

第三章 研究方法與步驟

本章從研究設計、研究對象、研究工具、研究流程與研究進度，來說明本研究採取的研究方法。

第一節 研究設計

本研究的目的是為探究國中學生「外心與內心概念」學習困難的因素，並找出有效的教學策略以解決此學習困難。根據研究目的，研究者提出四個待答問題：

- 一、國中生三角形外心與內心概念學習困難的因素為何？
- 二、解決上述學習困難之有效的教學策略為何？
- 三、學生對於以「類比遷移」及「局部推理與模仿」作為教學策略設計教材，所實施的補救教學實驗之感受為何？
- 四、本研究使用的教學策略，是否能讓國三學生由形式論證的渾沌狀態趨向明朗？

根據以上待答問題，研究者將研究設計成四個階段。

第一個階段的目標為診斷學生的學習困難與探究學習的困難因素。首先，研究者以教材內容與教學目標為主體，根據學生平時的表現與研究者的教學經驗整理出學生可能的學習困難，編製問卷(附錄一)對同校的數學教師進行調查，作為編製診斷工具的參考。其次，由預試診斷工具(附錄四)得到預試對象的學習困難因素，進一步編製正式診斷工具(附錄五)。最後，全班進行施測並分析學生的學習困難因素。

第二個階段乃根據第一階段的研究結果，由相關的文獻資料中，選出研究者認為有效的教學策略，編寫成教材(附錄六)進行補救教學實驗，比較學生於教學實驗中的表現與診斷結果之間的差異，來分析

教學實驗的成效。

第三個階段實施感受問卷調查，分析問卷調查的內容來瞭解學生對教學實驗的感受，並選取九位學生進行半結構式的訪談，釐清學生的學習困難與改善學習困難的原因。

第四個階段以 Van Hiele(1986)的五階段學習模式為主軸，分析教學實驗的過程與策略，探討學生是否由形式論證的渾沌狀態趨向明朗。以下詳細說明研究設計的內容：

一、第一階段的研究設計

本研究分析的教材與教學目標，是依據教育部於八十九年公布「國民中小學九年一貫課程暫行綱要」所出版的南一國中數學第五冊，由此整理出表 3-1-1「外心與內心的教材地位分析表」，區隔學生的先備知識與本單元的學習內容。

表 3-1-1 外心與內心的教材地位分析表

已習教材	本單元教材	未習教材
軸對稱圖形	外心	垂心
等腰三角形	1.外心的定義	旁心
中垂線尺規作圖	2.三角形外心至三頂點等距離	重心
角平分線尺規作圖	3.外心與中垂線的關係	尤拉線
三角形基本性質：	4.三條中垂線共點	內外角平分線
內角、外角和，外角定理	5.外心的位置	定理
三角形全等性質與證明	6.外心與兩頂點連線的夾角角度	高中幾何
中垂線性質與證明	7.特殊三角形(30-60-90)的三邊	
中垂線逆性質與證明	長比例為 $1:2:\sqrt{3}$	
角平分線性質與證明	內心	
角平分線逆性質與證明	1.內心的定義	
切線性質與證明	2.三角形內心至三邊等距離	
圓的性質：圓心角，圓周角，弦切角	3.內心與角平分線的關係	
	4.三條角平分線共點	
	5.內心的位置	
	6.內心與兩頂點連線的夾角角度	
	7.內切圓半徑長與三角形面積、周長之關係	
	8.內切圓半徑長與直角三角形三邊之關係	

研究者根據外心的教學目標與分層分析(附錄二)，設計一份選擇題型的問卷，調查本校數學教師在實際教學中，對於「國中生外心與內心學習困難」的認知情形。這些資料能幫助研究者更了解學生可能出現的學習困難，在編製診斷工具時增加其內容效度，並確認研究的價值。研究者採選擇題型配合等距變項的方式設計問卷，便於整理並達到較具有強度的統計分析(王文科、王智弘, 2004)(王貳瑞, 2003)。

