第 3 章　《數學論》的內容分析（一）

從第 2 章的說明中，可知《數學論》共六卷，其編排方式主要是以《九章算術》中的方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈朒、方程、勾股爲目。在內容上全書共設凡例四十三則，題二百六十四則，附五則，共三百一十二則。[52]其中方田章內容分爲直線類與曲線類，分別在此書第一卷與第二卷介紹。而第三卷則分上、下二部份，內容則分別涵蓋粟布章與衰分章的題目。並於第三卷後附分法五則，討論命分、約分、乘分、課分、通分等分數的四則運算問題。少廣章的內容則置於第四卷，討論立體圖形求積及反求邊徑的問題。第五卷則分爲上卷之上、上卷之下、下卷之上、下卷之下四部份，分別介紹商功章、均輸章、盈朒章、與方程章等題目。而第六卷所討論的則爲勾股章的內容。

由於《數學論》全書的內容浩繁，筆者擬重點的介紹各卷的主要內容與數學知識，並從各卷、各類形題目中挑選一些較具代表性的題目作比較與討論，期能以此突顯出本書的精華、特色與其價值。除此之外，經筆者比對本書發現，杜知耕對於此書的編排順序是按古九數的順序，將勾股章內容置於全書之末。但觀察方田章、少廣章等幾何類其他各卷的題目證明，勾股章中的定理、公式與數學概念明顯的爲其他卷題目所引用並以之爲基礎。因此，就本論文內容分析的書寫順序安排，擬先分析本書幾何類問題。先於本論文第 3 章分析第六卷的勾股章及第一卷、第二卷的方田章直線類及曲線類等平面幾何問題。而後本論文第 4 章的討論順序則依次爲第四卷的少廣章的立體幾何問題、第三卷的粟布章與衰分章問題、第五卷的商功章、均輸章、盈朒章、方程章的問題。此外《數學論》一書常於「解」中，以詳盡、巧妙的圖解方式及文字注釋以說明題目公式、定理的立論原理，因此，筆者將於題目分析時仿原附圖畫出該題所附之圖形，以便於題目的分析討論及保留杜知耕之想法。

3.1.　勾股章內容分析

第六卷所討論的內容屬於《九章算術》中勾股章的部份。徐光啓之前的明代中算家大致上是將勾股術放在九數之末，並採用「算術」的進程來處理勾股問題。然而，這種風氣在西學傳入之後，從徐光啓開始便有了相當大的轉變。[53]到了清初，由於「西學中源」與「幾何即勾股」之說的盛行，勾股術更成爲中算家研究

52　參見〈《數學論》簡述〉，收入靖玉樹主編，《中國歷代算學集成》，頁 2873。
53　參見黃清揚，《中國 1368－1806 年間的勾股術發展之研究》，頁 90。

的重點。清初學者方中通就曾言：「西學精矣，中土失傳耳。今以西學歸九章，以九章歸周髀。周髀獨言勾股，而九章皆勾股所生。」[54]而其著作《數度衍》中九數的排列順序便以「勾股為首，少廣次之，方田次之，商功次之，差分次之，均輸次之，盈朒次之，方程次之，粟布次之。」[55] 除此之外，由於《幾何原本》的公理體系和演繹推理的影響，此時期的中算家對勾股術的研究方式不再只言其法而不言其義，而是轉而對算理更加重視。我們可從梅文鼎的《勾股舉隅》、方中通的《數度衍》或本書的勾股章中明顯看出。

本卷內容主要討論勾股術相關問題，茲將其分爲三大類：

（1）勾、股 、弦、較、和、積利用「乘除」及「開方」的互求問題。

（2）勾股概念延伸問題：含「勾股容方」、「勾股容圓」、容方之方邊、餘勾、餘股、全勾、全股的互求問題等等。

（3）勾股測量問題：利用勾股術及相似三角形概念，以測高、深、廣、遠的問題等。

全卷共有 40 則題目。且每題於「法」之後，大部份皆附有圖文證明或說明的「解」，並於卷首設凡例 5 則，茲分別介紹如下：

3.1.1. 勾股章凡例

本卷於卷首設凡例 5 則，主要介紹有關「勾、股 、弦」、「較」、「和」等本卷所需用到的圖形概念、定義及名詞。爲便於討論，茲將原術文所載之各則內容按數學概念分句，並以代數符號與代數運算式列表整理如下：

則	原術文	代數符號與代數運算式	
1	縱曰「股」，衡曰「勾」，斜曰「弦」	勾（a）、股（b）、弦（c）	同《算法統宗》勾股名義
2	股大于勾者曰「勾股較」	勾股較$=(b-a)$	
	弦大于勾者曰「勾弦較」	勾弦較$=(c-a)$	
	弦大于股者曰「股弦較」	股弦較$=(c-b)$	
	勾、股並大于弦者曰「弦和較」	弦和較$=(a+b-c)$	
3	勾、股並曰「勾股和」	勾股和$=(a+b)$	
	勾、弦並曰「勾弦和」	勾弦和$=(a+c)$	
	股、弦並曰「股弦和」	股弦和$=(b+c)$	

[54] 引自方中通，《數度衍》，頁 2557。
[55] 同上。

	勾、股、弦並曰「勾股弦和」，亦曰「弦和和」	勾股弦和＝弦和和 $=(a+b+c)$	
4	勾股較加股弦較即勾弦較	$(b-a)+(c-b)=(c-a)$	
	勾弦較減股弦較即勾股較	$(c-a)-(c-b)=(b-a)$	
	弦和較加勾弦較即股	$(a+b-c)+(c-a)=b$	
	弦和較加股弦較即勾	$(a+b-c)+(c-b)=a$	
	弦和較加勾弦較、股弦較即弦	$(a+b-c)+(c-a)+(c-b)=c$	
	勾股較減股弦和即勾弦和[56]	$(b+c)-(b-a)=(a+c)$	
	勾股和加股弦較即勾弦和	$(a+b)+(c-b)=(a+c)$	
	股弦和減勾弦和即勾股較	$(b+c)-(a+c)=(b-a)$	
	股弦和減勾股和即勾弦較	$(b+c)-(a+b)=(c-a)$	
	勾股較加勾股和，半之為股	$[(b-a)+(a+b)]\times\frac{1}{2}=b$	
	勾股和減勾股較，半之為勾	$[(a+b)-(b-a)]\times\frac{1}{2}=a$	
	股弦較加股弦和，半之為弦	$[(c-b)+(b+c)]\times\frac{1}{2}=c$	
	股弦和減股弦較，半之為股	$[(b+c)-(c-b)]\times\frac{1}{2}=b$	
	勾弦較加勾弦和，半之為弦	$[(c-a)+(a+c)]\times\frac{1}{2}=c$	
	勾弦和減勾弦較，半之為勾	$[(a+c)-(c-a)]\times\frac{1}{2}=a$	
5	或方形、或直形，有對角斜線者曰「角線形」。[57]		

從上表，明顯可看出凡例的第一則爲勾、股、弦的定義，但定義並不十分嚴謹。而第二、三則分別介紹各種「較」與「和」。經筆者比對發現，此三則內容與《算法統宗》的「勾股名義」相同，[58]但分別少了「弦較較」（即$[c-(b-a)]$）與「弦較和」（即$[c+(b-a)]$）。而第四則凡例則是介紹勾、股、弦、較、和之間的轉換。顯見的此轉換只涉及「加」、「減」及「折半」而未及「乘除」及「開方」，

[56] 此句有誤，應校爲「股弦和減勾股較即勾弦和」。

[57] 此五則凡例術文引自杜知耕，《數學論》卷六凡例，頁 3004~3005。

[58] 本論文所採用之《算法統宗》之版本爲十七卷之《新編直指算法統宗》。並以梅榮照，李兆華，《《算法統宗》校釋》及郭世榮，《《算法統宗》導讀》爲參考。

作者於此凡例末尾亦註明「用乘除開方相求者不在此例」。而第五則凡例則是定義何謂「角線形」。

3. 1. 2. 勾、股、弦、和、較、積互求

本卷共有題目 40 則，其中的基本的勾、股、弦、和、較、積互求的題目有 20 則，皆爲傳統中算題目。傳統的勾股法則是以 a、b、c、$(b-a)$、$(c-a)$、$(c-b)$、$(a+b)$、$(a+c)$、$(b+c)$ 等九個元素任擇其二爲已知條件以求解三角形，共有 $C_2^9=36$ 種情況。而本卷的第 1~3 則勾、股、弦互求與第 13~20 則勾、股、弦、和、較之互求即屬此類。至於第 4~12 則題目則爲弦、和、較與勾股積互求之題型，底下分別介紹。此外爲便於後面分析討論，將勾股積（即 $\frac{1}{2}ab$）以符號「A」表示，其餘勾、股、弦、和、較的表示法則與前面討論之「凡例」同。

一、勾、股、弦互求

本卷的 1~3 則題目分別爲「勾、股求弦」、「勾、弦求股」與「股、弦求勾」，題目所用的公式與題目排序與《算法統宗》同，而所用之勾股數則分別爲（6,8,10）與（3,4,5）。三題的中心概念即爲作者所寫「不論勾、股相等與否，勾上方形及股上方形並，必與弦上方形等。」[59]以代數式表示即爲 $a^2+b^2=c^2$。第 1 則附有詳細的圖文證明，所採用的證法與《九章算術》的證法並不相同，而與《幾何原本》第一卷第 47 題的證法同。而 2、3 則的「解」則簡單說明其爲第 1 則公式反求之而已。如第 3 則的「解」所言：「弦積內減去股積，所餘必勾積，故平方開之得勾。」[60]底下作第 1 則術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第一則、勾股求弦	
設勾六尺，股八尺，求弦？	即弦 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$
法曰：置勾、股各自乘勾得三十六尺，股得六十四尺，兩數並共一百尺，平方開之得十尺即所求。	證明： （1） 甲乙勾（a）＝乙丙股（b）時 如下圖 3－1－1

59 引自杜知耕，《數學論》卷六，頁 3007。
60 同上，頁 3008。

解曰：不論勾、股相等與否，勾上方形及股上方形並，必與弦上方形等。

如甲乙丙勾股形，甲乙勾與丙乙股等。試作乙丁等高同底方形，其邊與甲乙等必為勾上方，又與丙乙等必為股上方。再作戊已外切方形，其邊與甲丙等，即為弦上方。若于形內減去乙丁方形，餘甲乙戊等四三角形，並之復等一乙丁方形（一卷十二則），以乙丁為勾方，以等乙丁之四三角形為股方，並之不等于戊己弦方乎。

