。如果學生的學習經驗只建立在操弄空洞的符號系統，當面對探討概念間邏輯關係的數學論證時，學生自然必須面對更多更難以理解的障礙。對於數學命題對與錯的判斷，首先觸動的是來自於命題中所涉及的數學概念，再透過腦中概念系統的深層結構才能有意義地評估命題的對與錯。而學生只是表層的操弄符號時，有效化 $2a+2a$ 和 $2a+2b$ 的結果則都是(任意)兩個偶數相加，並無法區分前者是相同的兩個偶數相加，後者才是任意兩個偶數相加。當數學教學著重於累積演算技術的經驗，對於大多數學生處於表層理解也就不太驚訝了。至於幾何認知的發展，從分析、非形式演繹到形式演繹一直是許多學生學習過程中的夢魘，尤其在幾何論證中，學生必須理解的不只是圖形概念及其性質，也必須從不同脈絡的視覺圖形抽象化圖形的定義和性質間的推演。但是透過歸納許多正例或比較不同的正例與反例就可一般化成具有邏輯次序的證明嗎？正例與反例除了充實學生的概念心像和定義對於瞭解數學證明的深層結構又能產生多少效力？

在「證明的本質」一書中，Fawcett(1938)明確提出如果學生清楚瞭解證明的本質，那麼表示他/她能夠：

1. 在命題中找到重要的關鍵字或句子，並想要知道它們的定義。

2. 對於被迫接受的結論需要相關的證據來支持。
3. 分析證據以及區分事實和假設。
4. 辨識推得結論所需的假設。
5. 評鑑和取捨某些假設。
6. 評鑑論證來判斷命題的對錯。
7. 不斷檢驗推論中潛在的假設。

也就是說，從老師或文本所給的資訊中，學生漸漸能夠有意識地主動釐清結論的前提或假設是什麼，瞭解推論的有效性不只與推論的規則相關也包含定義和定義所蘊藏的內涵，而且也能體認論證過程中的思維方法。

二、解讀與建構數學證明的有效性

有些研究致力於探討學生對於教師或文本所提供的證明的瞭解，也有些研究想要探討學生建構數學證明的能力。前者主要透過學生聽或讀之後的反應來分析學生所瞭解的，例如：有意義的證明應該是對於學生具有解釋力的證明，教學時也應該讓解釋性的證明重於證明性的證明(Hanna, 1989, 1990; Healy 和 Hoyles, 2000)。Tall(1979)也發現舉例層次的構念例證明(generic proofs)也是學生容易瞭解的，但此種證明又不同於經驗性證明，它還具有可一般化的特性。Selden & Selden(1995)則讓學生評論某個證明是否證明了某個給定的定理，但由於解讀一個證明不像建構一個證明一般，並不一定會有具體可觀察的產物來瞭解學生的思維特徵，所以研究者必須設計若干目標來推論學生理解了什麼，又是如何產生理解的。反觀學生在建構證明時，即在執行有效化的活動，從學生所建構的證明過程，研究者就可以推論學生所瞭解的證明的部分面貌，但是能夠形式化建構證明的學生是否

真正瞭解了形式證明的有效性？

Selden & Selden (2003)以文本的觀點來探討大學生有效化一個證明的過程，即如何辨別數學論證是否證明了某一個給定的定理，在數學教育中這可能是首先以文本理論與閱讀理解來探討數學家的證明觀和證明的有效性。對於數學家而言，雖然證明的對錯應該是獨立於作者，但卻假裝對於命題仍抱持存疑的方式去解讀一個證明。也就是說，一方面文本的有效性來自於公認客觀的檢證，另一方面讀者仍以存疑的認知去評鑑此文本的有效性。本研究認為如果從文本的觀點切入探討證明的閱讀理解，則解讀證明不能只單就文本有效性的分析與批判來思考，還必須囊括個體對資訊的選擇、統整與推論等認知歷程，所以本研究將於下一節提出有關閱讀理解的文獻探討。

建構數學證明比較像是 Schoenfeld 所提出的數學解題，需要在恰當的時機下產生不同的想法。而有效化給定的證明比較像是讀的過程，強調線性式或來來回回從已知到結論的前進(Selden & Selden, 2003)。本研究也認為解讀與建構數學論證無論在起始資訊，新資訊，或是在論證活動的目的性與活動歷程都有所不同。建構數學論證是由臆測或給定一個命題之下，再透過論證的過程來說明為什麼這個命題是真的或是偽的；其起始資訊就是一個命題，而新資訊是證明或反駁的過程。但解讀數學論證的起始資訊則可能同時包含命題與證明或反駁的過程，也可能只有證明或反駁的論證過程；而新資訊可能是對於命題與證明過程的理解，可能是命題的特殊化，也可能是找到證明或反駁過程的錯誤。

就論證活動的目的性而言，建構數學論證的目的是明確的，主要是確認數學命題的真偽。但解讀數學論證的目的確是因人而異，有些是為了模仿，有些為了洞察證明過程的技巧，或是為了審查證明過程