研究者認為探究學生幾何概念學習的困難與原因，應先了解學生的幾何認知層次與圖形瞭解的過程，才能鎖定問題的核心，故考慮以下兩點：

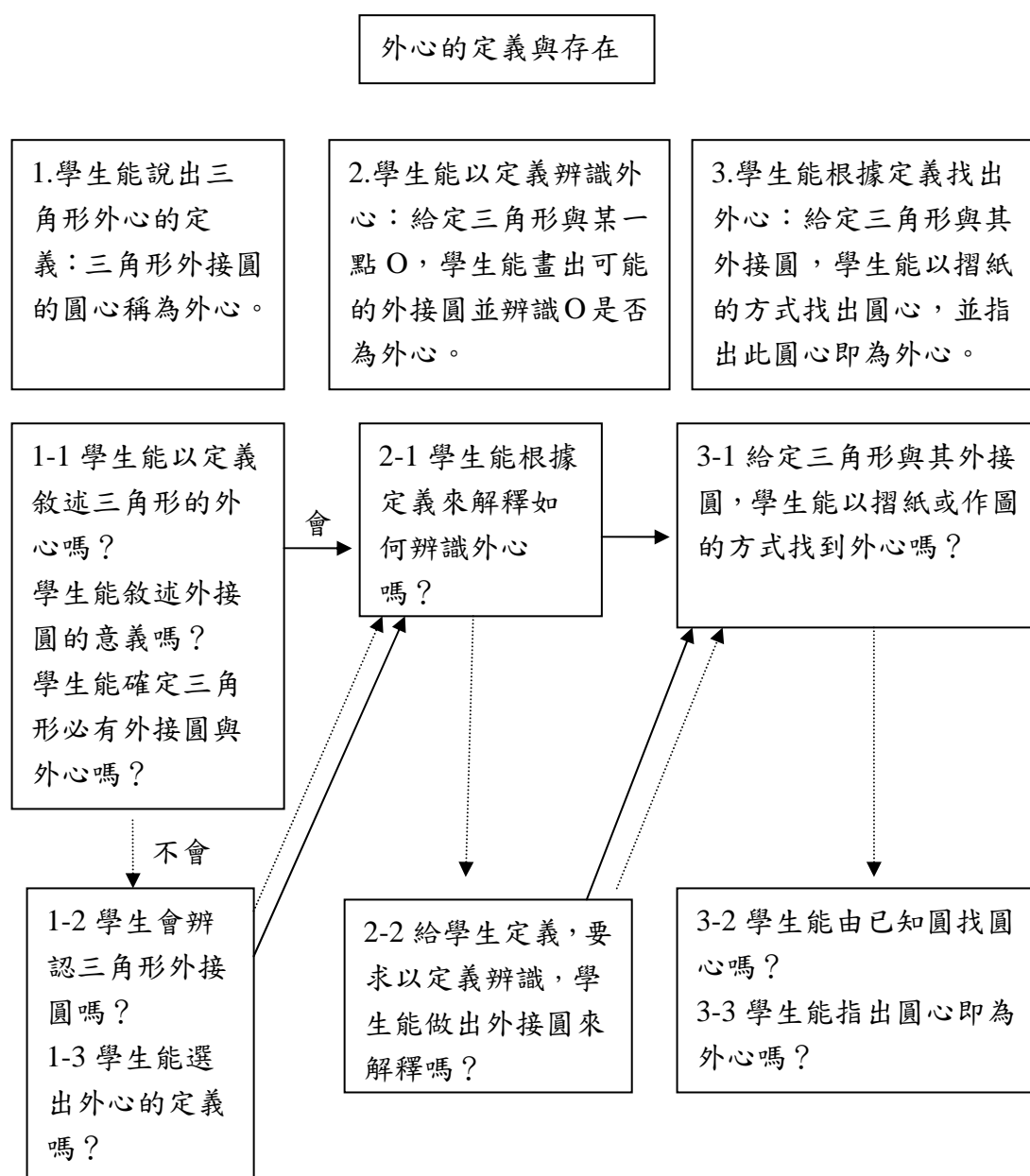
- 1.幾何認知層次(Van Hiele,1986)。國三學生正處於非形式證明過渡至形式證明的時期，利用定義、公理推論出性質的能力並未具足，能寫出完整證明的學生更是少數(林福來,民 92)。
- 2.圖形的瞭解(Duval,1995)。外心與內心的介紹起始於國一的簡單幾何，由三角形、外接圓與內切圓的圖形關係引入，配合摺紙的操作，歸納全班操作的結果形成性質，而直到國三才透過形式證明驗證這些性質。所以學生對外心與內心概念的瞭解應包括知覺性、論述性、構圖與操作性的瞭解。