又如庚辛壬勾股形，庚辛短，辛壬長，勾與股不相等者。於庚辛勾、辛壬股、庚壬弦上各作方形為庚癸、辛子、辛丑。次作辛寅、辛癸、辛辰、壬丑、庚子五線。《幾何原本》云：庚辛壬與庚辛午既皆方角，即午辛、辛壬是一直線。依顯庚辛、辛己亦一直線。又壬庚辰與辛庚丑既皆方角，而每加一辛庚壬角，即辛庚辰與壬庚丑兩角亦等。依顯辛壬癸、庚壬子兩角亦等。又庚辛辰三角形之辛庚、庚辰兩邊與庚壬丑三角形之丑庚、庚壬兩邊等，辛庚辰與壬庚丑兩角復等，則對等角之辛辰與壬丑兩邊亦等，而此兩三角形亦等矣。夫辛丑方形倍大于同庚丑底，同在平行線內之庚壬丑三角形（一卷八則。既謂直形等于平行線內同底象目形，則必能倍大于平行線內同底之三角形），而辰卯直形亦倍大于同庚辰底，同在平行

則乙丁方形

＝勾上方形（a^2）

＝股上方形（b^2）

又已戊方形

＝弦上方形（c^2）

又已戊方形

＝2×乙丁方形

則弦上方形（c^2）

＝勾上方形（a^2）＋股上方形（b^2）

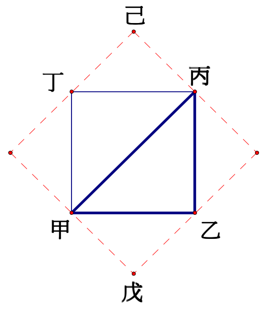


圖 3—1—1

（2）甲乙勾（a）≠乙丙股（b）時

如下圖 3—1—2

（幾何原本）

$\because$ ∠庚辛壬＝∠庚辛午＝90°

$\Rightarrow$ 則午,辛,壬共線

同理，庚,辛,已亦共線。

∠壬庚辰＝∠辛庚丑＝90°

$\Rightarrow$ ∠壬庚辰+∠辛庚壬＝∠辛庚丑+∠辛庚壬

$\Rightarrow$ ∠辛庚辰＝∠壬庚丑

同理∠辛壬癸＝∠癸壬子 。

又辛庚＝丑庚，庚辰＝庚壬，

則△庚辛辰≅△庚丑壬

又庚丑∥辛午,庚辰∥辛寅

$\therefore$ 辛丑方形＝2△壬庚丑

＝2△辰庚辛＝寅庚直形

同理辛子方形積＝癸卯直形積

則癸庚方形積

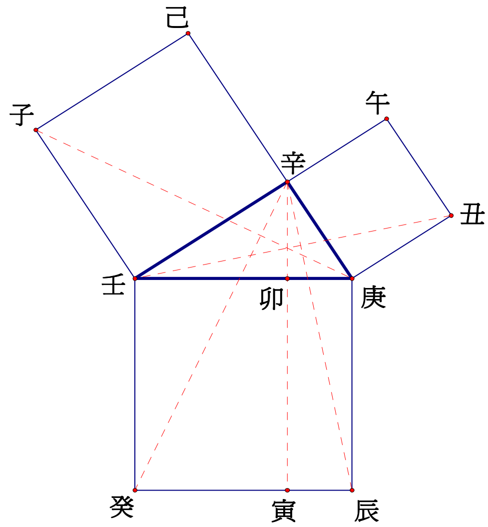
＝癸卯直形積＋寅庚直形積

則弦上方形（c^2）

＝勾上方形（a^2）＋股上方形（b^2）

[61] 同上，頁 3007。

線內之庚辛辰三角形，則辛丑方形不與辰卯直形等乎。依顯辛子方形與癸卯直形等，則癸庚一形與辛子、辛丑兩形並等矣。法以勾、股各自乘求勾、股上兩方形也，兩形並，則為弦上之方積，故平方開之得弦也。[61]



由（1）、（2）　　**圖 3－1－2**

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$

二、弦、和、較與勾股積互求

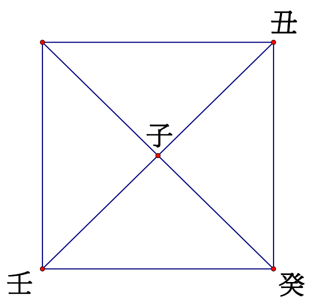
承上所述，本卷第 4~12 則題目則爲弦(c)、勾股和($(a+b)$)、勾股較($(b-a)$)與勾股積（ $A=\frac{1}{2}ab$ ）互求之題型。而弦、勾股和、勾股較與勾股積此四元素，任擇其二爲已知條件以求解另一元素的題型應有$C_3^4 \times C_2^3 = 12$種，本卷介紹了其中的 9 種題型。且每題均附有圖文證明或簡單的說明。首先就其中第 4~6 題觀察，此三題爲弦、勾股較與勾股積互求，所使用的數學公式爲「弦上方形與四勾股積、一勾股較上方積並等。」[62] 以代數式表示即爲$c^2 = 4 \times A + (b-a)^2$。茲就第 4 題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第四則、勾股積及勾股較求弦 設勾股積二十四尺，勾股較二尺，求弦？ 法曰：置勾股積四因之得九十六尺，另置勾股較自乘得四尺，兩數並共一百尺，平方開之得十尺即所求。	勾股積（ $A=\frac{1}{2}a \times b$ ）＝24， 勾股較（ $(b-a)$ ）＝2 弦＝ $c = \sqrt{4 \times A + (b-a)^2}$ ＝ $\sqrt{4 \times 24 + 2^2}$ ＝10

[62] 同上，頁 3008。

解曰：甲乙丙勾股形與戊己甲、丁庚戊、乙辛丁三勾股形等。甲丙為甲乙丙形之股，甲己為戊己甲形之勾，于甲丙截甲己，餘己丙即勾股較也。丙辛、辛庚、庚己各與己丙等，是己辛為勾股較上方形。又甲乙為甲乙丙形之弦，而丁乙、戊丁、甲戊各與甲乙等，是甲丁為弦上方形。今並五形而成一甲丁方形，則是一弦上方形與四勾股積、一勾股較上方積並等矣。故四因勾股積並入勾股較自乘之積，平方開之得弦也。

又如壬子癸勾股形，壬子勾與子癸股等，四形並，即成一壬丑弦上方形而無餘。凡遇勾股相等之勾股形，四因積，平方開之即得弦度。[63]



附圖 3－2－2

證明：如下圖 3－2－1

⊿甲乙丙＝⊿戊己甲

＝⊿丁庚戊＝⊿乙辛丁

又丙辛＝辛庚＝庚己＝己丙

＝甲丙－甲己＝股－勾＝$(b-a)$

則弦上方形（c^2）＝甲丁方形

＝4×勾股形（A）＋1×己辛方形（$(b-a)^2$）

$$c^2=4\times A+(b-a)^2$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{4\times A+(b-a)^2}$$

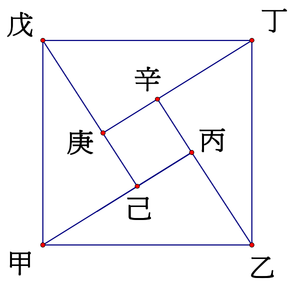


圖 3－2－1

當勾、股相等時，如圖 3－2－2

弦上方形（c^2）

＝壬丑方形＝4×勾股形

$$c^2=4\times A\Rightarrow c=\sqrt{4\times A}$$

其次就第 7 題與第 10 題來看，可發現此二題爲弦長固定，勾股和與勾股較互求的題型，所用的數學概念爲「倍弦上方積大于勾股和上方積者，勾股較上方積也。」[64]以代數式表示即爲 $2c^2-(a+b)^2=(b-a)^2$。茲就第 7 題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第七則、弦及勾股和求勾股較 設弦十尺，勾股和一十四尺，求勾股較？	勾股較（$(b-a)$）＝$\sqrt{2c^2-(a+b)^2}$

[63] 同上，頁 3008。
[64] 同上，頁 3010。

法曰：置弦自乘得一百尺，倍之得二百尺，另置勾股和自乘得一百九十六尺，兩數相減餘四尺，平方開之得二尺即所求。

解曰：甲己方形內凡八勾股形而皆等。乙戊為戊丁乙形之股，甲乙為乙丙甲形之勾，甲乙、乙戊並，得甲戊乃勾股和也。餘三邊皆等于甲戊，是甲己為勾股和上方形。又丙丁為弦上方形，辛壬為勾股較上方形本卷四則。夫弦上方形內得勾股形四及勾股較上方形一，勾股和上方形內得勾股形八及勾股較上方形一，是一勾股和上方形當弦上方形二而少一勾股較上方形也。故倍弦冪減勾股和自乘之積，平方開之得勾股較。[65]

$=\sqrt{2\times10^2-14^2}=2$

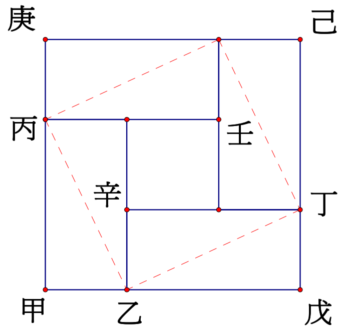


圖 3－3

證明：如圖 3－3

甲己方形＝8 勾股＋1 辛壬方形

$(a+b)^2=8\times A+(b-a)^2$

丙丁方形＝4 勾股＋1 辛壬方形

$c^2=4\times A+(b-a)^2$

則 $2c^2-(a+b)^2=(b-a)^2$

$\Rightarrow (b-a)=\sqrt{2c^2-(a+b)^2}$

再者，第 8 題與第 12 題二題則爲固定勾股積，弦與勾股和的互求題型，所用的數學概念爲「勾股和上方大于弦上方者，四勾股積也。」[66]以今代數式表示即爲 $(a+b)^2-c^2=4\times A$。茲就第 8 題作術文與今解之對照分析：

