

第一章 緒論

第一節 研究動機

九年一貫的課程已實施了好幾年，首屆以此課程學習的學生今年升上國三，而研究者連續三年任教這屆學生的數學。研究者發現九年一貫（暫綱）的數學教材內容雖然比民國 88 年的國編版簡化，有學習困難的學生仍佔有一半。適逢去年參與「九年一貫數學能力指標的詮釋：國中平面圖形部分」的研究計畫，發現某些教學策略能讓學生獲得意想不到的良好學習成效，而且適用於國三學生的學習層次，因此引起研究者高度的興趣。

研究者在研究計畫中負責的部分是「非形式論證過渡到形式論證」，主要是探討兩層次之間的落差，並設計墊步協助學生完成證明。根據 Duval(1998)將理論的推論過程區分成整體、局部、微觀三個部分，研究者設計出對應的教學活動，包括：以定義的刻畫與包含關係建立推論的微觀層次；以排序、配對與接龍強化局部層次的邏輯推演；以轉譯與模仿協助學生建構必要的論證格式，培養學生具備以整體架構規劃論證的能力。當研究者進行這些教學活動時，有時學生一開始並不清楚活動如何進行，但是經過研究者舉例說明，學生通常即可瞭解。

經歷這些教學活動後，研究者由學生的反應，發現舉例說明的策略並非每次都有效果，但是成功的範例能使學生自然的投入活動，且通常伴隨以下的反應：「啊，我懂了，就跟那個一樣」、「對照這個順序啦」、「跟著做就行了」、「規則一樣，只有一些不同」、「都換成符號就可以了」。研究者整理出好的範例有以下的效果：

1. 能讓學生察覺例子與活動內容之間類似的模式。
2. 能讓學生比較出例子與活動之間些微的不同。

3. 能讓學生以現有的能力進行模仿，啟動學生的學習歷程。
4. 學生能舉出新例子來協助其他同學進入活動。

此時研究者心中出現兩個想法：「如果利用適當的教學策略能設計教學活動，能有效的解決學生的學習困難，達成預定的教學目標，那麼該教學活動已成功了一半」；「如果精心策劃的教學活動，又能獲得學生的正面回應，那麼教學活動便算式成功了」。因此研究者尋找相關文獻，發現「類比推理」是人類與生俱來的學習能力之一，而研究計畫中的教學活動也隱藏著類比推理的教學策略，例如：「論證格式的模仿，必須提供同類型的證明題讓學生參考」、「讓學生自行刻畫正方形的定義前，先引導學生刻畫正三角形的定義」、「由教師論述長方形與正方形的包含關係當作範例，讓學生推廣其他圖形的包含關係」等。黃幸美(1995)認為類比推理為幫助學生建構抽象觀念，學習新領域知識與解決問題的重要思考能力，Glynn(1989)也認為類比推理對於學習者的理解能力或解題能力都有顯著的幫助，如此更支持研究者企圖針對「類比」做進一步研究的想法。

反思研究者目前的教學情境，哪一部份的教學成果是本人十分不滿意的呢？應該是「三角形外心與內心」吧！國三上學期的數學教科書第二章「三角形全等性質與尺規作圖」，研究者採用講解式教學法的流程進行教學，其中包括中垂線與角平分線的介紹，外心與內心的概念的建立。雖然國一下「幾何圖形的性質」有提過外接圓與內切圓，外心與內心，但只是名詞介紹，國三學生可以說是從頭開始重新學起。回顧上一屆使用 88 年國編版的學生，在國二下學期學習「三角形的全等性質與尺規作圖」，「利用全等性質進行推理」，「證明中垂線與角平分線的性質與逆性質」，較熟悉形式論證後，國三上學期的期末才學習「三角形外心與內心」。這些學生即使有一段緩衝期，來了解形式證明與學習推理，大部分的學生學習「三角形外心與內心」時仍有相當多的困難，由學生的學習成就表現與本校數學教師群的反

應，也能證實的確如此。

因此研究者進行「外心與內心概念」的教學前，便十分擔心這一屆國三學生會出現更大的學習困難，因為以相對較短的時間，要學會這麼多重要的論證概念，學習成效怎麼可能比上一屆還好。果不其然，此章節的教學結束後，研究者從全班的開放式問答評量測驗中，發現學生對於概念的統整，性質的關係與應用都呈現不清楚的狀況。面對如此令人憂心的現象，研究者不得不投入大量的時間與精神，尋求補救的方法。

首先，研究者根據自己的教學經驗，提出以下幾個疑問：

- 1.如果在學生尚不熟悉形式論證的情況下，以形式演繹的方式教「外心與內心概念」，學生能聽懂多少？
- 2.中垂線的性質與逆性質，雖然以三角形全等性質證明過，但學生有能力利用剛學到的性質作推理嗎？
- 3.教科書第二章雖有介紹敘述與逆敘述，但運用在論證上的邏輯觀念，學生建立了嗎？
- 4.教學活動結束後，學生會認為外心與內心是什麼呢？
- 5.外心與內心概念的建立、性質的解釋與作圖能力，是否達到教學目標呢？