研究者根據以上的論點，將外心的每個學習目標分成概念、論證、作圖三個面向，各面向均包括主幹題與引導題兩部分，如表 3-1-2。

表 3-1-2 預試題目的設計方向

	主幹題	引導題
概念	能說出或知道特定的概念。	以必要的先備知識，探究學生不清楚概念的原因。
論證	能以非形式或形式論證的方式，證明性質或說明判斷的理由。	以提示關鍵性質或圖形，探究學生推論的障礙。
作圖	能以摺紙或尺規作圖驗證性質，並清楚操作流程背後的意義。	提供部分操作流程，探究學生對工具的認知程度。

以各面向的主幹題判斷學生是否有學習困難，以逐一過關的想法設計引導題分析學習困難的原因。研究者建構相關概念的探究流程圖，如圖 3-1-1(詳見附錄三)，並依照流程圖設計問題形成預試診斷工具(附錄四)。



說明：若學生能(未能)完成相關問題，則接著回答實線(虛線)所指的問題。

圖 3-1-1 「外心的定義與存在」探究流程圖

研究者利用寒假輔導的期間，選擇兩位學生作為預試對象，安排獨立的教室進行研究。為了避免三個學習面向的測試互相干擾，將各

教學目標中同一個面向的試題抽出，彙整成三張試題依次分三天進行(附錄四)，每天 40 分鐘。前 15 分鐘回答主幹題，中間休息 3~5 分鐘，由研究者對學生進行評估，決定學生需回答那些引導題，再依規劃繼續作答。施測期間研究者均在現場，學生有問題能隨時溝通，並加以錄音。第四天根據學生答錯或空白的問題作為基本架構，進行溝通討論，以核對診斷結果是否反應出學生的真實情況。

質的研究計畫可稱為緊接著的設計(emergent design)，即每一種增加的研究設計，係仰賴前面的資訊而來(王文科，民89)。研究者根據預試的結果刪除診斷工具中作圖的面向，將主幹題調整為概念與論證的問答題，診斷學生的學習困難，另外將引導題調整為選擇題與計算題，藉以分析學生的學習困難因素，了解學生解計算題與證明題之間的差異，同時提高資料整理的效率。正式診斷工具共三張(附錄五)，分三天進行施測，各利用一節課45分鐘的時間。

二、第二階段的研究設計

根據第一階段的結果，研究者發現學生「外心與內心概念」學習的困難以論證為主，包括不清楚定義的意義，不會解釋性質與錯誤的論證觀念等等，這屬於形式論證期的渾沌現象。另外診斷的結果顯示大部分的學生只具備片段的記憶，未將相關知識以有系統的方式儲存。

Gentner & Toupin (1986)認為類比是學習與發現中一種重要的過程。Helman(1988)也曾說：人類具有一種特殊驚人的能力，就是可以藉由領悟一個比喻(metaphors)、或是過去曾解過的相似問題，以此可以輕鬆地了解一個新的未知領域，如此的能力稱之為類比推理(analogical reasoning)能力(引自高淑芬&邱美虹,1998)，而外心與內心具有明顯的對應關係，符合邱美虹(1998)強調對應(mapping)是整個類比思考的核心過程。