的有效性，也有些為了應用到建構另一個命題的論證過程，或是為了應用到解題的過程等等。至於建構數學論證的歷程，可以藉由綜合 Hayes 和 Flower (1980) 的寫作與 Polya (1957) 的解題歷程來描述，此歷程分為瞭解命題、擬定論證策略、轉譯執行、回顧。在瞭解命題的階段，是指透過書面敘述理解命題中的已知條件與結論。擬定論證策略則包含兩個部分；前半部是檢索相關的訊息，後半部是設計論證的方式與步驟。轉譯執行階段是指寫下論證的過程，回顧是需要論證者檢驗過程的有效性與可讀性。由於解讀數學論證的目標因人而異，這也會產生不同的解讀方式與過程；如此看來，解讀數學論證也不像建構數學論證具有一個概述性的歷程，但建構數學論證歷程的回顧卻也隱含著解讀有效性的活動。

三、學生所認知的有效性

Selden & Selden(2003)詳細分析三個在概念表徵、演算過程或邏輯上有錯的證明和一個正確的證明後，讓 8 位大學生判斷這四個證明的有效性並說出他們的想法，研究發現學生說他們是如何讀證明的似乎不能有效預測他們真正的理解，也就是說他們可能無法具體實踐他們所想的；而且學生主要偵察出來的錯誤都是局部的，而忽略了全部的或結構性的錯誤，例如：某證明過程證明了“原本命題的結論推得原本命題的條件”。雖然在數學家做證明的過程中也有合理判斷的成份，但學生合理判斷的有效性似乎是非常薄弱，常以自我對整體證明的感覺和表層的檢驗來換取證明的有效性。這種不同於專家合理判斷品質上的差異可能來自於什麼因素呢？學生是否受到邏輯能力和知識內容的影響而混淆了推論的必然性和不確定性？

有關幾何證明的有效性瞭解之研究中，李宜芬(2002)以四種不同

的附圖形式來評估其對證明有效性瞭解的影響，發現四種不同條件下影響的程度由大至小分別為(1)改變為特列圖形，(2)任意伸縮、放大、旋轉，(3)剛性變換，(4)改變符號。從訪談的資料中，也顯示一個「熟能生巧」的情意觀感，在課堂中學生形成了多作有益無害的觀念，也因此影響有效性的瞭解。研究者認為此熟能生巧的觀感並不能視為影響有效性主要的來源，因為研究中顯示此觀感並未對於學生在四種情形下的有效性瞭解產生相同的作用。無可否認地，學生不完全依據論點的邏輯地位來評估證明的有效性，有時只以圖形作為思考的主體。除了探討在什麼問題情境下會影響學生判斷有效性的結果，至於學生判斷有效性的認知來源或標準究竟是什麼也有待進一步地探討。

Chazan(1993)指出許多研究已發現學生無法辨識經驗性證明的特殊性，也無法欣賞形式證明的一般性，並認為證據(實例)就是證明，形式證明只是證據。以關於三角形的命題為例，學生因為題目是有關三角形的，所以開始考慮測量各種不同的三角形：銳角、鈍角、直角、正、等腰，他們強調在下結論前，檢驗所有種類的三角形是很重要的，且這個策略是建立在一個類型的三角形可代表所有這個類型的三角形。即使他們了解用例子來代表的局限，但他們的策略就是減少這個局限，並不是思考測量不同類型的有效性為何。有些學生認為演繹證明不能保證沒有反例，證明只是針對那一個附圖，或是那個特定的形狀，對於其他的形狀則必須再證一次，不能用同一個證明代表全部的情形。學生決定反例是不是存在的重點在於，與這個圖形相關的知識和已知所給的條件限制，而不是演繹證明的完成與否。

至於代數論證觀念的研究，Healy & Hoyles(2000)以學業成就前20-25%的英國學生為研究對象，發現超過半數的學生知道經驗論證的不足，但至少也有三分之二的學生認為經驗論證具有解釋力。在經

驗、敘述和代數形式論證中，學生正確評估代數形式論證的效力表現最差，也認為代數形式論證的解釋力最低。敘述論證既是學生最能正確評估其效力，也是學生認為具有最高解釋力的論證方式。總的來說，學生選擇最接近自己想法的證明方式，雖然不必然和自己建構證明的方式相同，但卻與判斷證明的效力和解釋力具有顯著正相關。較令人意外的結果是，學生的反應和教師背景、教師自己選擇的想法和教師給高分的論證方式等變數並沒有顯著的關聯性。

第三節 閱讀理解

一、閱讀的觀點

早在 1965 年起，Kenneth Goodman 和其他研究者將語言學的領域從行為主義轉向唯心主義的理論研究。他們質疑閱讀只是文章表面語音、語義、語法的探討，主張閱讀是一種言語的過程。透過口語閱讀錯誤分析作為探究閱讀過程的媒介，而發展出心理語言的閱讀模式，提出了所謂的「雙重文字說」。為了瞭解文本的意義，閱讀模式包含四種活動的循環：取樣、預測、確認、整合語言線索和背景知識。讀者所賦予文字的意義和文字本身一樣重要，讀者藉由同化和調整而轉變了既有的認知結構與價值觀(Goodman, 1985)。沒多久，認知理論的閱讀研究也漸漸崛起。這種理論將閱讀視為文本與閱讀者的互動，當然閱讀者扮演著主動的角色。閱讀不只是文字的辨識、字詞字義的解碼、或逐字逐句的重現過程，而是一種讀者與文章互相交流的動態歷程，需要讀者啟動了相關的知識和能力才算進入理解文章的世界，而且推論在閱讀理解中也扮演舉足輕重的地位(引自 Borasi & Siegel, 2000)。

