

蔡育知 (2018)。

數學素養導向教學：七年級以密碼為主題之代數課程與教學設計。

臺灣數學教師，39 (2)，50-65

doi: 10.6610/TJMT.201810_39(2).0003

數學素養導向教學：七年級以密碼為主題之代數

課程與教學設計

蔡育知

十二年國教之新課綱，預計將於明年（108 學年）正式實施，而素養導向教學在國教的提倡下，如何進行有效的素養導向課程設計，成為轉銜階段教師迫切的需求。國中七年級的代數課程中，一元一次方程式的課程為學生由具體的算數計算，轉換至抽象代數思維的概念層次轉銜單元，而此重要的課程要如何進行數學素養導向的教學，為當今教學現場教師們希望能多探討的。本教學與課程於是針對上述教學單元，搭配密碼為主題，以素養導向的方式設計教學模組，內容至少涵蓋四個子單元，相關主題亦可進行跨領域規劃。數學素養導向課程與教學設計之案例，實施後有效引起學生學習興趣，於是將設計的過程、想法、反思與結果與諸先進分享，彼此切磋成長。

關鍵詞：方程式；代數；密碼；教學設計；數學素養

壹、緒論

國家基礎教育為能培育與國際先進國家齊驅的優秀人才，十二年國教參照國際學生能力評量計畫（Program for International Student Assessment [PISA]），強調素養教學，而數學素養在臺灣本土經驗下，李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）於教育部提升國民素養實施方案中，定義數學素養為：「個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會、與職業生涯的淨脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。」，而此與過往偏向數學知識導向的教學而言，更強調實際情境脈絡下面臨問題時，辨識與數學的關聯，透過數學思維或工具，做出有效判斷，並能與他人溝通。故教師面對十二年國教，實際教學場域所產生的困境，其實面臨的並非課本出版或數學內容的變動，而是要如何在課程中，使學生能從實際情境經驗中獲取數學思維並運用數學工具，且還能進一步的與他人溝通。而在此情形下，教師相對需增強的能力，為增強妥善運用自身環境或情境，自主設計課程，而使學生能有效地從課程中獲得相關數學能力。

一、課程設計的動機與背景

基於以上現場教師對素養課程設計的需求，本論文以素養導向的觀點出發，運用情境教學設計數學主題課程，並運用於實務的課堂，作為十二年國教施行時，進行課程設計的參考及討論案例，透過教師群體間學理與實務上的彼此切磋，得有效增長教師課程設計能力，積極面對未來素養導向的教學。由於筆者於完全中學任教時含七年級班級，課程編排以主題式教學進行，相關課程往往需自行設計課程以提高學生對學習的專注與興趣。在當前素養課程設計的需求下，於是節選過往進行過的相關課程設計與先進分享切磋。

而選取七年級代數課程有其原因，起因於九年一貫數學課程綱要於七年級數學能力的培養，認定七年級代數方面的能力須完成二元一次聯立方程式，以及二元一次聯立方程組於平面圖形的教學，然數算方面的內容，亦於七年級開始負整數、分數的運算的教授，而這樣的安排下，未知數、列式、一元一次方程式、解一元一次方程式等二元一次

聯立方程式的先備知識，就尤需安排在七年級上學期末段短短的一個月時間內完成，如此方得於七年級下學期，順利銜接進行二元一次聯立方程組的教學。然就數學學習心理的角度，從算數計算的具體操作思維型態，轉換到更抽象的代數型，學習思維有層次的差距躍升，不僅與數學知識有關，亦與大腦在這階段是否發展成熟有關。七年級一元一次方程式的課程，開始運用未知數 x 的代數型，為中學階段算術思維過渡至代數思維之關鍵課程，學生於課程適應銜接的情況、運算的能力以及學習興趣等，都可能間接影響學生接下在代數方面的運算學習。然七年級學生剛入國中班級未滿半年，對於閱讀理解課本的學習狀況尚待熟悉，大腦整體而言尚未如八年級、九年級般的發展成熟。於是面對七年級須開始熟悉抽象概念的學生，教師通常須透過一些和八年級、九年級¹教學較不同的方式，以具體至抽象的模式，進行一元一次方程式的教學，以順利協助學生進行思維轉換理解層次的提昇。

