

第壹章 緒論

第一節 問題背景與研究動機


在周遭的自然與社會環境中，到處可見數、量、形，而各種數、量、形之間都存在著某些規律，所以我們可將數學視為自然界中研究數、量和形的科學。變數被用來描述真實世界中的量改變之情形，而函數被用於描述這些數量與數量之間的關係，所以數量形的 **pattern** 與函數為代數領域的重要概念。這裡所謂的 **pattern** 是指什麼東西呢？根據曹亮吉教授（民 92）在「阿草的數學聖杯」一書中所提出，在許多事物中數與形所能呈現的各種 **pattern** 指的是廣義的規律，在日常生活中，在各領域裡，它是無所不在的，而學會追尋 **pattern**，使得數學能力生根，學習數學才真正有用。在數學文獻中對於 **pattern** 這個字，有人譯成模式，有人譯為樣式，在本研究中我們將採用「樣式」。生活中到處可見「數、量、形」以及其所隱含的樣式規律，例如：

(1) 數的樣式

1×1	=	1
11×11	=	121
111×111	=	12321
1111×1111	=	1234321
11111×11111	=	?

(2) 數、量、形所結合的樣式

小峰在下圖中，用火柴棒排出每邊各有一支火柴棒的正三角形，小峰發現，排出 1 個正三角形需要 3 支火柴棒；排出 2 個正三角形需要 5 支火柴棒；排出 3 個正三角形需要 7 支火柴棒。請問：小峰如果要排 100 個正三角形，需要幾支火柴棒？



仔細觀察，找出一系列數的運算或數與形結合所呈現變化的類似性，再根據這個類似性，對後繼項作出猜想，並利用歸納與推理來確認猜想的可靠性，學會掌握該事物的樣式。

數與量的學習是整個國中學習數學的基礎，也是學習數學的第一個重點，觀察並找尋規律，對數與量有充分的了解與掌握之後，才可以進一步學習代數的領域。謝豐瑞教授（民 90，邁向課程新紀元(七)－九年一貫課程學習領域研討會論文集 P.145）指出對於九年一貫代數能力指標之編排想法為：代數的學習應從學生生活經驗中的數量關係出發探討，培養每位國民觀察數量關係與展現數量關係之數學結構的能力。

謝豐瑞教授、羅昭強教授與施皓耀教授針對九年一貫能力指標代數主題理念中提出：「我們周遭的自然與社會環境中，到處可見數與形，而各種數與形都有一些規律：數學探討的就是這些規律」。代數的符號、方法、與系統正是探討這些規律、表徵這些規律、為這些規律建立模式的語言與工具，他們認為根據這樣的理念，代數的學習可分為以下幾個層次：第一個層次是認識與察覺生活周遭中之數量關係、樣式或情境，第二個層次是學習表徵這些數量關係、樣式或情境；第三層次是能將表徵的方式加以類化及系統化，以展現出這些數量關係、樣式或情境的數學結構。李美蓮（民93）指出樣式規律的教學活動，應該培養的是「帶得走」的數學能力，是如何思考、分析、歸納並應用的代數思維，而不是解題技巧。對於國中學生而言，在七年級的教學活動中樣式與規律的單元，對於函數的學習是否有所幫助呢？這是本研究所擬探討的主要課題。

生活中存在許多變化（數）量之間的對應關係，例如：車子行駛距離與行駛時間之間、自動販賣機的每一個按鈕與拿到的飲料之間、台北今天的時刻與溫度之間、……。這些變化量之間存在何種關係？描述這些「變化量」之間的對應關係，就是函數，也是一種樣式規律。美國數學教師協會 NCTM（2000）指出教師應幫助學生去尋找規律，從早期經驗的分類與物件的排序開始，初期先使用口語描述其所尋找到的規律；至 3—5 年級時，則開始使用變數與代數式來描述規