二十世紀文學的批評理論有三大方向，即作者中心論、文本中心論和讀者中心論(龍協濤, 1997)。近年來，語文科的研究趨勢已逐漸轉向以讀者主動詮釋以及和作品互動下的閱讀觀。為求有意義的瞭解文章內容，閱讀者必須主動投入閱讀的工作並進行思考；而互動性是指既非只有閱讀者或只有文本單方面就能產生閱讀的工作(Casanave, 1988)。因此，造成閱讀理解困難的來源主要也是來自於文章架構和閱讀者本身兩方面。閱讀故事類與說明文的文章所需的認知處理歷程與負荷都有所不同，前者主要以「由上至下」的方式處理，而後者會較依賴於「由下至上」的方式(Meyer & Rice, 1984)。由於這兩種文章所傳達的概念與概念間的聯結方式也有所不同，讀者瞭解故事文章時需要一些社會、生活情境、文化等方面的知識基模；而瞭解說明文時則偏重邏輯關係的推論(Black, 1985)。當文本涉及數學命題與證明時，它所傳達的是概念間必然的邏輯關係，相同的概念在不同的命題也可能具有不同的地位(假設或結論、引理或系理)，不同證明方法所蘊含的不同數學思維，證明的結構與步驟等等都是分析證明的文本必須考慮的特徵。

理解是閱讀的終極目標嗎？許多時候，我們閱讀者不只是想要探知新的資訊，更想從資訊中產生新的知識。與其以理解作為閱讀的終極目標，倒不如說不斷改善所理解的才是閱讀無止境的追求。但無論是理解或不斷改善所理解的過程中，思考是必要的手段。那麼研究閱讀和研究思考就成了同一回事嗎？那也不盡然。許多關於思考的研究是設計推理作業來探討人類推理的模式與特徵(Evans, Newstead & Byrne, 1993)，但閱讀的研究只是把推理作業當成增進閱讀理解的工具之一。至於推理的部分，在研究思考主要以演繹規則為主，閱讀理解的研究主要以合理推論為主；舉個例子，當讀者閱讀了下列兩個資

訊後，

1. 阿明正在書房裡一邊聽音樂一邊念書。
2. 這時候，隔壁鄰居大喊失火了。

可能會產生推論”阿明趕緊跑到屋外”，也可能會產生推論”阿明仍舊一邊聽音樂一邊念書”，或是讀者根本沒有作任何推論繼續往下看。雖然閱讀與思維的研究主題與方法不同，但對於與推論過程相關的因素仍抱持共同的興趣。

成功的閱讀理解包含概念性理解(敘述性知識)，以及技能與策略(程序性知識)兩方面。以下將簡介閱讀理解的相關理論，藉由理論上所呈現的認知歷程元素來描述熟練的和不熟練的閱讀者在概念理解、基本技能或策略上的差異。

二、閱讀理解的歷程

在分析閱讀理解方面，Gagn'e, Yekovich & Yekovich(1993)的理論被廣為採用。他們將閱讀理解分為：解碼、字義的理解、推論理解與理解的監控四個群組，各群組又包含若干歷程元素，詳細的說明請參閱表 2-3-1。閱讀活動發生過程中，包含所有次群組中的歷程很可能都會以平行處理的方式來進行。但這些關於閱讀理解的歷程模式，大多著重於描述閱讀理解的功能性與原則性，進一步探討讀者如何建構意義的心理運作之研究仍然不多(Margliano, Zwaan & Graesser, 1998; Millis, King & Kim, 2000)。探討讀者建構意義的方法不僅有助於瞭解閱讀理解的心智運作，也有利於研究有助於閱讀理解的閱讀策略，進而設計提昇閱讀理解的教學策略。因此，本研究擬探討學生如何從數學論證的文本中建構自己的意義，此建構的思維方式是如何導致學生對文本的誤解。

表 2-3-1：閱讀理解的成分歷程

閱讀理解的 歷程群組	閱讀理解的 認知活動	說明
解碼	配對	書面文字會與一已知字的型態相配對，並從而活化該字儲存於長期記憶中的字義，此元素是用來辨識存在於個人視覺字彙辭典當中的文字。
	譯碼	書面文字會被轉讀成一串聲音，然後該串聲音再被用來活化意義。
字義的理解	字義取得	運用解碼歷程中所得的產品來辨識及選擇適當的字義。換言之，解碼歷程化了儲存在敘述性知識中字詞的知覺表象，而字義取得則會由所有被活化的知識當中，選取合於該字的正確。
	語法分析	個別字詞的意義組合成較大的意義單位時，需要藉由句法或語言學的原則來推敲某些字詞的屬性和意義，但如此所形成的概念可能是暫時性的或不完整的理解。
推論理解	整合	整合乃是把兩個或兩個以上的述敘結合在一起，可以使得文章中的概念具有更連貫的敘述性表徵。
	摘要	摘要的功能乃是要使閱讀者在其敘述性記憶內產生一個全盤性或巨觀的結構，一個巨觀的結構有如心像大綱，它們也可被想像成一按層級排列的命題，用來幫助讀者擷取文章中的主要概念。
	詳細論述	藉由文本所引動的先備知識，再聯結或建構出新的相關訊息，此歷程包含提供例子、延續結果、補充細節和類比等方法。
理解歷程的 監控	目標設定及 策略選擇	在閱讀開始的時候，閱讀者會先設一個目標，並選擇使用某一種策略來幫助其達成所設定的目標。
	目標檢視及 修正補強	目標檢視的目的乃是要確認閱讀者的目標是否達成，目標檢視的結果可能引起閱讀干擾，此時修正補強的歷程便會被活化，用來排除閱讀理解的障礙。