於是，如何設計一個素養導向的課程，內容坐落在教導未知數概念，結束於一元一次方程式的求解，時間規劃在一個月的時間內之數學主題課程，運用於七年級上學期的班級，便成了當時在進行教學的構想。而此代數主題的課程設計實施後，以質性行動探問理解學生上過課程後的學習感受，得到此次以情境素養編排的課程設計，對一般七年級班級學生而言，對學習興趣具整體提升效益。

二、課程設計目的

在以上背景與動機下，筆者開啟了一系列的數學課程設計，而相關的課程設計除希望達素養導向的教學，以主題式進行教學外，尚須包含建立七年級學生代數能力之分年細目 7-a-01 至 7-a-05 的能力（如表 1）。

表 1

七年級代數能力之分年細目

年級	培養能力
七年級	7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。
七年級	7-a-02 能用符號算式記錄生活情境中的數學問題。

¹數學領域根據學生的學習方式與思考型態，將九年國民教育區分為四個階段：階段一為一至三年級，階段二為四、五年級，階段三為六、七年級，階段四為八、九年級。

表 1 (續)

七年級	7-a-03 能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。
七年級	7-a-04 能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。
七年級	7-a-05 能利用移項法則來解一元一次方程式，並做驗算。

此外，由於此主題下學生初次開始進行抽象數學語言，如何使抽象得具體的建立讓學生清楚，且讓學生在學習的過程，持續維持數學學習興趣以利未來的學習，就相當重要。整理上述，列出此次七年級課程設計目標如下：

- (一) 完成以素養為導向的課程設計；。
- (二) 進行階段數學主題式教學系列課程設計；
- (三) 所設計之課程內容至少需包含七年級代數之分年細目所述能力；
- (四) 內容須有效輔助學生學習從具體運思至抽象概念，加深學習印象；
- (五) 教學過程中須具備持續加強提升學生數學學習興趣的各項設計。

表 1 關於七年級代數分年細目 7-a-01 至 7-a-05 之能力內容，涉及未知數概念的建立，以及方程式的學習。未知數代表一個可感到似乎存在卻未知的數，對於喜歡科幻想像的七年級、八年級學生，看到「未知的事物」很容易與「秘密」產生聯想，且方程式的學習主要在方程概念的建立與解決過程，類似的意義亦恰好對應到密碼學中加密與解密的過程。

課程施行時，為電影《模仿遊戲 (The Imitation Game)》上映約已年餘時，部分學生對當中的內容有概略印象，且密碼相關的概念若運用於國中數學課程，恰可配合綜合課程童軍的旗語教學；生活科技課程中的程式語言實際上機實作；輔導科則可進行生命密碼課程設計；彈性課程亦可安排講解《模仿遊戲》電影講艾倫圖靈傳奇一生等，故亦相當適合作為跨科授課使用。於是當時在環境、學科適配性以及學生興趣考量下，選以密碼主題進行七年級的代數素養教學授課。

貳、文獻探討

由於教師進行課程設計，所採用的方法與模式與諸多相關，大抵以教育環境因素影響，學科專業以及學生學習時的狀況為最，而以上這三方面的考量，其中在學生學習方

面，由於我國的數學能力指標與分年細目原則上為諸多數學教育專家，根據學生學習的理論與實務所建立，當初規劃時更已完整的幫全國教師，考量學生進行數學學習時的心理與行為，有效區分階層的教學，以保障全國的數學教學是為完整，在理論與實務的強有力的背景下，對於一般學生，我們可安心的尊重專業見解，直接採用現行的數學分年細目，即可初步顧慮到一般學生在學科學習的知識接受情形，其餘對於學生面向需注意的，則以學生個別背景下的多元情形，而這方面多為現場教學的師生互動。故在學生學習面相方面，筆者採用九年一貫課程綱要中的分年細目顧慮學生的學習。

故以下則分別對學生學習外的兩方面重要因素，教育環境因素以及學科專業面進行探討，亦即針對面臨十二年國教，素養導向數學課程設計，以及七年級算術思維轉換至代數思維發展面向。惟此處由於前段落已略介紹過算術思維與代數思維，故本段改增加密碼歷史，作為情境教學之補強。

一、素養導向的課程設計

未來十二年國教將以核心素養的培養為導向，而素養導向課程與設計，林永豐(2017)提出四點基本原則：

- (一) 連結實際的情境脈絡，讓學習產生意義；
- (二) 強調學生參與和主動學習，得以運用與強化相關能力；
- (三) 兼顧學習的內容與歷程，以彰顯素養包含知識、技能、情意的統整能力；
- (四) 針對不同核心素養項目應有不同設計點。