原術文

第八則、勾股和及勾股積求弦

設勾股和一十四尺，勾股積二十四尺，求弦？

法曰：置勾股和自乘得一百九十六尺，另置勾股積四因之得九十六尺，兩數相減餘一百尺，平方開之得十

今解

弦（c）$=\sqrt{(a+b)^2-4\times A}$

$=\sqrt{14^2-4\times24}=10$

證明：如七則圖 3－3

甲己方形（即勾股和上方形）

[65] 同上，頁 3009。
[66] 同上，頁 3010。
[67] 同上。

尺即所求。	＝丙丁方形（即弦上方形）＋4 勾股形 $(a+b)^2 = c^2 + 4\times A$
解曰：勾股和上方大于弦上方者，四勾股積也。故相減開方得弦。[67]	$\Rightarrow c^2 = (a+b)^2 - 4\times A$ $\Rightarrow c = \sqrt{(a+b)^2 - 4\times A}$

最後，第 9 題與第 11 題二題則爲固定勾股積，勾股較與勾股和的互求題型，所用的數學概念爲「勾股和上方大于勾股較上方者，八勾股積也。」[68]以今代數式表示即爲 $(a+b)^2 - (b-a)^2 = 8\times A$。茲就第 9 題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第九則、勾股和及勾股積求勾股較	勾股較（$(b-a)$）
設勾股和一十四尺，勾股積二十四尺，求勾股較？	＝$\sqrt{(a+b)^2 - 8\times A}$
法曰：置勾股和自乘得一百九十六尺，另置勾股積八因之得一百九十二尺，兩數相減餘四尺，平方開之得二尺即所求。	＝$\sqrt{14^2 - 8\times 24}$ ＝2 證明：如七則圖 3－3 甲己方形（即勾股和上方形） ＝8 勾股＋1 勾股較上方形 $(a+b)^2 = 8\times A + (b-a)^2$
解曰：勾股和上方大于勾股較上方者，八勾股積也。故相減開方得勾股較。[69]	$\Rightarrow (b-a)^2 = (a+b)^2 - 8\times A$ $\Rightarrow (b-a) = \sqrt{(a+b)^2 - 8\times A}$

由上面的對照分析中，可看出此 9 種題型所用的核心關係式有四式，而此四關係式的圖形表徵只有二個，分別爲第 4 題與第 7 題的附圖。至於作者論證四關係式的順序，則是先利用第 4 題與第 7 題的附圖，分別證出 $c^2 = 4\times A + (b-a)^2$ 及 $(a+b)^2 = 8\times A + (b-a)^2$ 兩關係式，再由此兩式推導出 $(a+b)^2 = 4\times A + c^2$ 與 $2c^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2$ 另兩關係式。

三、勾、股、弦、和、較之互求

本卷第 13~20 則勾、股、弦、勾弦和、股弦和、勾弦較、股弦較的互求題型。同樣的每題均附有圖文證明或簡單的說明。茲分別作術文與今解之對照分析：

---

[68] 同上。
[69] 同上。

原術文

第十三則、勾弦和、股弦和求勾、股、弦

設勾弦和一十六尺，股弦和一十八尺，求勾、股、弦？

法曰：置勾弦和、股弦和相乘（得二百八十八尺），倍之（得五百七十六尺），平方開之得二十四尺為勾股弦和。與勾弦和相減，餘八尺即股；與股弦和相減，餘六尺即勾；與一勾、一股相減，餘十尺即弦。

解曰：甲乙直形為勾弦和、股弦和矩內形，乙丁、乙丙皆與弦等，丁戊與勾等，丙庚與股等。則己乙必為弦方，己戊必弦勾矩內形，己庚必弦股矩內形，甲己必勾股矩內形，辛壬方形為勾股弦和上方形，壬癸、壬子皆與弦等，癸丑、子寅皆與股等，丑卯、寅辰皆與勾等，則巳壬必為弦方，午巳必為股方，辛午必為勾方，未癸、申子必皆股弦矩內形，酉丑、戌寅必皆勾弦矩內形，午酉、午戌必皆勾股矩內形，今以辛壬方形與甲乙直形較，則未癸、申子並倍于己庚，酉丑、戌寅並倍于己戊，午酉、午戌並倍于甲己，又午巳股方與辛午勾方並與己壬弦方等，是巳壬、午巳、辛午三形並，復倍于己乙。分形既倍大于分形，全形亦倍大于全形，是勾股弦和上方形一與勾弦和、股弦和矩內形二並等矣。故以勾弦和乘股弦和，倍而開方得勾股弦和也。于勾股弦和內減去一弦、一

今解

勾股弦和（$(a+b+c)$）

$=\sqrt{2\times(a+c)\times(b+c)}$

$=\sqrt{2\times16\times18}=24$

勾（a）$=(a+b+c)-(b+c)$

$=24-18=6$

股（b）$=(a+b+c)-(a+c)$

$=24-16=8$

弦（c）$=(a+b+c)-a-b$

$=24-6-8=10$

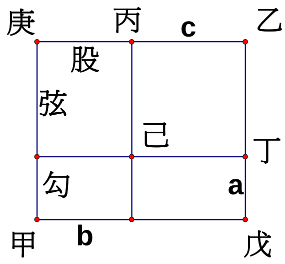


圖 3—4—1

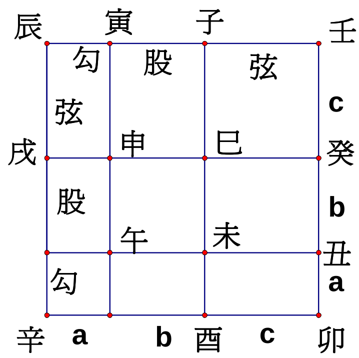


圖 3—4—2

證明：如圖 3—4—1 及圖 3—4—2

甲乙直形（勾弦和、股弦和矩內形）

＝1 弦方＋1 弦勾矩內形＋1 弦股矩內形

＋1 勾股矩內形

$(a+c)\times(b+c)=c^2+ca+cb+ab$

辛壬方形（勾股弦和上方形）

＝1 弦方＋1 勾方＋1 股方＋2 弦勾矩內形

＋2 弦股矩內形＋2 勾股矩內形

＝2 弦方＋2 弦勾矩內形＋2 弦股矩內形

＋2 勾股矩內形

＝2 甲乙直形＝2（勾弦和、股弦和矩內形）

股，所餘必勾；減去一弦、一勾，所餘必股；減去一勾、一股所餘必弦也。[70]

$$(a+b+c)^2 = c^2 + a^2 + b^2 + 2ca + 2cb + 2ab$$
$$= 2c^2 + 2ca + 2cb + 2ab$$
$$= 2(a+c)\times(b+c)$$

則 $(a+b+c) = \sqrt{2\times(a+c)\times(b+c)}$

$$(a+b+c)-(b+c) = a$$
$$(a+b+c)-(a+c) = b$$
$$(a+b+c)-a-b = c$$

此題型爲已知勾弦和、股弦和求勾、股、弦，首見於元代朱世杰的《算學啓蒙》卷下方程正負門的末二問，《算法統宗》、《勾股義》皆有收錄此題型，然題目敘述不同，數據也不同，但所用公式完全相同，皆從《算學啓蒙》來。[71]此外觀察其證明與所附之圖則與同時期梅文鼎的《勾股舉隅》相類似，都是採用「幾何」進路，以「出入相補」的方法證明此題。

原術文

第二十則、勾弦較、股弦較求勾股弦

設勾弦較四尺，股弦較二尺，

求勾、股、弦？

法曰：置勾弦較、股弦較相乘得八尺，倍之得一十六尺，平方開之得四尺，加股弦較得六尺即勾；加勾弦較得八尺即股；加勾弦較、股弦較得十尺即弦。

解曰：甲乙為弦方，丁乙為勾方，甲丙為股方。以丁乙勾方、甲丙股方錯縱加于甲乙弦方之上，必缺戊己、庚辛二直形，而重一丁丙方形。然丁丙方形必能補二直形之缺而與之等，何也？丁乙勾方、甲丙股方並等于甲乙弦方，若丁丙方形或大或小于二直形，則是勾方、股方

今解

弦和較（$(a+b-c)$）

$= \sqrt{2(c-a)\times(c-b)} = \sqrt{2\times4\times2} = 4$

勾（a）$= (a+b-c)+(c-b) = 4+2=6$

股（b）$= (a+b-c)+(c-a) = 4+4=8$

弦（c）$= (a+b-c)+(c-a)+(c-b)$

$=4+2+4=10$

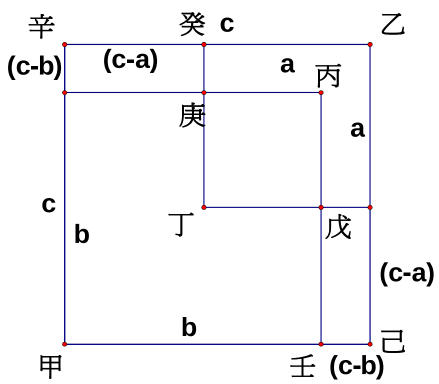


圖 3－5

[70] 同上，頁 3011。

[71] 《算學啓蒙》此時已失傳，後來羅士琳讓人從北京琉璃廠書肆中訪獲金始振重刻本，詳加校勘，於 1839 年在楊州刊行，這本書才又重行問世。

並不與弦方等矣。夫勾方、股方並既與弦方等，則二直形並亦必與丁丙方形等。法以兩較相乘而倍之者，求二直形也二直形以戊壬、癸辛勾弦較為長，以壬己、癸庚股弦較為濶，平方開之者求丁丙方形之一邊也，以一邊加股弦較之癸庚得癸丁即勾，加勾弦較之戊壬得丙壬即股，加一勾弦較之戊壬、一股弦較之癸庚得癸丁及戊壬即弦。[72]