Evans, Evans & Mercer(1986)則認為理解是一種技能的表現，具有適當的技能便會產生理解，而與閱讀理解相關的技能有(1)字義的理解(2)推論的理解(3)評鑑的理解(4)批評的理解。對照上述的閱讀理解成分歷程，其實還是可以將評鑑和批評納入理解的監控中，讓監控歷程也融入利用舊基模解釋、預測、比較、批評文章的意義，甚至重新架構出全新的基模以增加、調整或重建既有的理解。

三、理解歷程中的認知處理

就外在表徵而言，最明顯的差異在於表徵系統的不同類型，主要分為語言的和圖像的 (Paivio, 1986; Duval, 2000)。語言的表徵具有離散的且線性的特徵，例如：生活語言或數學符號。圖像的表徵具有連續的且完形的特徵，例如：圖畫或幾何圖形。對於認知主體而言，表徵的特性又可分為抽象的和具體的。抽象的表徵不容易建立內在表徵，而具體的表徵則比較容易被主體覺知和保存。在幾何證明中，主要的表徵系統包含日常語言、數學語言和幾何圖形。

就表徵的運作而言，可分成表徵內和表徵間的運作，有哪些認知運作會影響表徵的訊息處理呢？Paivio(1986)的對偶編碼理論(dual coding theory)主要藉由語文和非語文兩種編碼系統與系統間的運作來說明認知的過程，其中有三種基本的處理過程可以被區分開來：表徵性(representational)、參照性(referential)和關聯性(associative)的過程。直接對於外在表徵所產生的內在表徵即是表徵性處理，由某種編碼系統的表徵連結到另一種編碼系統的表徵即是參照性處理，在連結到同一種編碼系統的其他表徵即是關聯性處理。進階的訊息處理則包含了組織性(organizational)和轉換性(transformational)，組織性處理是重新結構既有的訊息，而轉換性處理是轉變既有訊息的結構。

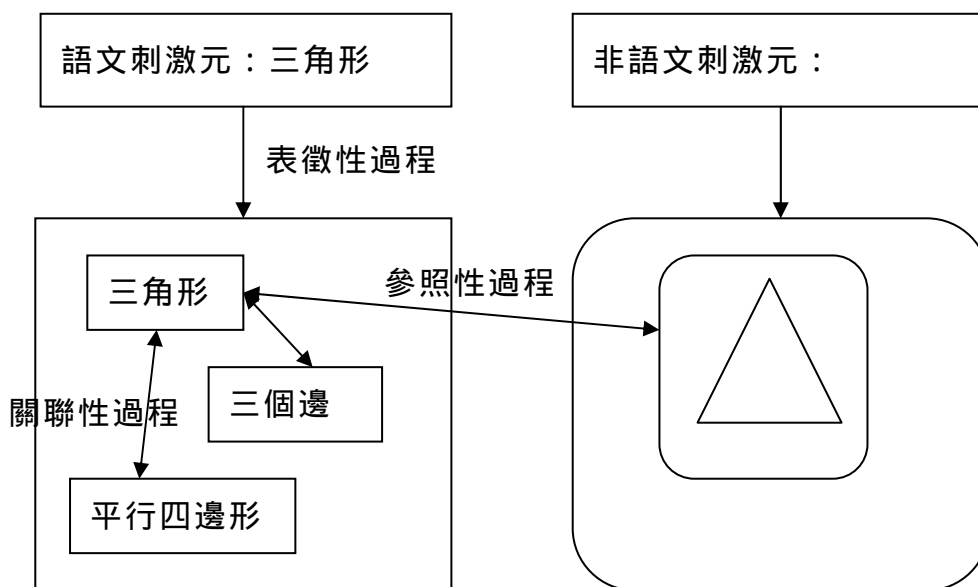


圖 2-3-1：以刺激元是「三角形」為例的認知過程分析

以刺激元是「三角形」作為例子(圖 2-3-1)，如果主體內在表徵先有了三角形的讀音或字形辨識，則稱此認知為表徵性處理；如果主體產生了三角形的心像，則稱此認知為參照性處理；如果主體產生了有三個邊、三個角、三角形面積或平行四邊形，則稱這些認知為關聯性處理。以「試證：平行四邊形的兩對角線互相平分」作為刺激元為例，如果主體產生正方形、長方形、菱形都是平行四邊形，則稱此認知為關聯性處理；如果主體想到證明兩個相對三角形全等，則稱此認知為轉換性處理；如果主體整理所想到的證明方法，則稱此認知為組織性處理。