當中強調了情境脈絡，而使學習產生意義，強調參與與主動學習，重視歷程等，而不同核心素養，設計要點確有不同而需分科探討。數學科方面，單維彰(2017)就透過訪談教學現場教師與分析所執行的教學模組後，提出識別數學素養導向教學模組的六項原則：

- (一) 透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求；
- (二) 以任務鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念；
- (三) 讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通；
- (四) 教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會；
- (五) 教材設計具備多重表徵；
- (六) 學習任務具備形成性評量的功能，以評估與促進數學學習。

當中亦對情境的引入以及鋪陳學習脈絡，引導探索的部分特別加強，並有形成性的

評估，此外則強調具體至抽象的有感學習，故教材的設計除具體外，建議選取可建立抽象表徵意涵之教具，而課堂中不僅須安排學生運用數學知識解決問題的機會，更須發展出運用數學進行對話的能力。

整理上述關於整體素養以及數學素養的課程，我們得到素養導向的數學課程設計，整體設計大抵是以彼此相關之教學模組組成一體的貫串，在素養導向下強調學習脈絡下的意義學習，當中尤須注重學生主動的形成過程，適當採用形成性評量，而課堂知識建構的鋪陳，宜從具體至抽象，教材設計具具體及抽象的多重表徵，從中培養以數學知識解決問題，進一步運用數學對話溝通的能力。

二、密碼的歷史

密碼最早的誕生可追溯自《舊約聖經》，據內容記載巴別塔（Tower of Babel）的插曲，敘述當時說同一語言的人們自大洪水後，為傳揚自我名聲免得被分散全地，決定建立一座城和通天高塔，而神知道後便賜與這些人們語言不同的密碼，使人們不論在口音或言語上，彼此不能溝通，不能明白彼此的意思，且把這些想構築高塔的人們分散世界各地，至今密碼仍留由神封存。其次則追溯到西元前 19 世紀的埃及，當時所用的密碼用於巫師或秘密，故有神祕的面紗，此外西元前 16 世紀的希臘，代表邁錫銘（Mycenaean）文明智慧成就的，亦有約瑟（Joseph）夢境密碼等。

而現在密碼被高度重視則因戰爭，密碼在戰爭中扮演重要解讀的關鍵。西元前 58 年凱薩（Caesar）遠征高盧（Gallicum），當時四面楚歌的西賽羅（Cicero）寄出一封運用凱薩密碼的激勵信，而這種密碼運用字母挪移固定間隔完成，凱薩密碼因此被視為當代密碼最早的奇緣。而密碼的工具使用，可追溯至西元前 5 世紀的斯巴達（Sparta）所運用的密碼棒工具，是目前被公認發現最古老的軍事密碼器；而當今運用數字解密的開端，則源自西元前 2 世紀的波麗比奧斯（Polybius）密碼，其運用棋盤格方式將文字轉換成數字。

時間使密碼的使用漸漸精深，至二次大戰時期，加密工具已從密碼盤發展到恩尼格瑪（Enigma）機，當中的密鑰程序即加密時遵循的法則，且密鑰可不斷變化。而當時解密的主要功臣為主修數學的雷耶夫斯基（Rejewski）、羅佐基（Różycki）和佐加爾斯基（Zygalski），他們在 1930 年代破譯了恩尼格瑪機及其結構，然而當時對這樣的結果並未好好運用。而隨著恩尼格瑪的日新月異，數學家圖靈（Turing）亦參與了解密的工作，然他以所設計的計算機破解，亦影響了後世電腦的發展與資訊化的生活。而不僅於戰爭，

至今的密碼依舊運用數學工具扮演生活上相當角色，以加密、解密的攻防捍衛著無以數計的資料。

參、主題課程設計

七年級代數之分年細目中，一元一次方程式之數學課程至少包含符號、運算、一元一次方程式、以等量公理與移項法則解一元一次方程式等數學概念。而上述概念須以階段性建構完成，故此主題系列依序至少包含未知數、式子、方程式，而方程式包含方程介紹與解方程，故分別運用生活中的未知概念、晶片、密碼的加密與解密²，公秤等量作為情境，進行素養導向課程設計，流程如圖 1 所示。