律；至中學畢業時，學生應能自在使用函數符號來表示關係。因此從幼稚園至中學期間，學生應發展出一系列對於函數的概念。

教育部在民國 89 年所頒布之國民中小學九年一貫課程暫行綱要中是將函數的概念隱含於『數量樣式與數量樣式之間的關係』，例如：6~7 年級的課程綱要中之 N-3-13，N-3-21，A-3-1，A-3-2，A-3-7，A-3-10；8~9 年級的課程綱要中之 N-4-1，S-4-1，A-4-10，A-4-11，A-4-12，……等能力指標都訂有與函數與變數相關的項目，但並沒有明確寫出「函數」一詞，這造成 91~93 學年度入學的國中學生而言，市面上各家版本的教材中，都沒編撰直接以函數概念為單元的教材。而教育部民國 92 年頒布之國民中小學九年一貫國民課程綱要，則將「函數」明訂為能力指標之中，如：A-3-07，A-3-03，A-4-06 等，重新將線型函數與二次函數納入能力指標，其中在國一的課程中，先藉由特殊的比例關係開始來介紹線型函數，引導學生認識函數的符號及線型函數的性質，並將二次函數的性質及其應用安排在國三，以銜接新的高中課程，由此可看出函數這個概念的重要性。

在早期國立編譯館所編印的國中數學教科書第三冊中，是藉由兩變數的對應法則來介紹函數概念：對於任意給定的一個 x 值，都恰有一個 y 值與它對應，這時我們說 y 是 x 的函數（國立編譯館主編，民88）。若是直接給出函數的定義，對國中生而言，從變數與變數之間的對應關係去判斷函數與非函數時，卻時常會混淆何謂一對一、多對一、一對多、一對無...等對應關係。我們認為若能從日常生活中的數量關係出發，讓學生透過具體實際操作感受兩數量之間的對應關係，鼓勵學生從多方面進行思考，並利用語言、表格、圖形、公式（關係式）等各種表徵來表達規律，並在教學中給予學生足夠的時間進行觀察、思考、探究、討論，將有助於學生建立函數的概念。

函數概念的教學，要關注學生概念的形成過程，幫助學生避免機械式的學習方式—老師說明定義與例題，而學生只是死記強背。讓學生體會函數能夠反應實際事物的變化規律，因此教學過程中應該讓學生積極參與探索事物的數量關係及

變化規律的過程。Greenes 及 Findell (1999) 指出要求學生以口語或書面表達如何思考與判斷解答，將有助學生理解與熟悉代數語言，並聯結數與代數領域的概念。讓學生觀察各種不同的樣式(循環的、算術的、幾何的、數字的、……等)，發現可以用數字形式或幾何圖形表徵這些樣式，並且可以歸納出粗略的規則或更進一步的函數。對於如何幫助學生理解函數的概念，他們提出一個看法：將函數當成一種輸入與輸出的機器，一旦學生學會這項規則，學生可以預測輸出的數，或根據所給定的輸出數反向操作去推測原來輸入的數。對於一個一次運算的函數(例如： $f(x) = x - 7$)，給定學生一組輸入的數，學生可利用之前所學會的技巧，算出對應的值，並以文字或(函數)符號來描述函數的規律。

然而國內針對學生在學習函數概念時，所遇到的困難，也有許多學者與人士做過多方面的研究：

1. 顏啓麟、羅昭強 (民81) 指出學生學習函數概念的困難，有以下三點：
 - (1) 函數概念包含許多相關概念，如定義域、值域、變數等。
 - (2) 函數概念把看起來不相關的數學概念連結在一起，如幾何和代數等。
 - (3) 同一函數有不同的表徵方式，如圖形、表格和公式等。
2. 丁斌悅 (民91) 探討國二學生學習線型函數時三個表徵(表列、代數式、圖形)的概念發展情況，結果發現學生在學習函數的困難分為兩類：
 - (1) 對函數的對應關係與變數(自變數與應變數)的理解困難
 - (2) 對多重表徵的理解困難
3. 吳佳起 (民93) 發現國中二年級學生在函數概念方面的迷思概念有：可以寫出關係式的就是函數($x^2 + y^2 = 1$)、只有型如 $y = ax + b$ 者才是函數、數值要有規律的增加才是函數……等。