在考量表徵系統內與表徵系統間的不同轉換下，Duval(2000)提出數學理解的認知結構(圖 2-3-2)來解釋數學知識中不同轉換的特徵與可能造成學習困難的來源。他強調數學學習是要將所需的不同登錄器(register)整合成許多新的表徵系統，這個過程必然包含許多調整與重新區分表徵系統的過程，才能在不同表徵系統間形成有效的轉換。Duval(1998)依據記號系統的特徵，將擷取和推論圖形資訊的方式區分

為(1)單純的配置過程：用操作性瞭解來描述圖形，(2)自然語言的論證過程：自然地用敘述、解釋、論辯等一般語言來表現，(3)理論語言的論證過程：以演繹來進行，可以單純的用符號表徵。再依據不同的資訊量將推理過程中資訊的組織細分成三種不同的層次：(1)整體的層次：根據結論將每個步驟連結，(2)局部的層次：根據命題或圖形的狀態，將至少三個敘述或過程組織起來，(3)微觀的層次：必須能從被當成規則來用的敘述或圖形中，分辨出被用來證明的已知部份和結論部份。在圖形的瞭解或視覺推理的研究中，Duval (1995)認為某些圖形是具啟發性的(heuristic)，經由圖形的操弄及維度的轉變，可以幫助我們解決原來並不容易解決的幾何問題。因此在他的研究中，提出了四種關於圖形的瞭解：知覺性(perceptual)、作圖性(constructive)、操作性(operative)和啟論性(discursive)瞭解。