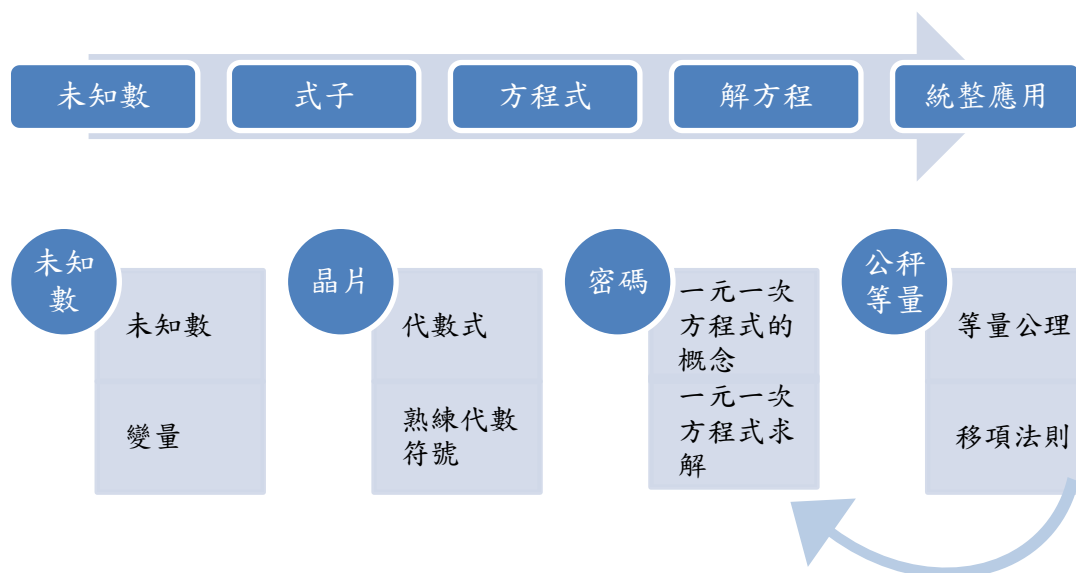


圖 1 「代數密碼」主題課程流程圖

而以上完整的主題課程流程，由四個子單元教學模組組成，完整從未知數至統整應用的過程，則為完整單元模組，以下概述四個子單元教學模組：

一、未知數單元

(一)課程目的

未知數的課程目標，主要能以實際的情境，讓學生切實感受到現實世界除實際運算

²本程設計中的「解密」意指解開密語，而有別於解開密鑰。

外，運用符號 x 等來代表未知某數有其必要，此外亦必要使學生得感受到，若我們變動選取，則 x 可能分別呈現不同的值。

(二)使用教具

抽籤桶、亂數表 ppt 或海報、學習單、筆電及網路。

(三)教學歷程

從當下的環境尋找引起動機因子，例如若當時學生們很在乎公平性，於是透過這樣的情境，引導學生思考一個班級有這麼多人，每人條件一樣，要運用公平的方式選一個目前還不知道是誰的同學，有什麼方法？在學生邊答教師就一邊將學生所說的寫在黑板上（而除了幾個例外答案，這時學生往往會脫口而出「抽籤」），教師整理學生所說後，接下來的提問便著重在建立未知數概念 x 表未知數，教師可於黑板中央大大寫個 x （習慣的表示法）加強學生對符號的印象後，進一步引導學生多方感受並看到生活中非常多未確定的事情，且即使不知道該物下我們有必要敘述的情境，此時必要運用代號（例如 x ）表示此不知道後才得更進一步完整敘述，透過對照使學生明白未知數的表示法有其必要。

後續運用學生們所回應抽籤，於黑板上以表列的方式寫 x ，透過不同的學生抽籤後寫下數值，讓學生看到未知數代表的 x 可能不一樣，如此便已達成初步。然班級若有學生有興趣更進一步瞭解關於此單元的更多方法，於課程末段的些許時間（約 10 至 15 分鐘），可依學生學習的狀況提起亂數，介紹數學上另外一種公平的選取方式，而亂數表的號碼抽選，可延伸至運用電腦亂數選號等，不僅加強學生 x 可能是不同數字的概念，更能增加數學於現實世界的強大功用感受，進而延伸探索。整理出教學活動連結的意義對照如下表 2。