為了讓學生的外心與內心概念重新建構，成為一套有系統的知識，體驗形式演繹的運作模式，研究者採用「類比遷移」、「局部推理與模仿」的教學策略設計教案，進行補救教學實驗。設計「有系統的外心概念」作為教材(附錄六)，內容與「內心概念學習單」相互對應，並提供局部推理讓學生完成論證，提供圖形幫助學生與必要的幾何性質產生連結，讓學生利用模仿計算題解題流程完成計算公式的形式化證明。教學與施測各於一節課 45 分鐘完成，施測期間學生可以參考外心概念的教材內容。

教學策略是否有效，可比較教學實驗前後學生的表現來判斷。研究者以診斷工具的調查結果與「外心概念系統教材 Q5~Q6」「內心概念系統學習單」中學生答題結果作比較，並配合訪談作深入分析。

三、第三階段的研究設計

探討有效的教學策略的目的，除了解決學生的學習困難，也希望瞭解學生對論證與解題的想法，對教學活動的感受，因此設計感受問卷進行調查，包括整體的感受與特定問題的感受。整體的感受是指配合教學策略設計的學習單，學生作答時與一般問答題測驗(以診斷工具為例)有何不同的感覺。特定問題的感受是指教學實驗中，單一問題具有的特殊性對學生之影響，例如題目提供圖形或定義對學生的影響。

質的研究者視真相為多層次的、交互作用的、一種共享的社會經驗，可從參與者的觀點，以交互作用技術或非交互作用技術進行研究。研究設計具有循環性，如合目標的抽樣、資料蒐集、以及部分資料分析過程，是同時進行且互動的(王文科，民 89)。研究者為了瞭解學生學習困難的因素，改善學習困難的原因，獲得學生對教學實驗的想法，故於研究最後實施半結構式的訪談。

訪談對象是依座號的順序選取，若受訪對象沒有意願或不方便則

跳過，並沒有刻意挑選，一共訪談了九個學生。研究者先根據「學生學習外心與內心發生困難的主要原因」與「教學實驗的結果」設計八個問題，並在訪談前設定每位訪談對象回答三到五個問題，設定的問題是以學生的表現與訪談目的來決定。訪談問題與設計理由如表 3-1-3：

表 3-1-3 訪談問題與設計理由

題目 編號	晤談問題與原因
Q1	晤談問題：以外心為例，學生如何解釋「定義」？ 設計的原因：某些學生在「敘述」外心與選擇外心「定義」上的答案不同，雖然數學論證與推理應根據定義與性質，但學生不見得清楚「定義」在數學中的地位，這也影響了學生的論證能力。
Q2	晤談問題： 1.以外心類比內心為例，學生對這樣的教學反應為何？ 2.以「三中垂線共點」為例，學生對性質與逆性質的瞭解與使用狀況為何？ 3.學生利用圖形解釋「共點」的接受度為何？ 設計的原因：某些學生在教學實驗中，內心的「發現性質」「描述作法」「論述」部分無法與外心對應，可能是沒有參考外心教材，或是不清楚題意。大部分的學生在敘述逆性質與解釋共點時以「空白」回答，顯示學生只記得片段的知識。少數學生的確能用性質與逆性質作形式推理，但不完整的情況常出現。此實驗能否藉由系統間的類比協助學生整合呢？
Q3	晤談問題：學生對「動態圖形」有反應後，如何突破「學生只敘述現象」的情況？ 設計的原因：某些學生因記憶或直覺將外心的位置與三角形配錯，觀察動態圖形後的確能改善，但學生常以視覺或作圖經驗來解釋外心位置，嚴格來說只是屬於「舉例說明」。讓學生解釋鈍角、直角、銳角三角形其外心位置不同的關鍵為何？
Q4	晤談問題：學生判斷一個點是否為外心的依據為何？ 設計的原因：學生判斷外心的依據分成兩類：「外接圓圓心與等距離」與「中垂線交點」。學生能否說出判斷的理由呢？
Q5	晤談問題：學生進行論述時，清楚起始條件嗎？ 設計的原因：某些學生敘述外心是「中垂線的交點」，卻以「半徑等長」來解釋外心到三頂點等距離。學生清楚自己設定的條件嗎？還是只依靠印象與片段的知識作解釋呢？
Q6	晤談問題：學生討論外心與頂點連線的夾角時，圖形對學生有何影響？ 設計的原因：學生會運用公式計算，但並不一定能清楚解釋，提供圖形是否有助於學生理解呢？
Q7	晤談問題：學生先作類似局部推理的計算，在證明時的反應為何？