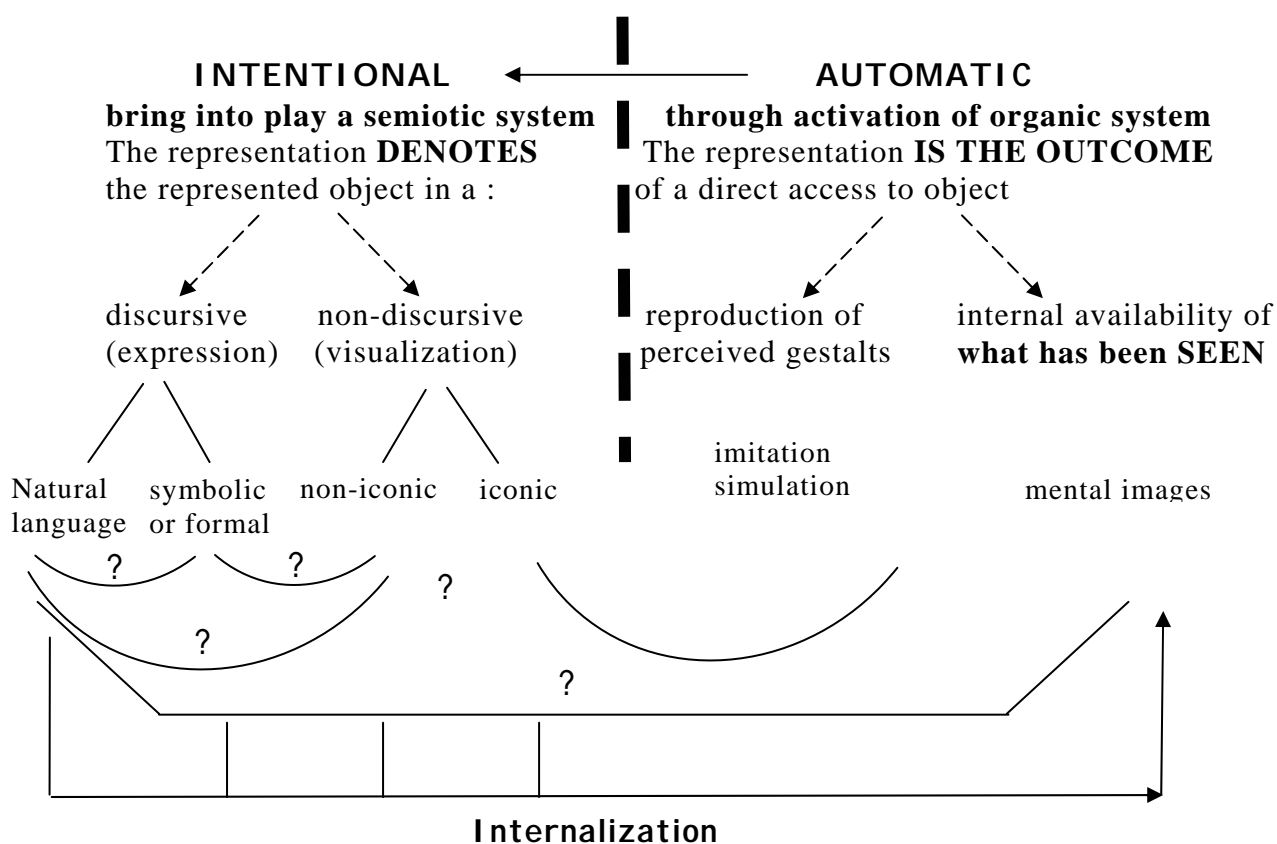


圖 2-3-2: 數學理解所需的各種表徵系統間之各種協調

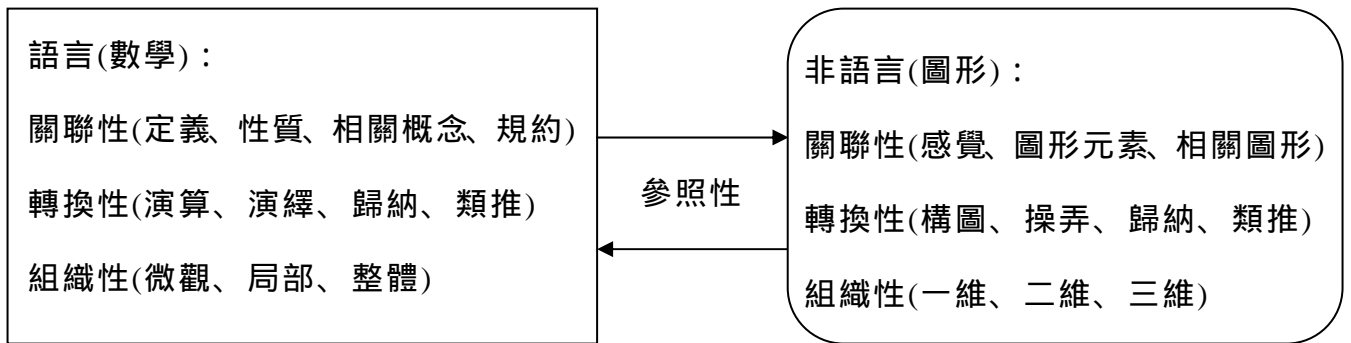


圖 2-3-3：理解的認知分析架構

基於 Paivio 的對偶編碼理論和 Duval 對認知結構、推理的組織層次與圖形瞭解的分析，本研究提出有關分析數學認知過程的理論架構(圖 2-3-3)。此架構主要以 Paivio 的對偶編碼理論為框架，以 Duval 對推理的組織與圖形瞭解的分析為內容所形成。Paivio 的理論並未就各種認知運作再區分細部的特徵，所以本研究主要參考 Duval 的認知分析來定義各種運作的內涵。由於連結到同一種編碼系統的其他表徵即是關聯性處理，所以語言刺激(數學)所引發的關聯性運作之結果可以包含定義、性質、相關概念和規約等，非語言刺激(數學)所引發的關聯性運作之結果可以包含圖形元素和相關圖形等。轉換性處理發生於改變既有訊息的結構，從數學學習的角度切入，分析改變的方法比改變後的結構更符合實際的需求，所以本研究將語言系統的轉換性處理區分成演算、演繹、歸納和類推，非語言系統的轉換性處理區分成構圖、操作、歸納和類推。

為了建立描述研究結果的理論性語言，本研究整理上述分析架構中的認知運作後，並提供一個簡便的操作型定義，請參考表 2-3-2。不過，是否將演繹放入非語言系統的轉換性處理仍是一個待解的研究問題？組織性處理是重新結構既有的訊息，依組織的訊息量將語言系

統的組織性處理區分成微觀、局部和整體層次，非語言系統的組織性處理區分成一維、二維和三維層次。雖然閱讀理解的歷程含有非常複雜的認知處理過程，總得來說所有的閱讀理解困難都可歸咎於學生未達到各種表徵轉換和認知運作的協調，但本研究仍企圖將依此理論語言來刻化學生在幾何論證閱讀理解過程中所需的認知協調。

表 2-3-2：認知處理方式的操作型定義

認知處理方式	操作型定義	內容(語言、非語言)
表徵性	從外在表徵產生/連結對應的內在表徵	
參照性	從某一種表徵系統的資訊產生/連結另一種表徵系統的資訊	
關聯性	從某一種表徵系統的資訊產生/連結同一種表徵系統的其他資訊	-語言：定義、性質、 相關概念、規約 -非語言： 感覺、圖形元素、相關圖形
組織性	重新結構現有資訊 辨識現有資訊的結構	-語言：微觀、局部、整體 -非語言：一維、二維、三維
轉換性	轉變現有資訊的結構 辨識現有資訊轉變後的結構	-語言： 演算、演繹、歸納、類推 -非語言： 作圖、操弄、歸納、類推

四、影響閱讀理解的因素

深層的理解有賴於個體的三種知識間的交互作用：策略、程序和內容知識。文本的外在表徵進入讀者的腦袋中後，讀者一方面透過先備知識或信念來理解這些文字敘述，另一方面也從既有的認知中憶取與文本相關的其他資訊。Van Dijk & Kintsch(1983)將來自於文本命題表徵的資訊視為文章基底(textbase)，整合讀者從長期記憶找出相關的

其他資訊(包含印象、動作、感覺等)後所形成的完整結構則被稱作情境模式(situation model)。文本逐字逐句的微觀結構、作者意圖表達的巨觀結構以及讀者解讀後的微觀或巨觀結構之間不見得有相同的對應關係,因為讀者所建構的微觀或巨觀結構都受到本身既有認知的影響。不同背景知識的讀者,拓展和一般化文本基模所產生的情境模式也就有所不同。舉個例子,有些人看到 $1+2+3+\dots+n$ 可能會連結到高斯的故事、圖像規律、等差級數或 x 在 $(0,1)$ 區間的積分,有些人看到 $(0,1)$ 也可能想到坐標、向量或數對。