表 2

未知數單元活動連結意義對照表

引導動機	人之於公義平等的看重			
分年細目	7-a-01			
運用方法	運用抽籤及大量跳動的數字，讓學生看到未知的代表性			
現實具體	抽籤	實際抽籤	亂數表	電腦亂數
數學概念	為可公平選取的方法	看到所抽出的號碼 x 會變動	有更多筆資料時可用的抽選方式	近代科技發展貢獻，數學奠基建立

(四)數學例題（僅概念）

小魚導師班上有 20 位學生，班級中有一個屬於班上專屬的籤筒，分別寫著 1 至 20 的數字，並對應到班上座號 1 至 20 的學生。而小明是班上的班長，每天都要從籤筒中抽幸運號，抽中的幸運天使當天便至少要完成一件給班上幸運的好事並在隔天分享心得給大家，現在若 x 代表小明當天抽籤所抽出數字，昨天小明從籤筒抽出幸運數字 5，座號多少的同學是昨天的幸運天使？昨天的 x 代表何數字？若今天小明再次抽籤，結果抽出數字 12，那座號多少的同學會是今天的幸運天使？再問今天的 x 為何數字？以這樣的規則，依所觀察到的 x ，它代表的數字是否為每天都不變的數字？還是可能有不同？

(五)形成評量

包含課堂區分主動與被動應答的狀況、未知數 x 概念建立的學習單書寫、(亂數表課後作業)、課中或課後的歷程概要書寫回饋。

二、式子單元

(一)課程目的

式子的單元，以具體物引起學生們創造的想法與樂趣，用以介紹式子的正確書寫，以及式子如何計算。本單元透過晶片替代簡略的函數概念（此未提到函數名詞），做為銜接媒介開啟式子的操作，運用晶片之於現代科技的魅力，其輸入不同值，得到不同的輸出狀況且可操作機器的實際功能，學生可很輕易地體會並感受到式子的強大功用與重要性。

(二)使用教具

各色名片盒、可安插名片的盒形教具、隨堂測驗（熟練式子化簡使用）、課本習作等（課堂勾題書寫或規定回家作業範圍等）。

(三)教學歷程

從上次課程之未知數引入，透過情境問題的提問與應答，先建構出 x 可進行運算的概念後（可參考本單元數學例題說明）後，運用數線構圖介紹未知數運算，次序從簡單的數字 b 、 x 、 $x + b$ 、 ax 、 $ax + b$ 、至更多計算符號的一次式計算等，完整介紹正確書寫方式一遍給學生（在這之前記得搭配抽籤提問），並將一元一次式的書寫方式保留上述寫法在黑板上。而後拿出附有可安插名片的盒形教具，以不提出函數（本教學活動以盒

形教具呈現，可看到函數機器形式)名詞，卻運用函數內涵的方式介紹式子(本教學活動中以名片呈現，代表晶片)，教師版的簡要說明如下：晶片往往是驅動機器的重要元件，可透過安插不同晶片而使這個機器產生不同的功用設定。

然如此的呈現，教師如何教代數式呢？先拿出一張名片卡，請一位學生從剛剛學到的一元一次式概念，任意於名片上寫一個一元一次式做為例子向全班說明如何進行，學生於名片上寫式子表進行晶片內容的設計，而後將名片(晶片)安裝在盒形教具(機器)上，而後告訴學生當輸入不同的 x 值，透過機器其實就會計算出不同的結果，輸出內容除與輸入的值相關外，更與晶片如何設計內容息息相關，此時運用學生寫的式子實際計算兩次數值給全班看。確定全班理解後，發給全班每人不同色名片數張，請學生設計晶片內的一元一次式設定(書寫過程中，教師須一邊指導查看學生們的書寫是否正確，亦可一邊引導學生進行特定的書寫，且教師須注意選取或留意一些，剛剛書寫過程中看到式子較長而計算具有挑戰性的名片)。而後全數收回，抽出 1 張學生所設計的晶片放入機器中後，再抽 2 名學生，抽到的學生則以自己的座號為要輸入這個機器的數字，分別於黑板的左右兩邊進行機器內部的運算，而全班其他人則負責幫忙檢查，重複上述二次後，學生於計算式子的值多已熟悉。