證明：如圖 3－5

甲乙方形（c^2）

＝甲丙方形（b^2）＋丁乙方形（a^2）

＝甲丙方形＋丁乙方形

　－丙丁方形＋庚辛直形＋戊己直形

則丙丁方形（$(a+b-c)^2$）

＝庚辛直形＋戊己直形

＝2×庚辛直形（$(c-a)\times(c-b)$）

$$(a+b-c)^2=2(c-a)\times(c-b)$$
$$\Rightarrow (a+b-c)=\sqrt{2(c-a)\times(c-b)}$$

勾＝丙丁方形邊＋癸庚

勾（a）＝$(a+b-c)+(c-b)$

股＝丙丁方形邊＋戊壬

股（b）＝$(a+b-c)+(c-a)$

弦＝丙丁方形邊＋癸庚＋戊壬

弦（c）＝$(a+b-c)+(c-a)+(c-b)$

此題型爲已知勾弦較、股弦較求勾、股、弦，首見於《九章算術》勾股章第 12 題，《算法統宗》亦有收錄此題型。雖題目敘述不盡相同，但所用公式完全相同，且題目數據也相同，所用之勾股數皆爲（6，8，10）。而從此題的「解」及所附圖形可看出其證明與《九章算術》劉徽注的概念是一樣的。

其次，14、15 二題則是以股及勾弦較、勾及股弦較分別求勾與弦、股與弦。顯見的，兩題的概念完全相同，不過勾、股互異。茲就第 14 題作術文與今解之對照分析如下：

原術文	今解
第十四則、股及勾弦較求勾與弦	
設股八尺，勾弦較四尺，求勾、弦？	【法 1】

[72] 同上，頁 3013。

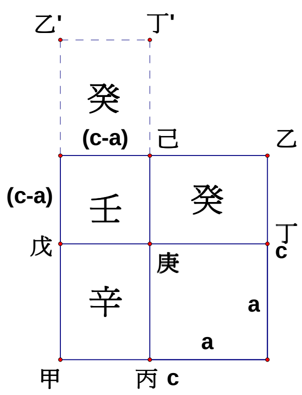
法曰：置股自乘得六十四尺，另置勾弦較自乘得一十六尺，兩數相減餘四十八尺，折半得二十四尺，以勾弦較除之得六尺即勾，加勾弦較得十尺即弦。

解曰：甲乙為弦上方形，丙丁為勾上方形，戊己為勾弦較上方形。于甲乙弦方內，減去丙丁勾方，所餘必股上方積，成一辛壬癸磬折形，再減去勾弦較上方形，所餘必甲庚、庚乙二直形，而以甲丙、乙丁為濶，丙庚、庚丁為長。甲丙、乙丁即勾弦較也，丙庚、庚丁為勾上方形之邊，即勾也。法以兩數相減，所餘者即二直形也，折半者，取二直形之一也。以勾弦較除之得勾者，即以濶除積得長也。

或以兩數相減之四十八尺為實，倍勾弦較除之亦得勾。

或以股自乘為實，以勾弦較除之得數減勾弦較，折半亦得勾。[73]

圖 3—6—2



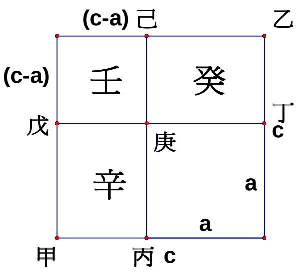


圖 3—6—1

勾（a）$=\dfrac{b^2-(c-a)^2}{2}\times\dfrac{1}{(c-a)}$

$=\dfrac{8^2-4^2}{2}\times\dfrac{1}{4}=6$

弦（c）$=a+(c-a)=6+4=10$

證明：如圖 3－6－1

即甲乙方形（c^2）

＝丙丁方形（a^2）＋辛壬癸磬折形

則辛壬癸磬折形積＝股上方形積（b^2）

又辛壬癸磬折形（b^2）＝壬方形（$(c-a)^2$）

＋辛、癸兩直形（$2\times a\times(c-a)$）

$b^2=(c-a)^2+2\times a\times(c-a)$

$\Rightarrow 2\times a\times(c-a)=b^2-(c-a)^2$

$\Rightarrow a\times(c-a)=\dfrac{b^2-(c-a)^2}{2}$

$\Rightarrow a=\dfrac{b^2-(c-a)^2}{2}\times\dfrac{1}{(c-a)}$

【法 2】

勾（a）$=\dfrac{b^2-(c-a)^2}{2\times(c-a)}=\dfrac{8^2-4^2}{2\times4}=6$

【法 3】如圖 3－6－2

勾（a）$=(\dfrac{b^2}{(c-a)}-(c-a))\times\dfrac{1}{2}$

$=(\dfrac{8^2}{4}-4)\times\dfrac{1}{2}=6$

如圖：甲乙´長＝$\dfrac{b^2}{(c-a)}$

又兩勾長＝甲乙´長－勾弦較

$2a=\dfrac{b^2}{(c-a)}-(c-a)$

$\Rightarrow a=(\dfrac{b^2}{(c-a)}-(c-a))\times\dfrac{1}{2}$

[73] 同上，頁 3011。

顯見的，第 16、17 題：股冪、勾弦較求勾弦和及勾冪、股弦較求股弦和兩題的概念亦完全相同，不過勾、股互異。而第 18、19 二題：股冪、勾弦和求勾弦較及勾冪、股弦和求股弦較則分別是第 16、17 題的公式反用之而已。茲就第 17 題作術文與今解之對照分析如下：

原術文	今解
第十七則、勾冪及股弦較求股弦和 設勾冪三十六尺，股弦較二尺， 求股弦和？ 法曰：置勾冪為實，以股弦較除之，得一十八尺即所求。 解曰：十五則辛壬癸磬折形，其甲乙元與弦等，丙丁元與股等，若移癸于戊，亦成辛壬戊直形，以股弦較為濶，股弦和為長矣。故以股弦較除勾冪得股弦和。[74]	股弦和（$(b+c)$） $=\dfrac{a^2}{(c-b)}=\dfrac{36}{2}=18$ 證明：如圖 3－7，同本卷 15 題 勾冪（a^2）＝辛壬癸磬折形 ＝辛壬戊直形（$(c-b)\times(b+c)$） $a^2=(c-b)\times(b+c)\Rightarrow(b+c)=\dfrac{a^2}{(c-b)}$

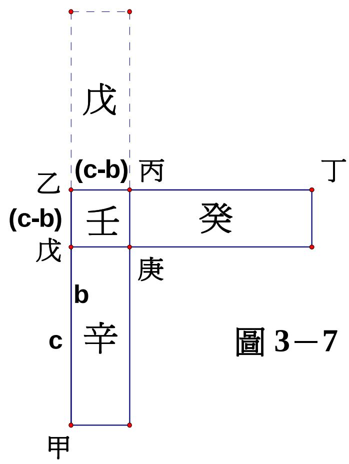


圖 3－7

3.1.3. 勾股概念延伸

本卷第 21~32 則的題目屬於此類型。首先第 21~23 題「索繞圓柱」與《九章算術》第五題「葛纏圓木」題型、數據皆相同，乃相連之勾、股、弦互求的題型，屬 1~3 題的應用延伸問題。其次 24、25 二題則分別爲勾股形求斜弦上的垂線及角至此垂線之度。而 26、28 二題則分別爲「勾股容方」、「勾股容圓」。最後 30~32 三題爲容方之勾股形方邊、餘勾、餘股、全勾、全股互求的問題。底下選「勾股容方」、「勾股容圓」與容方之勾股形方邊、餘勾、餘股、全勾、全股互求的題目，分二小節介紹之。

[74] 同上，頁 3012。

一、「勾股容方」與「勾股容圓」

本卷第 26、27 題爲「勾股容方」問題，其中第 26 題題目求以角切弦之方形方邊。此爲《九章算術》既有之傳統題目，第 27 題則求以角切勾與股之方形方邊，此爲西洋傳入之題目。至於第 28 題則爲「勾股容圓」問題，茲就 26、28 二題作術文與今解之對照分析如下：

原術文

第二十六則、勾股形求容方一法

設勾六尺，股一十二尺，

求容以角切弦之方形？

法曰：置勾、股相乘得七十二尺，以勾、股相並共一十八尺除之，得四尺即容方之邊。

解曰：甲乙丙勾股形分甲丙弦于丁，令丁甲與丁丙之比例若勾與股。自丁作丁乙線，必分勾股形為甲丁乙、乙丁丙兩三角形，一以勾為底，一以股為底。又兩分形之比例亦若勾與股《幾何原本》云：「凡兩形等高者，形與形之比例若底與底。」反之，凡形與形之比例若底與底者，兩形之高必相等。令兩分形各倍積，求對角之垂線本卷二十四則，一得丁戊，一得丁己，兩線必相等，何也？兩垂線即兩形之正高，兩形之高既等，故兩垂線必等也。兩線既等而又為勾及股之垂線，復切弦于丁，則己戊形必為勾股所容之方，而丁戊、丁己即容方之邊也。然分求之如是，合求之亦必如是。若並兩形之倍積為實，並兩底除之，亦得容方之邊與丁戊或丁己等，夫兩形之倍積即勾與股相乘之積也。兩分形之底即

今解

$$\text{方邊}=\frac{a\times b}{a+b}=\frac{6\times 12}{6+12}=4$$

證明：如圖 3－8

於甲丙弦上取一點丁，且令 $\dfrac{\text{甲丁}}{\text{丁丙}}=\dfrac{\text{勾}}{\text{股}}$

則 $\dfrac{\triangle\text{甲丁乙}}{\triangle\text{乙丁丙}}=\dfrac{\text{甲丁}}{\text{丁丙}}=\dfrac{\text{勾}(a)}{\text{股}(b)}=\dfrac{\text{甲乙}}{\text{乙丙}}$

又 $\triangle\text{甲丁乙}=\text{甲乙}\times\text{丁己}\times\dfrac{1}{2}$

$\triangle\text{乙丁丙}=\text{乙丙}\times\text{丁戊}\times\dfrac{1}{2}$

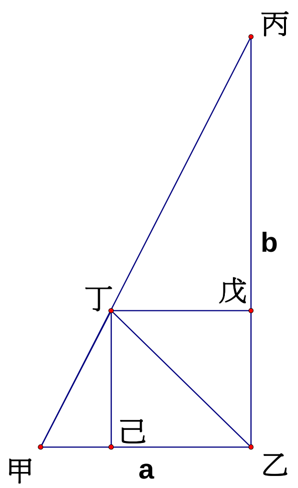
則 丁己＝丁戊，己戊形爲方形。

$2\triangle\text{甲乙丙}=2\triangle\text{甲乙丁}+2\triangle\text{乙丁丙}$

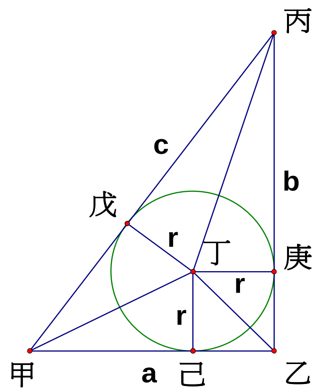
$\Rightarrow \text{勾}\times\text{股}=(\text{勾}+\text{股})\times\text{方邊}$