針對學生在學習函數與線型函數時的困難，本研究希望利用「數量樣式與函數」為主題，針對國中生進行教學試驗，希望學生藉由不同的觀點，增加對函數概念的理解及學習的興趣。學習觀察數量樣式，並將含有線性關係的數量轉換成表格，圖形或公式等各種不同的表徵，學習運用適當的數學語言表達，並利用這

些知識來解決日常生活中的問題。

第二節 研究目的與研究問題

(一) 研究目的：

本研究主要是想探討透過有關數量樣式的教學對國中生學習函數概念的影響。將函數的多重表徵作為課程設計的架構，設計一份相關的教材，探討如何藉由具體可操作的數量樣式的教學，讓學生連結並轉換數量形的樣式（包含圖案樣式與數樣式）。並在引入函數教學時，學生對於函數多重表徵（包含表格、函數圖形、公式、函數機器……等）的理解，並經由測驗與訪談，探究學生作答的錯誤類型與迷思概念。

(二) 研究問題：

1. 如何發展幫助學生從尋求數量樣式的關係，過渡到建立函數概念的教材及教學策略，並開發相關評量工具？
2. 藉由發展「數量樣式與函數」的教學，探討學生對於數量關係、樣式以及函數的多重表徵間的轉換是否有困難？哪些表徵間的轉換困難較為顯著？
3. 在數量樣式與數量樣式之間的關係對學生學習函數概念是否有幫助？