而後將班級中特異長又難計算的兩張名片抽出請兩位同學進行如上計算，因較長的一元一次式計算很複雜，有許多學生不論計算錯誤或檢驗過程都感到疲累不耐煩，進而引導出在進行晶片設計(在自己的卡片寫式子)時，可簡化式子而使計算更精簡且不易計算失誤，使學生理解式子化簡的重要性，進而想知道如何進行化簡。而後由教師統整切入完整介紹式子的化簡，然此部分涉及式子計算，務須於課堂中搭配隨堂練習進行，並規定計算及操作型態的回家作業，範圍著重於式子的化簡與運算。而式子單元的教學活動對照，則如下表 3。

表 3

式子單元活動連結意義對照表

引導動機	人類創造的潛能與興趣			
分年細目	7-a-01、7-a-02			
運用方法	運用晶片潛藏的函數概念，引導介紹式子及其值的功用			
現實具體	晶片設計	晶片放入機器	輸入號碼運算	複雜的設計
數學概念	一元一次式的構造與書寫	形成函數機	代入式子求值的計算	式子化簡有其便利性

(四)數學例題（僅概念）

（承接上單元數學例題）若小魚老師設定小明抽出的幸運號碼加 5 為當天進入小魚老師討論區答題後可領取金幣的密碼，現在 x 已代表某日小明所抽出幸運號碼，請問可用什麼式子代表某日進入小魚老師討論區答題後可領取金幣的密碼？若後天小明抽出 6，請問後天班上學生進入小魚老師討論區答題後，需輸入密碼多少才可領取金幣？

(五)形成評量

包含課堂區分主動被動應答的狀況、上台表現、隨堂練習、回家作業、課中或課後的歷程概要書寫回饋。

三、方程式單元

(一)課程目的

（一元一次）方程式的單元，除介紹方程式，並運用密碼概念，營造開啟學生進行寫方程與解方程的動機與想法。

(二)使用教具

式子單元學生所寫上式子的名片、可安插名片的盒形教具、從訊息的有效傳遞至訊息有加密解密設計的故事介紹 ppt。

(三)教學歷程

此次課程以一個全新單元的感受開啟，介紹訊息傳遞中，不讓第三方閱讀到訊息而設計的加密與解密，並提到文字可進行數字的轉換，介紹加密過程，例如教師可與學生約定運用「該數加 3」的方式傳遞訊號後，由學生實際計算過程，亦即若發報者想要傳遞的訊號 $x = 3$ ，由約定的加密型式 $x + 3$ 傳遞，故收訊者收到訊號為 6。過程運用 $x + 3 = 6$ 的過程。

在學生已理解介紹後，便將上單元盒形教具的機器作為加密的機器使用，例如請三名學生上台，分別代表發報者、加密者與收訊者，可先約定發報者給出範圍限制在 1 至 9 的未知數 a ，而加密者在收到 a 數字後，須透過加密機晶片上的式子進行秘密運算，並將計算出結果公開給收訊者，而教師注意須將剛剛收訊者由加密處接收的過程以方程式（此處教師仍須強調等號）列下寫在黑板上。在觀察到學生透過此活動已熟悉如何進行加密後，便開始對擔任收訊者的學生進行提問，所收到的訊息是什麼？要如何從所收

到的訊息讀取到原本發報者的原始訊息？學生提出各類想法並回應整理後，先提示大家在還不知道快速解決的方法前，都可嘗試以可能的數字 1 至 9 代入式子看是否滿足方程式而求得解，須注意此時每次講解方程式，仍需加強講解方程式中等號的重要，並將完整的代入作法仔細講解並呈現於黑板。

在大家都學會了此方法後，再次抽選兩位學生，分別擔任發報者與加密者，加密者至一旁進行秘密運算後將訊息發出給全班，而後請所有接收到訊息的學生運用剛剛所學的方式，完整解出原始答案，並請每位學生均於練習本上計算，而後可運用分組競賽的取優勝增加競賽答題速度與趣味性。本課程課中需注意給予正向作為解出答案的學生正增強，並於課後發下此單元的回家課後練習（內容包含如何列方程式的形成自學單，以及代入解方程的題目）。而此單元活動與數學知識的對照如表 4。

表 4
方程式單元活動連結意義對照表

引導動機	人具本能探究與好奇能力，進而具解開未知或秘境的動機			
分年細目	7-a-02、7-a-03			
運用方法	運用密碼的加密解密，營造學生寫方程式與解方程式的動機			
現實具體	取數字 1 至 9	加密過程	解密	課後練習
數學概念	有限數字（便利代入求解）	列一元一次方程式	有限數字代入式 檢驗是否解	方程式與代入解 方程總複習