$\Rightarrow \text{方邊}=\dfrac{\text{勾}\times\text{股}}{(\text{勾}+\text{股})}=\dfrac{a\times b}{a+b}$

圖 3－8



勾與股也。故置勾、股相乘，並勾、股除之即得容方之度也。[75]

原術文	今解
第二十八則、勾股形求容圓 設勾二十七尺，股三十六尺，弦四十五尺，求容圓？ 法曰：置勾股相乘得九百七十二尺為實，並勾、股、弦共一百零八尺除之，得九尺即容圓之半徑，倍之得一十八尺即全徑。 解曰：甲乙丙勾股形，自三角各出一線平分各角，相遇于丁。即分勾股形為甲丁乙、乙丁丙、丙丁甲三三角形，一以全形之勾為底，一以股為底，一以弦為底。各角既平分而復有一邊同線，則三形必等高。令三形各倍積，求對角之垂線本卷二十四則，一得丁戊，一得丁己，一得丁庚，三垂線必等。何也？三垂線既三形之正高，三形既等高，故垂線必等也。三線既等，其相遇處必容圓之心幾何原本云：凡圓內出三線至界而皆等者，其點必是圓心，而三線皆半徑也。然分求之如是，合求之亦必如是。若並三形之倍積為實，並三底除之，亦得容圓之半徑，與丁戊或丁己或丁庚等。夫三分形之倍積，即勾與股相乘之積也，三分形之底，	勾股形之內切圓半徑（r） $=\dfrac{a\times b}{(a+b+c)}=\dfrac{27\times36}{(27+36+45)}=9$ 全徑（$2r$） $=9\times2=18$  **圖 3－9** 證明：如圖 3－9 作∠甲、∠乙、∠丙之角平分線， 且三線交於一點丁 ∵甲丁、乙丁、丙丁爲分角線 ∴丁戊＝丁己＝丁庚 ∴丁必爲內切圓圓心， 且丁戊＝丁己＝丁庚＝內切圓半徑＝r 又▵甲乙丙 =▵甲乙丁 +▵乙丙丁 +▵甲丙丁 ⇒ 2▵甲乙丙=2(▵甲乙丁 +▵乙丙丁 +▵甲丙丁) $a\times b=a\times r+b\times r+c\times r=(a+b+c)\times r$ $\Rightarrow r=\dfrac{a\times b}{a+b+c}$

[75] 同上，頁 3016。

即勾股弦也。故置勾股相乘，並勾、股、
弦除之得容圓之半徑也。[76]

此二題與《算法統宗》上的「又勾股容方」、「勾股容圓」二題，雖題目敘述不盡相同，但所用數據與公式完全相同。《算法統宗》中「又勾股容方」題的題目爲「今有勾股王一塊長一尺二寸、濶六寸，今欲截角為方取印一顆，問方面若干？」[77]顯見的與本卷二十六題敘述不盡相同。《算法統宗》的題目表達方式與一般傳統中算書籍相同，較具生活化與實際性。而本書的題目表徵方式則與《幾何原本》相同，強調概念、公式的本體而少觸及情境。

此外就二題的「解」觀察，「勾股容方」題的證法，首先於甲丙弦上取一點丁，且令 $\frac{\text{甲丁}}{\text{丁丙}}=\frac{\text{勾}}{\text{股}}$，其次利用比例導出方邊公式，此與劉徽將二勾股形利用「出入相補」的原理，裁減合併成一個以方邊爲寬、勾股和爲長的矩形的方法、精神並不相同。再者「勾股容圓」題的證法則是先作∠甲、∠乙、∠丙之角平分線，且三線交於一點丁，而後推出丁點爲內切圓之圓心，再利用面積關係導出半徑公式，此證法與劉徽之證明亦不相同，反較類似今日中學數學的證法。再觀察其證明中先作輔助線、圖再證明的模式及所引用之概念，可明顯感覺作者受《幾何原本》影響很深。

二、容方之勾股形方邊、餘勾、餘股、全勾、全股互求

本卷 30、31、32 三題爲容方之勾股形方邊、餘勾、餘股、全勾、全股互求的問題，三題所共同的核心概念式爲「 $\text{方邊}^2=\text{餘勾}\times\text{餘股}$ 」。此概念於第 30 題作完整證明，茲就第 30 題作術文與今解之對照分析如下：

原術文	今解
第三十則、容方之勾股形以餘勾、餘股 求方邊及全勾、全股 設容方之餘勾二尺，餘股八尺， 求方邊及全勾、股？ 法曰：置餘勾、餘股相乘得一十六尺，平方開之得	$\text{方邊}=\sqrt{\text{餘勾}\times\text{餘股}}=\sqrt{2\times8}=4$ $\text{全勾}=\text{餘勾}+\text{方邊}=2+4=6$

[76] 同上，頁 3017。
[77] 原術文引自梅榮照，李兆華，《《算法統宗》校釋》下卷，頁 752。

四尺即方邊，以四尺加餘勾得六尺即全勾；以四尺加餘股得一十二尺即全股。

解曰：甲乙丙勾股形容壬己方形，自甲作甲丁線，以丙丁線聯之成乙丁直形，復于己庚、壬庚兩線引之至戊、至辛，必分乙丁直形為四形，其甲庚、庚丙同依甲丙對角線，為兩角線形。其乙庚、庚丁為兩餘形，兩餘形之容必相等。《幾何原本》云：甲丙對角線必分乙丁全形為丁甲丙、乙丙甲相等兩勾股形，亦分庚丙角線形為辛庚丙、己丙庚相等兩勾股形，亦分甲庚角線形為戊甲庚、壬庚甲相等兩勾股形，試于乙丙甲形內減去己丙庚形，于丁甲丙形內減去辛庚丙形，乙丙甲、丁甲丙兩形既等，減去之己丙庚、辛庚丙兩形復等，則所餘之甲乙庚己、甲丁庚辛兩斜方形必相等。再于甲乙庚己形內減去甲庚壬形，于甲丁庚辛形內減去戊甲庚形，兩斜方既等，減去之甲庚壬、戊甲庚兩形復等，所餘戊辛直形與壬己方形安得不等。夫甲乙丙勾股形之甲乙勾減去壬己方形之壬乙邊，餘甲壬即餘勾，丙乙股減去己乙邊，餘丙己即餘股，辛庚與餘股等，戊庚與餘勾等，則戊辛直形之容必即餘勾、餘股相乘之積。而戊辛直形又與壬己方形等，則壬己方形之容亦必餘勾、餘股相乘之積也。故置餘勾、餘股相乘，平方開之得容方邊也。[78]

全股＝餘股＋方邊＝8＋4＝12

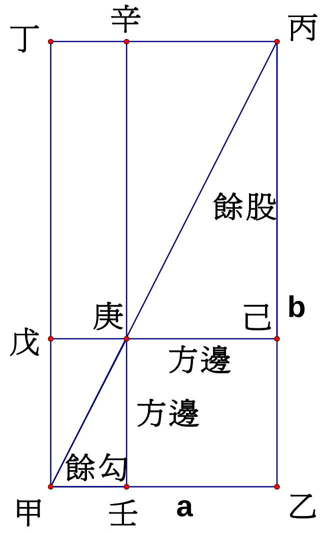


圖 3－10

證明：如圖 3－10

1. 依⊿甲乙丙作甲丙直形。
2. 延伸己庚、壬庚二線作己戊、壬辛。

同《幾何原本》1 卷 43 題證明

甲丙對角線必平分乙丁全形、庚丙角線形、甲庚角線形

即⊿丁甲丙＝⊿乙丙甲＝$\frac{1}{2}$乙丁全形

⊿辛庚丙＝⊿己丙庚＝$\frac{1}{2}$庚丙角線形

⊿戊甲庚＝⊿壬庚甲＝$\frac{1}{2}$甲庚角線形

⊿丁甲丙＝⊿乙丙甲

➔戊辛直形＋⊿辛庚丙＋⊿戊甲庚＝壬己方形＋⊿己丙庚＋⊿壬庚甲

➔戊辛直形＝壬己方形

➔餘勾×餘股＝方邊^2

➔方邊＝$\sqrt{餘勾\times餘股}$

又全勾＝甲乙＝甲壬＋壬乙＝餘勾＋方邊

全股＝乙丙＝丙己＋己乙＝餘股＋方邊

[78] 引自杜知耕，《數學鑰》卷六，頁 3018。

3.1.4. 勾股測量

本卷 33~40 題爲利用勾股術及相似三角形概念，以一表及重表測高、深、廣、遠的問題等。其中 34~37 分別爲一表測高、遠、廣、深的問題。所引用之概念及圖形表徵即爲本卷 30 題的核心概念。而 38、39 二題分別爲重表測高遠及廣深，皆利用相似三角形邊長的比例關係求解，茲就第 34 題與第 39 題作術文與今解之對照分析如下：

原術文

第三十四則、一表測高

設物不知高，距物二十五尺，立表十尺。又退行五尺，立窺表四尺。自窺表望之，物末與表末相齊成一直線。求物高？

法曰：置表距高物二十五尺為實，以窺表減表餘六尺乘之得一百五十尺。以退行五尺除之，得三十尺為表外之高，加表高共四十尺即物高。

解曰：癸丁為物高，壬子為表高，乙丑為窺表，乙丁對角線為視線，戊壬為表距高物之二十五尺，壬辛為窺表減表所餘之六尺，乙辛為退行之五尺也。甲丙一形分為四形，其辛己、戊庚為兩角線形，其甲壬、壬丙為兩餘形，兩餘形之容必相等本卷三十則。法以窺表減表以乘距高物之度，必得甲壬餘形之積。甲壬既等于壬丙，則甲壬餘形之積亦即壬丙餘形之積矣。故以退行五尺除之得庚壬。庚壬與丁戊等，丁戊則物高于表之度也。是以加表得物之全高。[79]