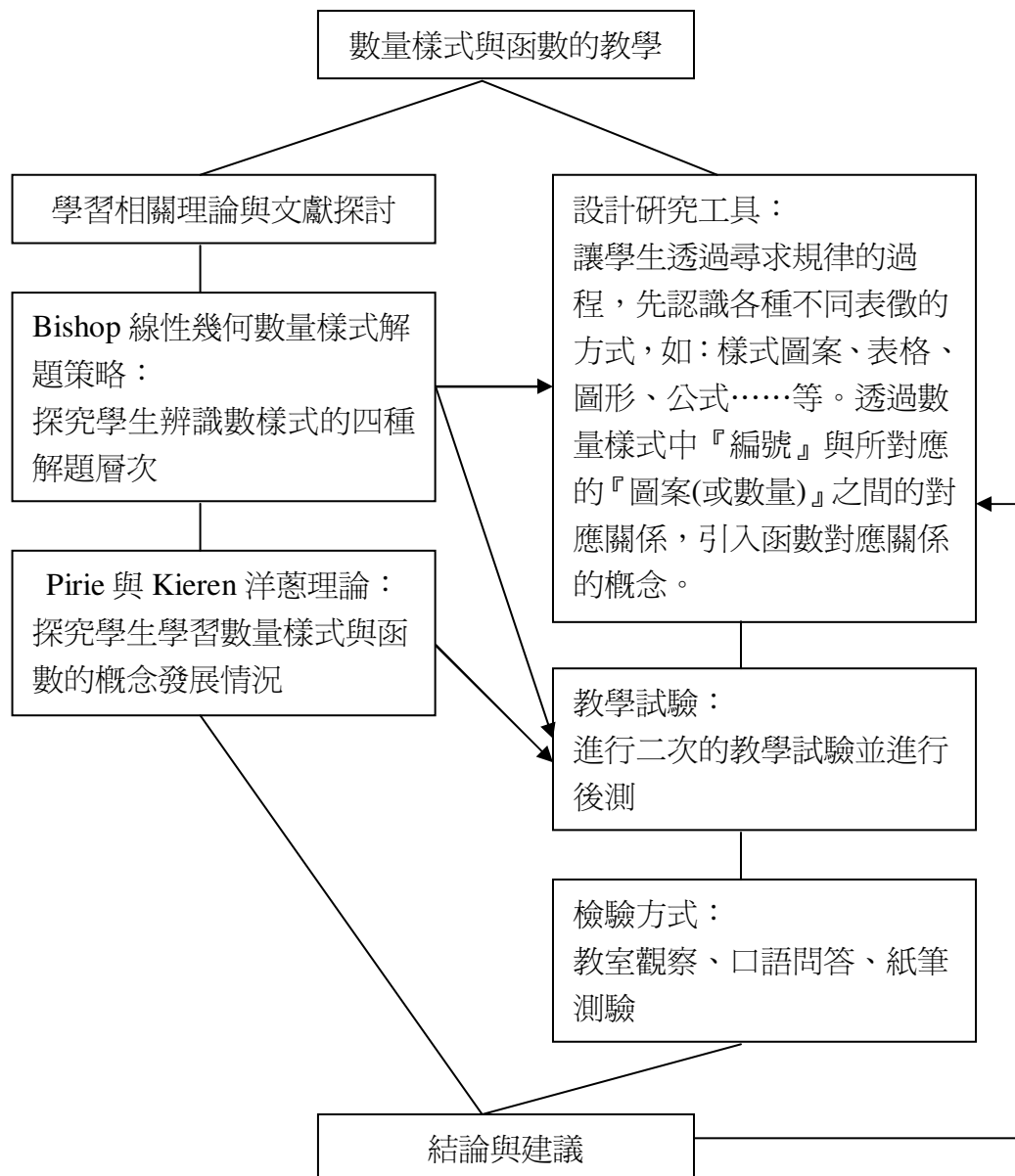
(三) 研究方法：

1. 設計連結數量樣式與函數的教學模組，發展教材、學習單、教案及後測試題等相關教學工具。
2. 進行教學試驗，本教學試驗的主要教學方式，是以學生個別探索活動及教師講授併行。
3. 於教學試驗後進行後測及訪談，分析歸納出學生的想法、作答原因及學習錯誤類型與迷思概念。

4. 所有的教學過程與訪談，都以錄音與錄影的方式記錄下來，再將上課與訪談的內容逐字轉成文字稿，進行資料分析並做出結論。

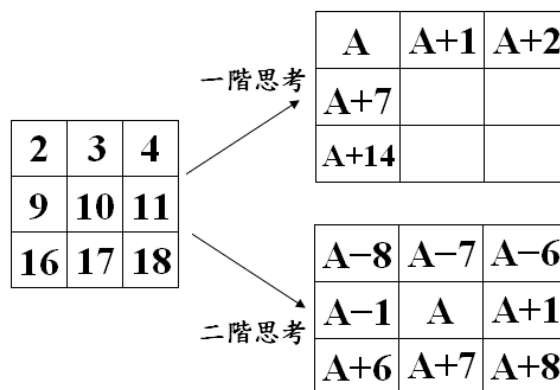
第三節 研究與理論架構

本研究架構如下【圖1-3-1】所示：



【圖1-3-1 研究架構】

李美蓮（民93）對於孩童數樣式概念的思考階段，提出月曆中的規律為例加以說明：當孩童發現上下兩數量之間的關係都差7，或左右兩個數量之間的關係都差1，代表能在行與行或列與列之間找出關係就是一階思考。而在分別找出行與列的數量關係之後，讓孩童探究在九宮格中九個數字的總和與正中間數字的關係，在前兩個關係之間建立有意義的連結就是二階思考，如下【圖1-3-2】所示。