這些疑問需作進一步的確認，以瞭解學生是否有學習困難，學習困難的原因為何，並實施補救教學。因此，「如何診斷學生的學習困難？發生困難的原因為何？」就成了研究者首先想探討的問題。以此想法切入研究主題，查閱關於「診斷」的文獻後，發現教育研究上常用「訪談」與「紙筆測驗」來進行這方面的研究。其次，哪一些教學策略能使用於補救教學上，並解決學生的學習困難呢？Duit(1991)指出介於已知與欲獲得的知識間的相似性(或相關性)是非常重要的，而類比是一項可以幫助學習者組織有用觀念的利器。邱美虹(1998)將類比過程歸納成檢索、對應、學習三個階段，並強調對應(mapping)

是整個類比思考的核心過程。考慮外心與內心概念之間具有強烈的對應關係，再加上參與國科會的研究中擁有教學實驗成功的經驗，「類比遷移」、「局部推理與模仿」成為研究者最想嘗試的教學策略。

為了進一步確認研究者的構想，有充分的理由付諸實踐，研究者針對學生的學習背景與教材進行初步的分析，得到以下的結果：

1. 「外心與內心概念」具有明顯的對應關係，若不嘗試以「類比遷移」作為教學策略進行補救教學，協助學生解決學習困難，實屬可惜。
2. 學生只能敘述片段的知識，無法將概念做整體性的描述。讓學生由有系統的外心概念，透過「類比遷移」自行完成有系統的內心概念，感受與瞭解統整關係的重要性。
3. 國三學生的幾何思考層次處於非形式演繹過渡至形式演繹期，學生的論證能力不足必會造成學習上的困難。
4. 學生的論證能力不足，以「局部推理與模仿」作為教學策略具有逐步引導學生學習的功能。
5. 學生學過動態幾何軟體 GSP，有操作動態圖形的經驗，也有摺紙、剪紙、圖形拼合的經驗，這些對「外心與內心的圖像或心像」之建立應有幫助。

研究者正因為學生的學習成就不佳而感到困擾，此刻有機會為學生進行補救，內心充滿了動力，同時期待這些教學策略能解決學生的學習困難，並在教育研究上有所貢獻。

第二節 研究目的

鑑於以上的研究動機，本研究的主要目的為：

- 一、探究國中生「三角形外心與內心概念」學習困難的因素。
- 二、探究有效的教學策略以解決上述的學習困難。
- 三、以本研究為例，探討非形式論證至形式論證的過渡。

第三節 待答問題

根據研究目的，研究者提出四個待答問題：

- 一、國中生三角形外心與內心概念學習困難的因素為何？
- 二、解決上述學習困難之有效的教學策略為何？
- 三、學生對於以「類比遷移」及「局部推理與模仿」作為教學策略設計教材，所實施的補救教學實驗之感受為何？
- 四、本研究使用的教學策略，是否能讓國三學生由形式論證的渾沌狀態趨向明朗？

第四節 研究限制

- 一、本研究之對象僅限於桃園縣某縣立國中，並非隨機抽樣，無法代表所有母群，研究結果不宜作過度推論。
- 二、本研究之對象為招考入學的音樂才藝班，與其他班級的編班方式不同，故研究的相關資料不宜過渡使用於其他班級。
- 三、診斷工具只針對研究目的設計，並不適合當作成就測驗的題目。
- 四、本研究對象平時上課使用的教材，為南一版國中數學第五冊，但研究的目的與教科書內容無關，故相關的研究資料不應對此書做出任何評論。

第五節 名詞界定

一、類比 (analogy)

Stepich & Newby (1988); Gilbert (1989)(引自黃婉馨,2005)認為類比可以解釋成在兩事物間，藉由彼此在功能、結構、關係、外表、語意或文字表面具有相似性質的一種特質，由已知的知識領域，推廣至欲知的知識領域，而獲得或理解新知識的過程。研究者認為外心與內心具有結構、語意、圖形關係等相似特性，能在教學活動中產生一定的效果，以圖1-5-1說明外心與內心概念形成之結構。

外心概念(來源) ⇨	概念形成之結構	⇨ 內心概念(目標)
定義外心是外接圓圓心	由圖形關係下定義	定義內心是內切圓圓心
弦的中垂線必通過圓心	操作與觀察圖形	兩切線夾角的角平分線必通過圓心
中垂線性質證明外心存在	回憶性質證明存在性	角平分線性質證明內心存在
敘述中垂線逆性質	利用逆性質證明圖形觀察的結果	敘述角平分線逆性質
根據中垂線逆性質，證明弦的對稱軸必通過圓心	利用結果說明三線共點	根據角平分線逆性質，證明兩切線夾角的對稱軸必通過圓心
三角形三邊中垂線均通過外心	三角形三個角的角平分線均通過內心
.....	