(四)數學例題（僅概念）

（承接上單元數學例題）進到小魚老師討論區後，小花突然忘了今天小明所抽的幸運數字 x ，但金幣已幾乎在眼前實在很想領金幣，就缺了輸入密碼而已，於是隨便找班上同學阿寶問密碼，阿寶告訴小花密碼是 18。請問如果你是小花，你可不可以不要透過再問同學一次，而知道今天小明所抽的幸運數字？請試著以 x 列方程式，並找出解 x 的規則。

(五)形成評量

包含主動被動應答的狀況、上台表現、分組合作情形、課堂運算、回家課後練習。

四、解方程式單元

(一)課程目的

以認識並熟練等量公理為主，進而至移項法則，提供除代入求解外，其他更便利求解一元一次方程式的方法。

(二)使用教具

自製等臂吊秤（含砝碼與自選未知重量的可分割物品）、自製特殊形狀的磁鐵（形狀包含蘋果數個、錢幣及 x 等）、課本。

(三)教學歷程

回顧一元一次方程式的意義（可表示代數方程式解的意義），並請學生察覺當中與式子的不同點，並看到當中等號的部分，進而引導學生關注等號的性質或規則。而後拿出吊秤，以平日秤斤秤兩的對等至介紹等號，後請學生實際觀察吊秤兩邊平衡時，其中固定某邊放未知物，另一邊放砝碼，而後分別考慮未知物的 $+$ $-$ \times \div 四則運算，並以對答的方式，引導學生思考另一邊的秤碼要怎麼處理，吊秤才會平衡？將多位學生們的應答寫於黑板後，從中整理出等量公理的文字敘述，而後帶領全班閱讀課本關於等量公理範圍敘述，進行閱讀理解文本的練習。

下一步則反向操縱，即當吊秤的一方非僅未知重量的物品，且兩方平衡時，要如何知道未知物多重？並把同樣的概念，運用兩堆價值相等的畫法畫在黑板一側，黑板另一側則寫方程式，三個表徵同時運作，而在操作第三次後，將表徵直接剩黑板上的二種表徵，使其專注於不同的方程式，如何以分堆等量的方式求解，持續至多數學生已看出簡單有規律的等量操作規則（教師亦可提供個別學生於桌上操作之教具，讓每人實際動手操作，個別發現）。最後將實際操作的結果，回到運用方程式書寫在黑板，並進行方程式一般規律的統整，課堂並備有隨堂練習，並請學生熟練運用等量公理解方程。當學生們都寫好後，仍需引導回想如何判斷這個數字是不是解，並提醒學生們將求得的解帶入檢驗，看解答是否正確。

至於移項法則的介紹，則在上述活動後將黑板分三區，將兩堆以等號連結之畫法畫在黑板一側，至於黑板中間與黑板另一側，則分別是以等量公理解方程，以及移項法則解方程。然這次則特別著重於等量公理解方程，對應到的移項法則運算的講解，同樣操作完整的理解後，將結果統整於黑板。此練習同樣須備隨堂練習，並熟練移項法則解方

程，最後須提醒學生們將所求出的解帶入檢驗解。此單元活動與數學知識的對照如表 5。

表 5

解方程式單元活動連結意義對照表

引導動機	一般人們對於相等的處理原則，具多數共識					
分年細目	7-a-04、7-a-05					
運用方法	以對照建立具體物與方程式的抽象連結，協助釐清代數之結構性					
現實具體	吊秤	吊秤平衡時兩端的操作	於黑板上以分堆等量方式介紹	黑板上呈現分堆等量與方程式的對照	等量公理與移項法則於方程式上操作的對照	課後練習
數學概念	現實世界相等之表徵	等量公理介紹	等號在平面上，以不同表徵的理解	能從具體操作到抽象方程運算	能感受到移項法則的對等與便利	熟練等量公理與移項法則