從建構主義觀點來看待理解時,個體的先備知識和被觸動的基模都是影響理解程度的主要因素(Rummenhart, 1980)。先備知識不只影響學生對於文本的解碼過程,也連帶牽動重新編碼的詮釋過程。例如:對於數學命題對與錯的判斷,首先觸動的是來自於命題中所涉及的數學概念,再透過腦中概念系統的深層結構才能有意義地評估命題的對與錯。如果學生只是表層的操弄符號時,解讀 $2a+2a$ 和 $2a+2b$ 的結果則都是兩個偶數相加,並無法區分前者是相同的兩個偶數相加,後者才是任意兩個偶數相加。也許當數學教學著重於累積演算技術的經驗時,對於大多數學生處於表層理解也就不太驚訝了。至於幾何認知的發展,從分析、非形式演繹到形式演繹一直是許多學生學習過程中的夢魘,尤其在幾何論證中,學生必須理解的不只是圖形概念及其性質,也必須從不同脈絡的視覺圖形抽象化圖形的定義和性質間的推演。這不只是透過歸納許多正例或比較不同的正例與反例就可一般化成具有邏輯次序的證明,正例與反例可以充實學生的概念心像和定義,但至於完備的邏輯系統則需要同時整合知識的內容與邏輯關係。

儘管我們很難能明確地知道閱讀正在進行的歷程為何,以及何時進行什麼歷程,但研究顯示熟練的閱讀者在上述的閱讀成分歷程之表

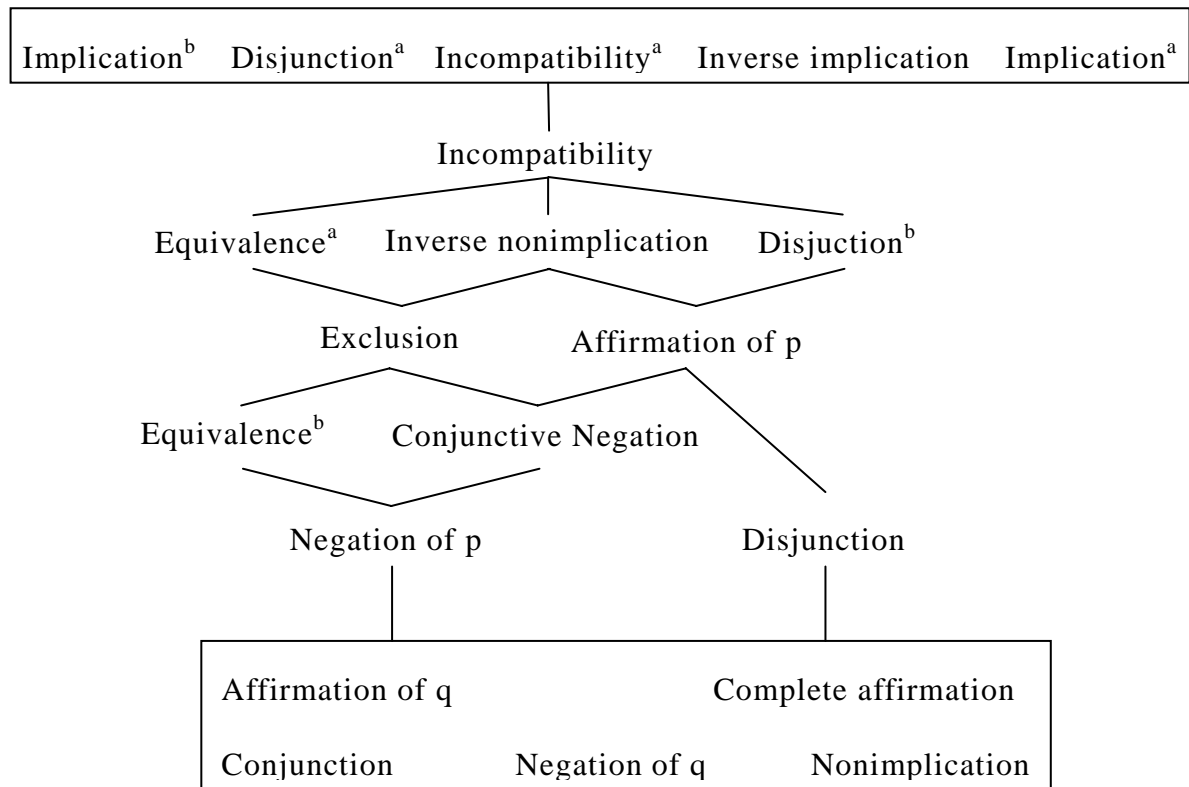
現，幾乎都遠比不熟練的閱讀者要來得好。尤其是推論理解的過程，Rickheit, Schnotz & Strohner (1985)強調此過程包含了給定的訊息和產生新的訊息，和推論規則與影響推論的相關元素；並認為如果閱讀理解缺乏這部分的理論，則許多實證資料也就無法有完整的解釋。在研究閱讀推論的分類中，有的以推論的功能與相對時間作為推論的分類標準(Van Den Broek, Fletcher & Risdén, 1993)，也有的以推論在文章中所產生的作用為基礎 (Graesser, Singer & Trabasso, 1994)。前者的分類有助於我們分割解讀的歷程，把閱讀前、時、後和讀不懂時來探討解讀歷程所需的認知與後設認知的能力與策略；而後者可以用來分析解讀成果的屬性。