今解

$$物高=\frac{(表高-窺表高)\times 表物距}{退行距}+表高$$

$$=\frac{(10-4)\times 25}{5}+10=40$$

證明：如下圖 3－11

同 30 則概念

甲壬直形積 ＝ 壬丙直形積

辛壬 × 甲辛 ＝ 己壬 × 丙己

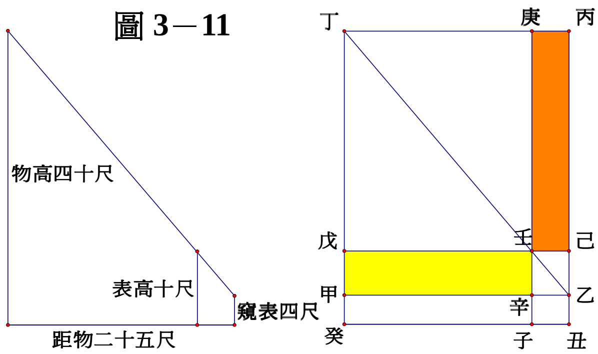
(表高－窺表高) × (表距高物)

＝(退行距) × (物高于表之度)

$$物高于表之度=\frac{(表高-窺表高)\times 表物距}{退行距}$$

$$物高=\frac{(表高-窺表高)\times 表物距}{退行距}+表高$$

圖 3－11



[79] 同上，頁 3019。

原術文

第三十八則、重表測高遠

設物不知高及遠，立表十尺，退行五尺，立窺表四尺，自窺表望之，物末與表末相齊成一直線。自表退行一十五尺，復立表十尺，又退八尺。復立窺表四尺，自窺表望之，物末亦與表末相齊成一直線。求高及遠？

法曰：置窺表減表餘六尺為實，以兩表相距一十五尺乘之（得九十尺），以前窺表距前表五尺減後窺表距後表八尺餘三尺除之，得三十尺即表外之高，加表高共四十尺即物高。又置前窺表距前表五尺為實，以兩表相距一十五尺乘之（得七十五尺），亦以兩窺表距兩表之度相減餘三尺除之，得二十五尺即物遠。

解曰：自窺表末及表末，作丙丁、甲乙兩平行線，以戊乙、戊己兩視線聯之，必成六勾股形。其丙庚戊形為甲己戊之截形，兩形之比例必等。辛己庚形亦為甲己戊之截形，兩形之比例必亦等。丙庚戊與辛己庚兩形之例既皆等于甲己戊，是辛己庚、丙庚戊兩形之比例亦等矣。壬乙丁形與丙丁戊形亦同此論。夫辛己庚形之比例既同于丙庚戊，壬乙丁形之比例既同于丙丁戊，則丙庚與辛己必若丙丁與壬乙，又丙丁與丙庚必若壬乙與辛己也。今丙丁與丙庚之較為庚丁，壬乙與辛己之較為癸乙，癸乙與庚丁兩較之比例必俱等于相當各線之比例。若是，則丙庚與辛己，戊丙與辛庚皆若庚丁與癸乙矣。法置餘表六尺為實，以十五尺乘之，三尺除之，是借癸乙與庚丁之比例，因辛庚以求丙戊也。

今解

$$物高=\frac{(表高-窺表高)\times兩表距}{(後窺表表距-前窺表表距)}+表高$$

$$=\frac{(10-4)\times15}{(8-5)}+10=40$$

$$物遠=\frac{(前窺表表距)\times兩表距}{(後窺表表距-前窺表表距)}$$

$$=\frac{5\times15}{(8-5)}=25$$

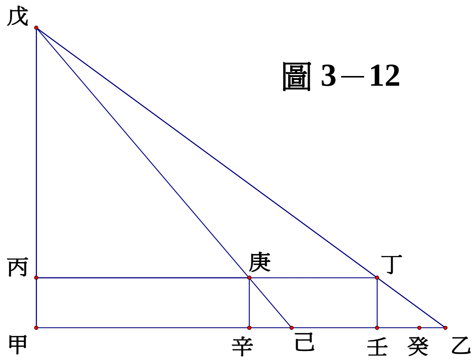


圖 3－12

證明：如圖 3－12

△丙庚戊爲△甲己戊之截形

➔△丙庚戊 ～ △甲己戊

△辛己庚爲△甲己戊之截形

➔△辛己庚 ～ △甲己戊

則 △丙庚戊 ～ △辛己庚 ，

同理 △丙丁戊 ～ △壬乙丁

則 $\frac{丙庚}{辛己}=\frac{丙戊}{辛庚}=\frac{丙丁}{壬乙}$ ……（1），

$\frac{丙丁}{丙庚}=\frac{壬乙}{辛己}$ ……（2）

由（2），則 $\frac{庚丁}{癸乙}=\frac{丙庚}{辛己}=\frac{丙戊}{辛庚}$

$$\left(\begin{array}{l}\because \frac{丙丁-丙庚}{丙庚}=\frac{壬乙-辛己}{辛己}\\ \Rightarrow \frac{庚丁}{丙庚}=\frac{癸乙}{辛己}\Rightarrow\frac{庚丁}{癸乙}=\frac{丙庚}{辛己}\end{array}\right)$$

則表外之高（戊丙）

$$=\frac{庚丁\times辛庚}{癸乙}$$

置窺表距表五尺為實，以十五尺乘之，三尺除之，是借癸乙與庚丁之比例，因辛己以求丙庚也。丙戊為表外之高，丙庚則物遠也。[80]

$$=\frac{\text{兩表距}\times(\text{表高}-\text{窺表高})}{(\text{後窺表表距}-\text{前窺表表距})}$$

物遠（甲辛）＝丙庚

$$=\frac{\text{庚丁}\times\text{辛己}}{\text{癸乙}}$$

$$=\frac{\text{兩表距}\times(\text{前窺表表距})}{(\text{後窺表表距}-\text{前窺表表距})}$$

此二題在《測量異同》與《算法統宗》上皆可找到，屬傳統中算題型。雖題目敘述不盡相同，但所用數據與公式完全相同。

3. 1. 5.　勾股章小結

經由上述分析，可發現《數學論》第六卷的勾股章有幾個特色，茲簡述如下：

（1） 經筆者比對，本卷題型及所用之公式與《算法統宗》相同的有 20 題，與《勾股義》相同的則有 18 題，與《測量異同》相同的則有 4 題，與《勾股舉隅》相同的則有 9 題。[81]題型及所用之概念雖同，但數據、敘述、證明及推演方式則不盡相同。

（2） 題目排列的順序由簡而繁、由易而難，符合數學與數學學習的邏輯性，且所蘊涵的數學概念與公式交互引用。[82]

（3） 以數學概念與公式為中心：就知識內容的安排來看，題目強調的是數學概念與公式本身的傳達，而非該題之答案或情境。可從底下二點看出：

※ 一題一公式、一公式一題，並無同一公式數個例題的情形。且與傳統中算題目相比，如《九章算術》、《算法統宗》，可發現雖題型所用之公式，甚至部份數據相同，但本書將題目的敘述改寫的更為簡單扼要，並不強調題目的實際應用與情境。

※ 本卷大部份題目所用之勾股數組皆為（6,8,10），而非《九章算術》或《算法統宗》原所載題目的勾股數組。[83]顯見題目所用之數字及答案，只不過是作者用來顯示該題數學概念與公式所借用之「傀儡」，而非主角。

（4） 受西學，尤以《幾何原本》影響很大，可從底下三點看出：

※ 「凡例」、「問題」、「法」、「解」的體例與《幾何原本》「界說」、「題」、「法」、「論」的體例類似。

[80] 同上，頁 3021。
[81] 見附錄 2：勾股互求比較表。
[82] 見附錄 1：第六卷勾股目錄。
[83] 見附錄 2：勾股互求比較表。

※ 證明仿效《幾何原本》中演繹式邏輯推理的方法。

※ 「解」的說明或證明中大量引用《幾何原本》的數學知識與概念，甚者直接採用《幾何原本》上的證明，如本卷最重要的勾股定理證明即與《幾何原本》第一卷命題 47 題的證法相同。

3.2. 方田章內容分析

本書的第一卷、第二卷爲方田章，內容主要討論各種直線類、曲線類圖形求積（含截積）及求邊長（含方邊、長、廣、斜弦、截長、截闊、圓徑、圓周、矢、弦、離徑、餘徑等等）的問題。有趣的是，與傳統《九章算術》的方田章內容安排相較，本書並無將「分數論」置於此二卷中介紹，反而將原少廣章中的開平方法、帶縱開平方法、方積求邊、圓積求徑等等方田還原之法等題目，分別置於此章的直線類、曲線類二卷中討論。由作者對此二卷知識內容安排，顯見作者有意將此章歸類爲平面幾何圖形求積與反求邊長的問題。再看第一、二卷之目錄分別爲方田直線類與曲線類，此種分類方式並非傳統中算所有，顯然是受西學的影響。

方田章二卷的題目共有 97 則，約占《數學論》全書的$\frac{2}{5}$，顯見作者對方田章的重視。其中第一卷爲直線類題目，共有 57 則。其中由邊長求面積的題目有 11 則，反求邊長的問題則有 46 則。至於第二卷曲線類題目則有 40 則。其中曲線類圖形求面積的題目有 15 則，而反求邊徑的問題則有 24 則。二卷並分別於卷首設凡例 14 及 6 則，用以介紹該卷題目所需使用到的圖形概念、定義及名詞。茲分別介紹如下。

3.2.1. 凡例

此二卷於卷首分別設凡例 14 則及 6 則，主要介紹有關方田章所需用到的直線類、曲線類的圖形概念、定義及名詞，且本書在介紹時大部份皆附有圖形以供對照。如第一卷第一則凡例的術文，「甲乙丙丁方形則指第一圖，……，或錯舉二字謂第一圖為甲丁或乙丙形。」便清楚指出二種方形的表示法。[84]而「指第一圖左下角曰『甲角』，右下角曰『乙角』，……，舉一字不能別為某形某角則連用三字，曰『寅癸丑角』或『壬癸子角』，以中一字為所指之角。」[85]也明白交代二種「角」的表示法，顯見此表示法與現在常用的表示法相同。