(四)數學例題（僅概念）

（承接上單元數學例題）以每天小明抽出的幸運號碼加 3 作為領取金幣密碼的設定，使用了一個月後，小魚老師覺得密碼這樣設太簡單，於是改成每天選不同式子公布在討論區，當天計算出的值就是當天領取金幣的密碼。而在小魚老師改了方式後，某日是安安忘了當天小明抽的幸運號，而他也與小花一樣，問了班上同學阿叁密碼是多少？阿叁告訴安安密碼為 21，輸入密碼 21 後安安順利領取金幣成功，只看到小魚老師公布在討論區的式子為 $2x + 1$ 。請問如果你是安安，你可不可以不要透過再問同學一次，而知道當日小明所抽的幸運數字為何？試著以 x 列出方程式，並運用等量公理或移項法則求解。

(五)形成評量

包含主動被動應答的狀況、課堂運算、回家課後練習。

五、特別補充

在學生學會等量公理與移項法則後，課程須回到方程式單元中的解密碼的活動，以一元一次式設計兩方對戰時的密碼情境，接收訊息後所進行一元一次方程式的求解，藉

以觀察學生在解開解的熟悉度是否需加強、延伸或加深等。另亦可自行設計與整個主題相關的題組，進行網路上的題目競答，或實體對戰下的大地遊戲、密室逃脫遊戲（關卡著重密碼加密解密設計）等，如此整個模組方達完整，時間估計在一個月的設計課程中密集達成。

肆、實施與反思

本素養導向的主題課程設計完成後，於七年級上學期一般班級課堂實施，成果可看到在現實表徵與活動的介入下，學生的學習專注度確有提升。而密碼主題可成功的背後，代表的是人們對未知的好奇心與探求，往往是知識成長的因素，且這樣的好奇是可使學生自發想注意想學習。而透過素養導向的課程，學生可從較具體的物明白抽象數學建立於平常生活上的意義，而能廣泛的從生活中查看各類與數學相關的發現，而搭配小組班級活動更能促進學生間彼此分享。

上述數學素養相關的課程設計實施，提升了整體的學習興趣，學生學習因有具體物引起動機而更具焦課程，此外亦可發現部分學生能自我察覺到，在完成解決實際問題的過程必須運用這樣的數學工具才得解決，而現實的問題更造就必要進一步深入學習數學工具與相關規則，加上課程活動設計亦帶動班級活絡氣氛，學生感覺數學居然也蠻好玩的就開始邊想邊玩，進一步更向老師詢問一些自己在腦中所想不同面向小問題，甚至更開始發表意見學了這些後還可以如何發展等，也因此全班一起學習數學的凝聚力更強，且有動力進一步交互詢問不懂之處而精進學習。然課程設計仍有不足處，例如學生在面對方程式時，可發現其對於非課程講述到的其他情境，亦即非以蘋果、晶片、密碼的情境或表徵，仍會有思緒暫留而反應較慢的現象，故看到學生在運算上仍會停留實體物，而看出此課程設計，在完整抽象思考的建立與熟稔方面，尚有加強空間，尤其需再經過純粹代數運算等更嚴謹抽象的練習一陣後，方能漸漸跳脫一開始以情境刺激學習的狀態，進而真正步入以代數思維進行結構思考，將所具的抽象概念運用到生活。而這樣的欠缺讓我們亦不禁反思，類似抽象的練習其實是過去傳統教學下，學生若完整理解後可具備之能力，故不論傳統教學模式或現今提倡的素養教學，筆者認為兩方均具備對數學真實本質傳承的重要，而持傳統教學與現實教學相輔為用的看法，以使學生能從獲得最大學習效益，方不致偏廢。

而此課程實施後發現，素養導向的教學的確能使學生較有感的引發較高的學習興趣，

而運用主題式素養導向自編教材於課堂，除學生們的上課回饋，教師於教學的行動中，亦會發現有許多延伸或深入知識，每次的再深入再學習後，可於上課帶給學生更多而加深教師專業。而透過教師行動後的反思、探究、學習、熟練與再行動的重複過程，相信每個單元的教學與課程開發，在諸多教師們的用心下，必朝向至善至美，而有益於學子們的良好學習。

參考文獻

- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。**教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告**。台北市：教育部。
- 林永豐（2017）。核心素養的課程教學轉化與設計。**教育研究月刊**，275期，頁4-17。
- 單維彰（2017）。「知、行、識」～探究數學素養導向教學模組設計與發展。（單維彰與鄭章華，編）**十二年國教數學素養導向課程設計與教學案例**。新北市：國家教育研究院。頁1-32。