在邏輯推理的領域中，以心智模式方法研究不同情境的邏輯推理作業已經發現情境知識是影響推論表現的關鍵因素。心理學者也指出人們有正確的推論結果，並不表示使用正確的邏輯規則，可能是使用情境所引動的其他資訊來幫助推論(John-Laird, Legrenzi & Legrenzi, 1972; Cheng & Holyoak, 1985)。為了減少情境知識對邏輯推理表現的影響，所以本研究希望邏輯推理的內容盡量避免因知識的不足或充裕而干擾了推論的結果。

Jansson(1986)依據 Piaget 對於形式邏輯推理的結構分析，設計一份關於形式運思的命題邏輯測驗，要求受試者從這個二元命題運算所包含的邏輯意義來判斷它們的可能性。研究結果顯示十六種二元命題運算的難度並不相等，大致可分為七個階層(如圖 2-3-4)。

在心理學的研究中，也有以基本演繹規則為內容來研究人類的推理能力，主要包含六種常見的條件式推理，見表 2-3-3。其中符合演繹規則的推論是 MP、MT、LS 和 LC，而 DA 和 AC 則是謬誤的兩種推論。本研究將 Jansson(1986)以兩線間長短和位置關係作為測驗邏輯

能力的情境稱為概念情境中的推理，另外以記號方式作為測驗演繹規則推理能力的情境稱為記號情境中的邏輯推理，從兩種不同的情境脈絡中來測量學生的邏輯推理表現。



^a 表示條件形式(if-then)的語言

^b 表示連接形式(or)的語言

圖 2-3-4：十六種二元命題邏輯的階層關係

表 2-3-3：條件式推理的種類與說明

條件式推理	縮寫	第一個前提	第二個前提	結論
Modus Ponens	MP	如果 p 則 q	p	q
Denial of the Antecedent	DA	如果 p 則 q	非 p	非 q
Affirmation of the Consequent	AC	如果 p 則 q	q	p
Modus Tollens	MT	如果 p 則 q	非 q	非 p
Law of Syllogism	LS	如果 p 則 q	如果 q 則 r	如果 p 則 r
Law of Contrapositive	LC	如果 p 則 q		如果非 q 則非 p

除了先備知識、推理之外，後設認知也是閱讀學習上重要的一環。Brown, Armbruster & Baker(1986)指出熟練的讀者會監控自己的學習狀態：安排閱讀策略、當地調整努力、評估正在進行的閱讀工作性成效。相對地，不熟練的讀者由於對閱讀的瞭解並不完備，所以閱讀時會經驗到許多困難。閱讀理解的監控不僅可以評估自我瞭解的狀態，也可以用來提昇閱讀理解的層次。許多關於閱讀教學的設計即透過監控、自我發問、評估、批判、調整等後設認知策略，來提昇學生的閱讀理解能力。也就是說，受限於自我覺察檢視理解程度策略的低能力閱讀者經由這類教學活動可有效改善他們的閱讀理解能力。許多實徵研究也顯示成功和不成功的學習者在認知策略和後設認知策略的品質和數量上都有所不同(e.g., Oxford, 1989; Kaylani, 1996; Phakiti, 2003)，為了培養獨立自主又具有創意的學習能力，除了讓學習者能以原有的認知基模去適應外來的訊息，能主動運用推論整合新舊知識，也要增強學習者的評估與自我調整等學習模式，才能再進一步修正策略或所學的知識以解決不同的問題或困難。

Palincsar & Brown (1984) 根據 Vygotsky 社會文化理論、後設認知與基模理論，發展出四種教學策略的交互教學方法(Reciprocal teaching)，強調教師與學生的角色互換、理解過程的監控並鼓勵與相關背景知識的連結。Mercer & Mercer (1993)進一步建議四種策略的使用順序如下：預測下文、自問自答、摘錄重點、澄清疑慮。文獻上，已累積不少教學成果證實這個教學方法的有效性 (e.g., 曾陳蜜桃, 1990; Palincsar & Brown, 1987)。良好的發問技巧不僅是促進學生思考發展的有效途徑之一，也是教學成功的基礎(Hunkins, 1972; Carner, 1963)。發問和閱讀之間又有什麼直接的關聯呢？發問可以促進知識的重組與事後的回憶，不但幫助學習者比較對照、注意、評論文章的

大意、結構與合理性，也藉以形塑、聚焦、指引閱讀者的思考(King, 1994; Wong, 1985)。若以心理運作的歷程來看，不同的發問策略也可能發展出不同的解碼歷程(Cook & Mayer, 1983)。如此看來，發問似乎具有閱讀理解的前導作用。

總而言之，影響閱讀理解的因素大致上可成知、情、意三類。在知的部分包含知識、推理與後設認知，在情的部分有情緒、態度或信念，在意的部分可以具體行動為考量。但本研究只先就「知」中的內容知識與邏輯推理兩個因素，來探討這兩個因素對幾何證明閱讀理解的影響。