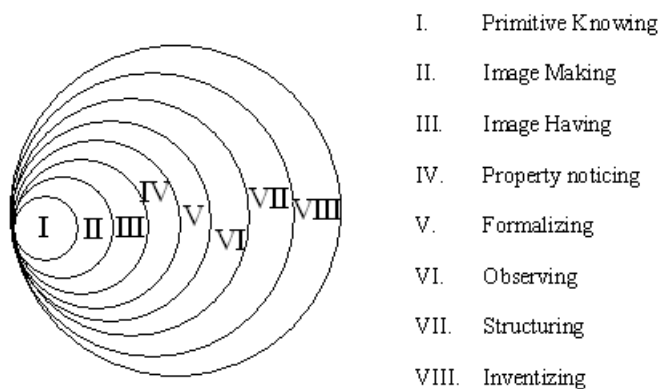
【圖1-3-2 李美蓮數樣式的概念發展層次】

數樣式就是數與數之間邏輯化且有意義的系統，所以數樣式的概念也就是數與數之間的關係以及關係之間的系統。以Bishop（2000）針對七至八年級學生對於線性幾何數量樣式（linear geometric number pattern）認知進行研究為例，他發現學生的解題策略有以下四項：

1. 依賴具體物表示（Concrete）：學生能夠用具體實物來表示樣式，但無法瞭解數形規律。
2. 用比例表示（Proportional）：學生意識到數和位置之間存在某種關係，但只是用乘法表示此關係。
3. 遞迴地找出關係（Recursive）：學生將注意力放在相鄰的幾項，並找出數字序列中的規律。
4. 函數的想法（Functional）：學生注意到項數 n 與該項的值 a_n 之間的關係。

針對辨識數樣式的發展，可發現學生大致分成幾類，一部份學生從用逐步代入檢驗的方式或具體的例子來辨識數樣式的規則，而另一部份的學生已經能夠將樣式的規則簡化成一個區塊，例如：依據前後幾項就能找出關係，不需逐步檢驗。甚至有些學生已經能掌握數樣式的概念，如：可用函數的想法表達數樣式。

1989年 Pirie 與 Kieren 曾提出之數學理解成長的動態理論（P-K理論），他們針對學生在一段時間內如何瞭解局部數學知識的歷程，建立一個動態可折回的洋蔥式模型，並用這套理論來分析教室內學生的學習現象，這套理論也能用來解釋教師如何用來介入學生的學習，但這樣的理論較適合用來分析學生個別學習的狀況。這個理論模式有八個層次，如下【圖1-3-3】。



【圖1-3-3 Pirie 與 Kieren 的動態遞迴理論層次】

透過P-K的動態遞迴理論，我們可以細部地觀察學生在理解數學概念時的移動過程，並藉以了解學生概念發展的情況，找出阻礙學生學習的困難點，對於解釋學生在作答時的表現與思維過程，將是一個很好的依據。相對於Pirie與Kieren所提出的動態遞迴理論，認為數學理解的模型是八個由內到外的層次，但對照於本次教學試驗中學生所學習的數量樣式與初步的（線型）函數概念，若將學生的理解分為八個層次似乎又過於細分，所以接下來研究者將依據這個理論的各層次特徵，找出學生學習數量樣式與初步的（線型）函數的發展階段，並用之來分析第一階段教學試驗中六位學生學習的狀況。

第四節 名詞解釋

1. 函數 **function**：有兩變數，自變數 x 與應變數 y ，對於任意給定的一個 x 值，都恰有一個 y 值與它對應，這時我們說 y 是 x 的函數（國立編譯館主編，民88）。
2. 樣式 **pattern**：本研究中所討論的樣式最主要為二種，數樣式與圖案樣式。樣式中所包含的數（或圖案中所隱含的數）含有一定的規律或算則，指的就是數與數之間的關係。
3. 函數的表徵：表徵是指模式化各種心智過程時所使用的符號系統，如圖表、文字等。而本研究中所討論的主要函數表徵為情境（以文字或口語說明情境中的函數關係）、表格、圖形、公式、函數機器、……等。