---

[84] 引自杜知耕，《數學論》卷一凡例，頁 2877。二種方形的表示法爲四頂點四字表示法及對角線頂點二字表示法，此處的四字表示法與現代四字的表示法略有不同，四字排列並無按順時針或逆時針之順序。見圖 3－13《數學論》卷一凡例一則附圖，此圖爲筆者仿原文本所畫。

[85] 引自杜知耕，《數學論》卷一凡例，頁 2877。

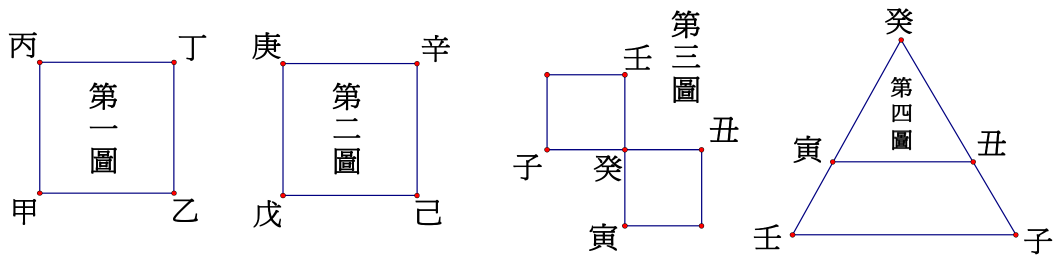


圖 3－13《數學鑰》卷一凡例一則附圖

又如第一卷第三則凡例的術文，「形邊之界曰『線』，線之縱者曰『長』或曰『高』；衡者曰『濶』或曰『廣』；在下者或曰『底』；斜對兩角者曰『弦』。」詳細的點出了「線」、「長」、「高」、「濶」、「廣」、「底」、「弦」之定義。[86]而如第二卷第一則凡例「圜必中規，不中規者不得為圜形，形界曲線曰『周』如甲乙丙丁線，過心直線曰『徑』如丁丙線。」[87]第五則凡例「割甲乙丙丁圜之一分為甲乙丙弧矢形，甲乙丙曲線曰『背』，甲乙衡線曰『弦』，丙丁縱線曰『矢』，丙己曰『全徑』，丁己曰『餘徑』，丁戊曰『離徑』，丙戊曰『半徑』。」[88]亦以圖文對照之模式，清楚明白的介紹了圓相關元素的名詞概念。

此外，觀察第一卷凡例第一則術文前幾句話，「數非圖不明，圖非手指不明，圖用甲、乙等字作誌者代指也。作誌必用甲、乙等字者，取其筆畫省而不亂正文也。甲、乙等字盡，則用子、丑等字，又盡，則用乾、坤等字，……」[89]作者說明了欲正確研究數量的關係，需利用圖形加以解釋才能使之明白，而爲清楚解釋圖形一般又需要輔以「手指」明確的指示。因此爲能明白的理解數量與圖形的關係，圖形一般常以甲、乙、……等字作記號以代替手指的指示，以「取其筆畫省而不亂正文也」。[90]除此之外，筆者認爲「數非圖不明」這幾個字，更可說是本書書寫的精神所在，且明確點出作者杜知耕「形數結合」、「形數合一」的數學思想與研究方法。

再就第一卷凡例第二則術文與附圖分析：

[86] 同上，頁 2878。
[87] 引自杜知耕，《數學鑰》卷二凡例，頁 2905。
[88] 同上。
[89] 引自杜知耕，《數學鑰》卷一凡例，頁 2877。
[90] 同上。

原術文

四邊皆等，四角中矩者曰「方形」，如第一圖。

四角中矩，四邊兩兩相等者曰「直形」，如第二圖。

或四邊等或兩邊等，而四角俱不中矩者曰「象目形」，如第三圖。

四邊俱不等，兩角中矩兩角不中矩者曰「斜方形」，如第四圖。

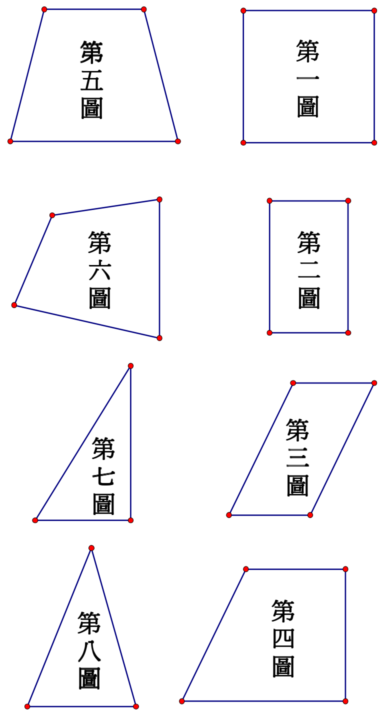
角不中矩，兩邊相等者曰「梯形」，如第五圖。

邊及角俱不等者曰「無法形」，如第六圖。

三邊形有一方角者甲為方角曰「勾股形」，如第七圖。

無方角者曰「三角形」，如第八圖。[91]

圖 3－14



可看出此則凡例給出了第一卷後續題目所需使用各種四邊形及三角形的定義，但部份圖形的名稱與中國傳統不同，[92]且似乎並未定義所謂的「象目形」，此圖形的名稱應爲西學所傳入。此外第三圖圖形及術文「或四邊等或兩邊等，而四角俱不中矩者」，[93]此圖形應爲菱形或平行四邊形，但顯見作者並未清楚說明所謂兩邊等是指對邊相等。而定義「梯形」的術文「角不中矩，兩邊相等者曰『梯形』。」未說明所謂兩邊等指的是那兩邊相等，也未強調需一對邊平行。因此，史家高宏林認爲，此兩定義對平行四邊形和梯形來說顯然不十分準確。[94]

再就凡例第五則、第九則、第十則與《幾何原本》第一卷的界說做比較，二者術文如下表所示：

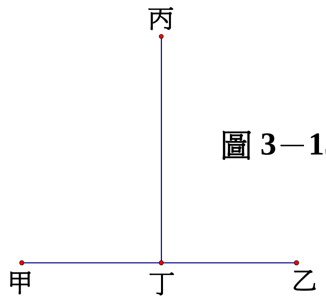
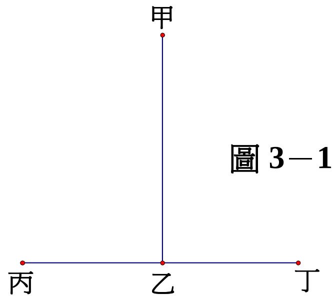
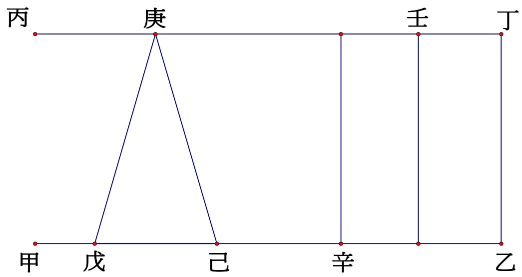
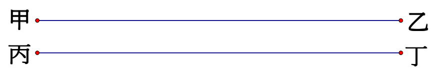
---

[91] 同上，頁 2878。此外「方形」即今正方形，「直形」即今矩形，「象目形」即今菱形或平行四邊形，「斜方形」即有二角爲直角之梯形，「梯形」即今等腰梯形。

[92] 《九章算術》中，稱第四圖的斜方形爲邪田；稱第五圖的等腰梯形爲箕田；稱第八圖的三角形爲圭田。而《算法統宗》中，則第四圖的斜方形爲斜形；稱第五圖的等腰梯形爲梯形；稱第八圖的三角形爲圭形。

[93] 引自杜知耕，《數學鑰》卷一凡例，頁 2878。

[94] 參見高宏林，〈杜知耕與《數學鑰》〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系－第七卷》，頁 210。

<table>
<tr><th>則</th><th>《數學鑰》卷一凡例[95]</th><th>界</th><th>《幾何原本》第一卷界說[96]</th></tr>
<tr><td>5</td><td>線之作誌處曰「點」。</td><td>3</td><td>凡線之界是點凡線有界者兩界必是點。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9</td><td>甲乙衡線上作丙丁縱線，而丙丁乙與丙丁甲兩角俱方角，則丙丁為甲乙線上之垂線。</td><td rowspan="2">10</td><td>直線垂於橫線之上，若兩角等必兩成直角，而直線下垂者謂之橫線之垂線。…
若甲乙線至丙丁上，則乙之左右作兩角相等為直角，而甲乙為垂線。</td></tr>
<tr><td>圖 3—15—1</td><td>圖 3—15—2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10</td><td>兩直線引至無窮，不相離亦不相遇，曰『平行線』。平行線內任作幾形皆等高。……兩形之高必相等。凡兩形等高者，則曰『同在平行線內』。</td><td rowspan="2">34</td><td>兩直線於同面，行至無窮，不相離亦不相遠而不得相遇為平行線。</td></tr>
<tr><td>圖 3—15—3</td><td>圖 3—15—4</td></tr>
</table>

可看出第五則凡例與《幾何原本》第一卷界說第三界似乎有異曲同工之妙。而第九則、十則凡例似乎是《幾何原本》第一卷界說第十界與第三十四界的在經過作者「融會貫通」之後的改寫。但同樣的，比較兩邊的對平行線的定義可發現，

[95] 引自杜知耕，《數學鑰》卷一凡例，頁 2878~2879。
[96] 引自《幾何原本》第一卷，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷四（鄭州：河南教育出版社，1933 年）。

杜知耕在定義平行線時並無強調兩直線需於同面，似乎並無考慮到兩直線在不同平面的情況，可能互爲歪斜線的情形。或其認爲所附圖形已明白表示。根據筆者觀察，此種情形可以說是杜知耕書寫時的特色，他習慣性的將所附圖形視爲定義的一部份，而並未在文字敘述上多加著墨。這或可當成他「形數結合」、「形數合一」的數學思想與研究方法的另一「明證」。

3. 2. 2.　直線類圖形求積

第一卷共有題目 57 則，其中直線類圖形求面積的題目有 11 則，分別爲第 1~9 則、32 及 33 則，其中 2 至 8 則依序爲直形、方形、勾股形、三角形、斜方形、梯形、象目形以邊長求積，第 9 則「諸直線形求積」爲 1~8 則的總整理及應用。至於第 32、33 則題目分別是以周長求方田積及方環積，所列之公式皆正確無誤，且除第 9 則外皆有圖文的證明或簡略的說明，茲分別簡介如下，並從中選數例作術文與今解之對照分析：