設計的原因：答案「空白」的學生大多反應不知如何下手。如何引發學生的想法呢？根據我的教學經驗，以計算題的模式提供學生類似局部推理的經驗，熟悉論證所需的解釋性知識，大部分的學生都能產生一些有用的想法。

Q8 晤談問題：學生對於提供圖形的題目，反應為何？

設計的原因：同 Q7

設定訪談者回答的問題如表 3-1-4：

表 3-1-4 訪談者回答的問題

學生編號	預定訪談的題目
S1	Q1、Q2、Q4、Q7、
S2	Q1、Q2、Q3、Q4、
S3	Q1、Q2、Q3、Q4、Q8
S4	Q1、Q3、Q4、Q8
S5	Q1、Q2、Q5、
S6	Q2、Q3、Q7、
S7	Q2、Q3、Q7、Q8
S8	Q2、Q3、Q8
S9	Q2、Q3、Q6、Q7、

四、第四階段的研究設計

研究者由學生「外心與內心概念」學習困難的因素，探討與形式論證能力的關聯；由教學實驗的結果進行分析，探討教學策略是否提升形式證明的能力與澄清論證觀念，並由感受問卷與訪談探討學生由形式論證的渾沌狀態趨向明朗的原因，並以形式演繹層次的特徵來說明。Van Hiele(1986)的五階段學習模式包括：訊息探究、直接引導、自我表達、自由探索、統整等五個步驟，以幫助學生提升至下一個層次。研究者參考此模式來分析教學實驗的過程與使用的策略。

第二節 研究對象

研究對象為桃園縣某縣立國中三年級的學生，全班共 39 人。研究者擔任該班數學教師長達三年，與每位學生熟識。該班以音樂班的名義透過招考組成，家長的社經地位較高，學生在國一與國二的數學

成就優於其他班級，彼此競爭的關係使學生在求知方面具有強烈的企圖心。類比推理解決問題的認知處理包含四項認知歷程(Vousniaou & Ortony, 1989,引自黃幸美,民 89)：(1)學習者自來源問題建立知識基模；(2)注意結構的相似性並提取解題要素；(3)將來源問題與標的問題的結構特徵做對應；(4)擴展對應所展生的解決方案。這顯示類比學習的是否成功，與學生的基本概念、專注力、觀察力、企圖心有極大的關係，而該班學生比其他班級具有這些特質，因此適合進行類比教學實驗。

根據學生的作答狀況判斷，並沒有研究對象發生特殊情況(如：不作答、隨意作答或惡意作答等)而被排除於研究樣本之外，相對於一般的班級，研究的可信度較高。研究對象於國三上學期使用的教科書，為南一版數學第五冊。外心與內心的教學活動於 10 月底完成，當時使用的教學法為講解式教學，教材內容以教科書為主，坊間的講義為輔。

研究者設定「數學成就屬於該班中下」與「上課態度認真，與教師互動頻繁」兩個條件尋找預試對象。研究者由符合此兩個條件的學生中選出兩位作為預試對象，均表示樂於配合。全班 39 人均接受正式診斷工具的測驗並全程參與教學實驗，最後依座號順序選取 9 人進行半結構式的訪談。