圖 1-5-1 外心與內心的概念形成之結構

二、類比的系統性

類比的系統性是指由一群彼此相關且能完整傳達目標概念的相似關係所組成的高階關係(high-order-relation)(吳正己,林挺裕,1998)。表 1-5-1，以外心與內心概念說明類比的系統性。

表 1-5-1 以外心與內心概念說明類比的系統性

	外心(類比物)	內心(目標物)
物件	外接圓、中垂線、外心	內切圓、角平分線、內心
關係一(R1)	三角形外接圓的圓心稱為外心	三角形內切圓的圓心稱為內心
關係二(R2)	作三角形兩邊中垂線所得的交點即是外心	作三角形兩個角的角平分線所得的交點即是內心
關係三(R3)	圓內任一弦的中垂線必為此圓的對稱軸	圓外任兩切線夾角的角平分線必為此圓的對稱軸
高階關係	利用 R3,R1 推得 R2	利用 R3,R1 推得 R2

三、局部推理

Duval(1998)認為以演繹方式進行理論的推論過程中，其論證的組織方式有三個層次：(1)整體的層次；(2)局部的層次；(3)微觀的層次。他敘述局部層次如下：

a local level in which at least three proposition are organized according to their status (hypothesis or previous conclusion , definition or theorem , local conclusion)

例如：已知三角形 ABC，L 與 M 為 AB 與 AC 之中垂線並交於 O，試證明 O 為外心。

證明：(已知)L 為 AB 之中垂線，O 在 L 上，

(性質)中垂線上任一點到兩端等距離，

(推論)所以 OA=OB。 同理，OB=OC。

因為 O 到三頂點等距離，以 O 為圓心可畫出外接圓，故 O 為外心。

四、局部推理—「接龍」

國科會專題研究計畫成果報告「九年一貫數學能力指標詮釋—國

中平面圖形部分」中，提到局部推理—「排序」、「配對」、「接龍」能幫助學生由非形式過渡至形式論證期。「接龍」是讓學生自命題中析出已知與求證，解讀數學敘述、命題、符號、語法，發展學生根據限有的陳述，瞭解證明的想法後，補齊證明的空缺完成證明的能力。範例如下：

1.某學生的作圖過程如下：以 A, C 為圓心，大於 \overline{AC} 長為半徑各畫兩弧交於 B, D 兩點。他並提出兩個問題：

問題一：連接 \overline{BD} ， \overline{BD} 與 \overline{AC} 有什麼關係？

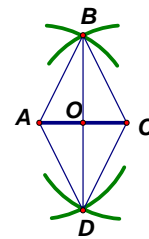
問題二：若要證明上述的發現，作圖過程可提供的已知條件有哪些？

2.試著根據此學生的想法完成下列證明。

已知： \overline{AB} ，_____，_____，_____ 等長

求證：_____ 為 \overline{AC} 的中垂線

證明：



1. 連接 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{BD}$

2. \because _____ = _____ ; _____ = _____ ; _____ = _____ (公共邊)

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ () 故 $\angle ABO = \angle CBO$ (對應角相等)

3. $\because \angle ABO = \angle CBO$; _____ = _____ (半徑) ; _____ = _____ (公共邊)

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CBO$ ()

故 $\overline{AO} = \overline{OC}$ (對應邊相等)， $\angle BOA = \angle BOC$ (對應角相等) = 90 度

所以 \overline{BD} 為 \overline{AC} 的中垂線。

五、形式論證期的渾沌狀態

Van Hiele(1986) 提出五個層次的幾何思考模式，其中非形式論證期與形式論證期的特徵比較如表 1-5-2：

表 1-5-2 非形式論證期與形式論證期的特徵比較

非形式論證	形式論證期
能根據圖形性質形成定義。	知道定義的意義與等價的敘述。
藉由非形式化的推論，將之前所發現之性質分類做成家譜。	在公設系統能下根據定義證明相關的性質與定理。
並能跟著做演繹推論，提出類似的論述過程與結論。	能配合問題自行完成形式化證明，並探討其他不同方式證明。
能說出敘述例句與逆敘述例句是不同的。	能證明與應用有關敘述之間的關係(如逆命題、否定命題、逆否命題)。
能利用「策略」解釋問題。	證明「策略」，將「策略」一般化。

渾沌狀態是指學生剛開始接觸形式論證，論證觀念或論證能力仍受非形式論證期非常大的影響，造成學生表現不穩定的狀態。