第三節 研究工具

為達本研究的目的，本研究使用以下幾種研究工具：

一、國中數學教師對「國中生外心與內心概念學習困難情形」的調查問卷

為了瞭解學生學習外心與內心是否發生困難，發生困難的教材內

容為何，研究者根據教科書整理出「外心與內心概念」的教學目標，編寫「國中學生外心與內心的學習困難情形」問卷(附錄一)，針對 20 位數學教師進行調查。問卷共有 16 個問題，設計方式為五等第量表式問題，評分方式為：幾乎沒有為 1 分，一般有為 2 分，半數有為 3 分，大部分有為 4 分，不清楚不與計分。回收的有效樣本共 14 份，統計分數後將 16 個問題依分數高低分成三部分，「困難」5 題，「稍難」5 題，「容易」6 題。

由本校教師群提供的資訊，一方面能讓研究者確信這 16 個問題所代表的觀念，具有一定的研究價值，確認研究方向正確。另一方面研究者取得教師對於學生學習「外心與內心概念」的困難度分析，作為編製學生診斷工具的參考，提高診斷工具的信度與效度。

二、國三學生「外心學習困難的診斷工具」預試評量卷

診斷工具的編製事先根據研究者、學校同事、研究所同學的教學經驗，整理學生可能的學習困難因素，編匯成「外心的教學目標與分層分析」(附錄二)，將每個教學目標以概念、論證、作圖等三個面向進行診斷，先編製成「外心學習困難探究流程」(附錄三)，最後加入問題形成「外心學習困難的診斷工具」預試評量卷(附錄四)。

診斷工具的編製需考慮信度與效度。所謂的信度是指無論何時測量，前後測量結果的一致性程度。為了增加信度，研究者設計的題目引用教師群的問卷調查結果，具有適當的困難度；題目敘述盡量簡潔直接；規劃四個工作天進行不同類型的測驗，以免互相干擾；提供獨立空間進行預試，讓受測學生情緒平穩；研究者在旁提供諮詢，確認學生完全了解題意；每個階段中有「教師詢問與評估」的時間 5 分鐘，增加診斷的穩定度；最後規劃一個階段進行師生討論，檢討診斷工具的成效與缺失。

為了檢驗診斷工具的信度，研究者在一月份先對兩位預試對象實

施「外心學習困難的診斷工具」預試評量卷，除了施測中的「教師詢問與評估」與「第四階段的師生討論」檢驗題目是否確實能反應出學生的認知情形，並於二月底再對同樣兩位預試對象實施「外心學習困難的診斷工具」修正評量卷(附錄五)，由這兩次測試的結果以再測信度來顯示診斷工具的信度。測驗結果相同的比例為 86% 與 72% ，顯示診斷工具具有一定的信度。

至於效度方面，研究者以內容效度與學生效度來檢視。診斷工具的題目涵蓋教科書中所有教學的目標，包括記憶、理解、論述、應用等各層次，獲得同校教師們的認同。題目設計以主幹題發現學生的學習困難，以引導題探究學生的學習困難因素，並分成概念、論證、作圖三個面向來診斷，由診斷出來的結果與學生現場進行核對。研究者由診斷出來的結果與學生進行討論，學生表示原來不清楚的地方還真多，尤其是論證部分的引導題，能讓反應出學生不清楚或沒想到的關鍵。因此，從診斷的結果與學生的回應，顯示診斷工具具有一定的效度。

三、國三學生「外心與內心學習困難的診斷工具」正式評量卷

檢討國三學生「外心學習困難的診斷工具」預試評量卷的成效，發現學生在作圖與概念的表現，具有高度的相關性，這是因為該班學生均具有基本的尺規作圖能力，知道主題與外心有關即作出中垂線來印證或輔助說明。由作圖結果無法得知學生對外心概念的想法，故刪除作圖題，保留概念與論證兩部分的主幹題，編成「外心學習困難的診斷工具」正式評量卷(附錄五)。須特別強調預試與正式評量卷的題目與題型幾乎相同，只有題號稍做更動。研究者並對應外心的相關題目編製出「內心學習困難的診斷工具」正式評量卷(附錄五)。

至於用來尋找學習困難原因的引導題，研究者在預試中發現學生的學習困難主要集中在論證的部分，便將預試中能引出學生學習困難原因的的引導題改編成選擇題，成為「外心與內心學習困難原因分析」

評量卷(附錄五)。一方面由選擇題的選項內容，可以分析出學生錯誤的想法與論證觀念，一方面考慮到正式施測的人數多達 39 人，唯有選擇題才能提高分析的效率。

四、補救教學實驗工具

為了解決學生的學習困難，整合學生零散的觀念，將外心概念以有系統的方式呈現，編寫「外心概念補救教材」(附錄六)，並配合外心與內心概念具有的對應關係，編寫「內心概念學習單」(附錄六)，希望能發揮類比遷移的效果，讓學生自行建構內心的概念。

五、教學實驗感受問卷

為了進一步分析學生的學習情形，了解學生平時的學習習慣與教學實驗後的感受，特別設計相關問題形成感受問卷(附錄七)，於教學實驗後實施，填寫時間為 45 分鐘。

第四節 研究流程

本研究從訂定研究目標至撰寫論文，經過擬定計劃、準備實施、正式施測與分析、發展教學實驗與問卷、訪談與資料分析等共五個階段，茲以流程圖描述如圖 3-4-1 所示：

一、擬定計劃

本階段目的是要將研究的方向、主題以及提出的問題，發展出研究架構和細部的規劃，如：決定研究方法、找尋研究對象，蒐集相關的教學策略。

二、準備實施

研究架構確定後，本階段的主要任務是安排確認相關事項與各研

究的工具研發：

(一)工具研發

確認目標：教師對「國中學生外心與內心的學習困難情形」的調查問卷。探究學習困難與因素：國三學生「外心學習困難的診斷工具」預試評量卷與國三學生「外心與內心學習困難的診斷工具」正式評量卷。解決學習困難：補救教學實驗工具與教學實驗感受問卷。研究者開發各項工具並適當的修正，以期各項研究工具的完備。

(二)班級與實驗時間的確認與排定

本研究經相關人員同意配合，並事先了解整年度的教學行事曆，避開段考、模擬考、國中基測、寒假等不適合進行教學實驗的時段，排定實驗的時間。

(三)規劃論文進度，安排論文討論的時間

預定論文各章節的完成的月份，並與指導教授進行相關的討論。

三、正式實施與分析結果

實施國三學生「外心與內心學習困難的診斷工具」正式評量卷。內容分成「外心的概念與論證問答題」、「內心的的概念與論證問答題」、「外心與內心學習困難原因分析」評量卷，各進行 45 分鐘。先將問答題的答題情形分類，統計各類的人數與比例，再依照選擇題的統計結果，分析學生的學習困難因素。配合學生的學習困難因素，採用「類比遷移」「局部推理與模仿」的教學策略進行補救教學實驗進，並收回學習單與問卷。採半結構式訪談。先根據研究者的需求，設計相關的問題共 8 題，作進一步的確認。依編號的順序選取訪談對象，共 9 人，分析個人的資料後排定訪談的問題，每個人 4 到 5 題。晤談過程均錄音，再將錄音內容整理成文字稿，方便研究者探討。

四、提出結論與建議

最後將本研究所得的資料加以分析整理，提出結論與建議，撰寫成研究報告。

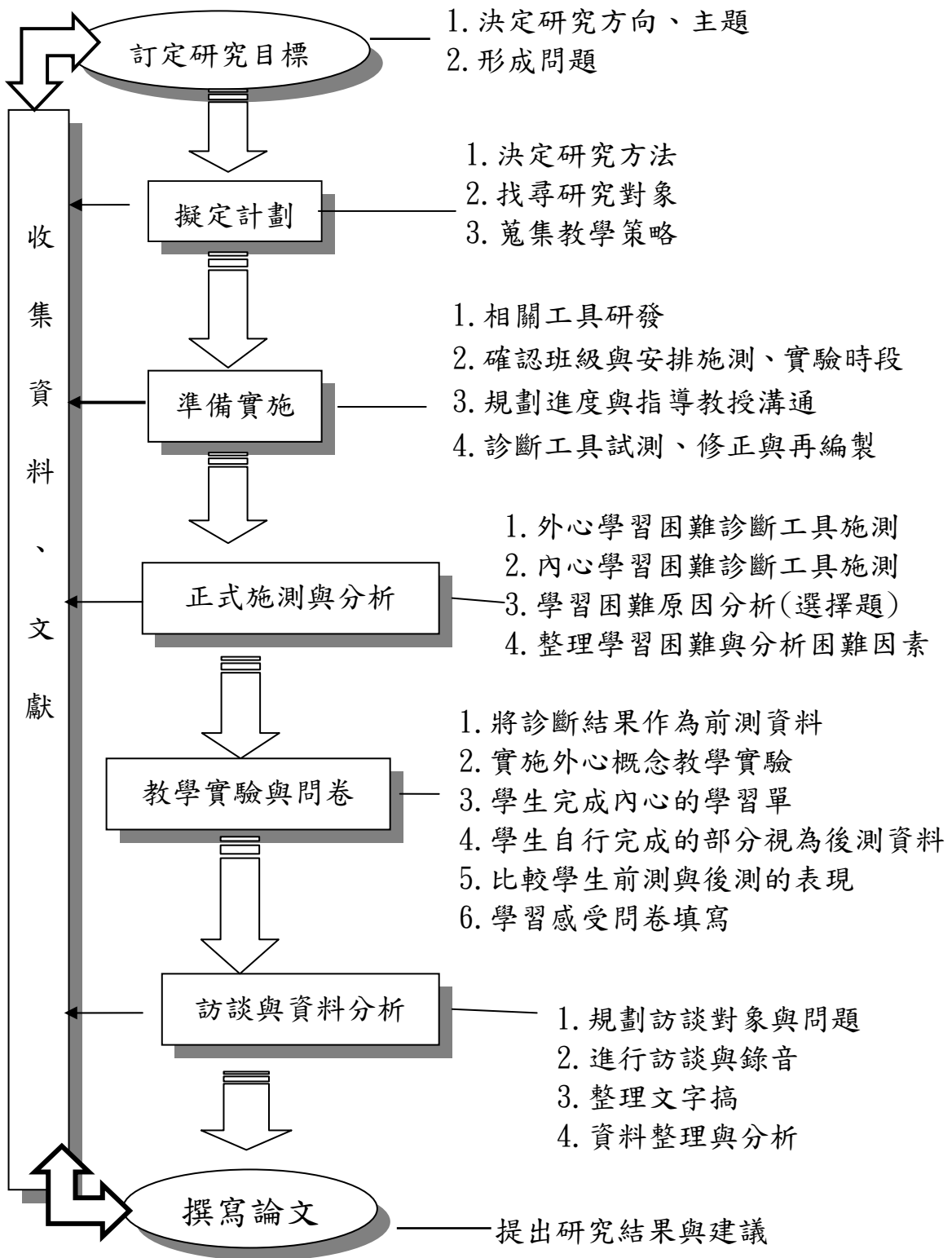


圖 3-4-1 研究設計流程圖

第五節 研究進度甘梯圖

本研究從撰寫計劃開始至研究報告撰寫完成，歷時近一年半，工作所進行的各項工作進度時間如表 3-5-1 所示：

表 3-5-1 研究進度甘梯圖