一則、實積求畝：除介紹 1 步 ＝ 5 尺、1 畝 ＝ 240 步等中國傳統長度及面積的單位換算，並定義單位方形面積「如甲至乙濶一步即五尺，餘三邊各與甲乙等，則甲丙方形為積一步。」以作爲第 2 則直形求積的基礎。[97]

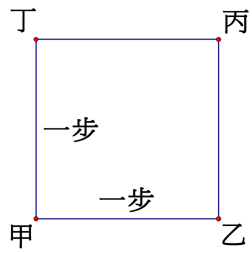


圖 3－16

二則、直形求積：利用單位方形積及直田長、濶與單位長之倍數關係求出

直形積公式＝長 × 濶

三則、方形求積：利用直田積公式及結果推特例方形積公式＝邊長 × 邊長

四則、勾股求積：利用勾股形面積＝$\frac{1}{2}$×直田積推導出

勾股積＝ (股 × 勾) × $\frac{1}{2}$ ＝ 股 × 半勾＝ 半股 × 勾。其證法如下：

原術文	今解
解曰：勾股形當等高等濶直形之半。如甲乙丙勾股形，另作丁己直形與之等高謂丁庚與甲丙等、等濶謂丁戊與甲乙等。以庚戊線分之，則成丁戊庚、庚己戊兩勾股形，皆與甲乙丙勾股形等。夫丁己一直形當甲乙丙	【法 1 證明】如圖 3－17－2 作與△甲乙丙等高、等濶之丁已直形

97 引自杜知耕，《數學論》卷一，頁 2882。

勾股形二，而甲乙丙勾股形不當丁己直形之半乎？法以勾乘股所得者，丁己直形積也。故半之得勾股積。

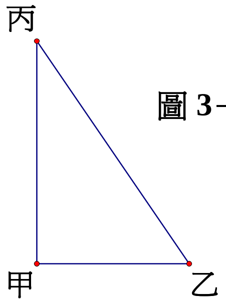


圖 3－17－1

解曰：丁己直形再以壬辛線中分之，成丁壬、辛己兩分形。法以半勾乘股所得即分形積也。勾股既為丁己直形之半，而分形亦為丁己直形之半，故分形積即勾股積也。[98]

$\triangle$甲乙丙 $=\triangle$丁戊庚 $=\triangle$庚己戊 $=\frac{1}{2}$丁己直形

$\Rightarrow\triangle$甲乙丙 $=$ (丁庚 $\times$ 丁戊) $\times\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\triangle$甲乙丙 $=$ (股 $\times$ 勾) $\times\frac{1}{2}$

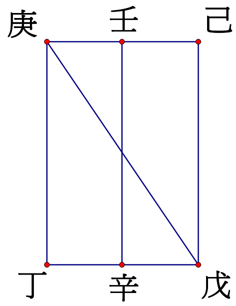


圖 3－17－2

【法 1 證明】如圖 3－17－2

作壬辛線平分丁己直形

$\triangle$甲乙丙 $=\triangle$丁戊庚 $=\frac{1}{2}$丁己直形 $=$ 丁壬直形

$\Rightarrow\triangle$甲乙丙 $=$ (丁庚 $\times$ 丁辛)

$\Rightarrow\triangle$甲乙丙 $=$ (股 $\times$ 半勾)

五則、三角形求積：將三角形分成兩勾股形，利用四則勾股求積之概念，導出三角形積 ＝（中長 × 底濶）× $\frac{1}{2}$。其證法如下：

原術文	今解
解曰：甲乙丙三角形依底線作甲丁直形。從角以丙己線分之，則三角形內成甲己丙、乙己丙兩勾股形。直形內成甲丙、己丁兩分形。從前解推之，甲己丙勾股形當甲丙分形之半，乙己丙勾股形當己丁直形之半。兩勾股形既當兩分形之半，而三角全形不為甲丁全形之半乎？故求積之法與勾股同也。或兩邊等	證明：如圖 3－18 1.依△甲乙丙之底線及頂點丙作甲丁直形 2.作丙己⊥甲乙 則 $\triangle$甲乙丙 $=\triangle$甲己丙 $+$ $\triangle$乙己丙 而甲丁直形=甲丙直形+己丁直形 由前則

98 同上，頁 2883。

如第一圖，或三邊等如第二圖，或三邊俱不等如第三圖，法皆同。[99]

$$
\begin{aligned}
&\triangle 甲乙丙 = \triangle 甲己丙 + \triangle 乙己丙 \\
&= \frac{1}{2} 甲丙直形 + \frac{1}{2} 己丁直形 \\
&= \frac{1}{2}(甲丙直形 + 己丁直形) \\
&= \frac{1}{2} 甲丁直形 = (中長 \times 底闊) \times \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

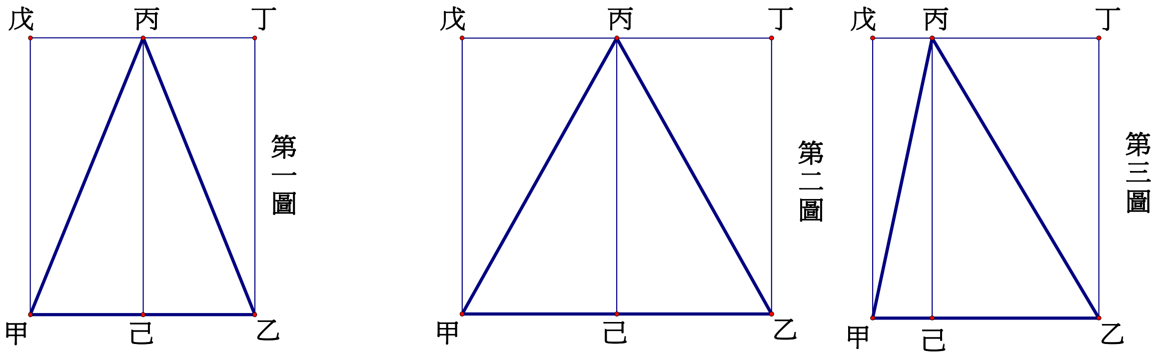


圖 3－18

六則、斜方形求積：將斜方形分成直形與勾股形，利用直形求積及勾股求積之概念，導出斜方形積 ＝ 長 ×（上濶＋下濶）× $\frac{1}{2}$。

其證明如下：

原術文	今解
解曰：甲乙丁庚斜方形減去辛丁直形，所餘必甲庚辛勾股形，勾股形既為等高、等濶直形之半本卷四則，則己庚直形必與甲庚辛勾股形等。又己庚直形與辛丁直形並亦必與甲庚辛勾股形與辛丁直形並等。法並兩濶、折半者，乙己之度也。以乙己乘丁乙所得，乃己丁直形也。而己丁直形即己庚、辛丁兩形並也。安得不與甲乙丁庚斜方形等乎。[100]	證明： 如圖 3－19： 甲乙丁庚斜方形積 ＝辛丁直形積＋△甲庚辛積 ＝辛丁直形積＋己庚直形積 ＝己丁直形積 ＝ 乙己 × 丁己 ＝（上濶＋下濶）× $\frac{1}{2}$ × 長

99 同上。
100 同上。

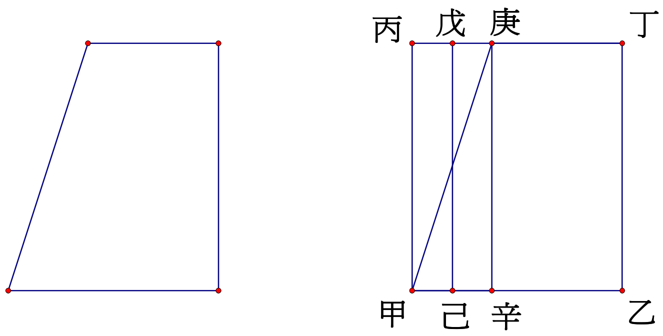


圖 3－19

七則、梯形求積：同上則概念，將等腰梯形分成直形與二勾股形，利用直形求積及勾股求積之概念，推導出

$$梯形積 = 長 \times（上濶+下濶）\times \frac{1}{2}。$$

八則、象目形求積：利用《幾何原本》第一卷第三十五題後論之證法，證出

象目形甲乙丙丁積＝甲己直形積＝正長 × 濶。

其證法如下：

原術文	今解
解曰：《幾何原本》云：「甲乙丙丁象目形，甲戊為正長，自乙作乙己線與甲戊平行，次于丁丙線引長之至戊，成甲乙己戊、甲乙丁丙兩形，在平行線內等高即在平行線內而同底等濶即同底，則兩形必相等。」何也？ 甲戊、乙己兩線既平行，則戊己必與甲乙等。而丙丁元等於于甲乙，則丙丁與戊己必亦等。丙丁既與甲乙等，則甲丙、乙丁兩線必平行而亦相等。因顯甲丙戊、乙丁己兩三角形亦等。于兩形內每減一己丙庚三角形，所餘甲庚己戊、庚乙丙丁兩無法	證明：如圖 3－20 1.甲乙丙丁象目形，自乙作乙己 ∥ 甲戊 2.連接丁戊線段 對直形甲乙己戊、象目形甲乙丁丙 ∵ 甲戊 ∥ 乙己　　∴戊己＝甲乙 又 丙丁＝甲乙　　∴丙丁＝戊己 且 甲丙＝乙丁，甲丙 ∥ 乙丁 ∴△甲丙戊≅△乙丁己 △甲丙戊積－△己丙庚積 ＝△乙丁己積－△己丙庚積 四邊形甲庚乙戊積＝四邊形庚乙丙丁積 四邊形甲庚乙戊積＋△甲庚乙積

101 同上，頁 2884。

四邊形亦等。次于兩無法形，每加一甲庚乙三角形，則成甲乙丙丁、甲乙戊己兩形。安得不等？法以濶乘正長，得甲己直形之積，即甲乙丙丁象目形之積。[101]

＝四邊形庚乙丙丁積＋△甲庚乙積
甲己直形積＝甲乙丙丁象目形積
甲乙丙丁象目形積＝甲戊 × 甲乙
＝正長 × 濶

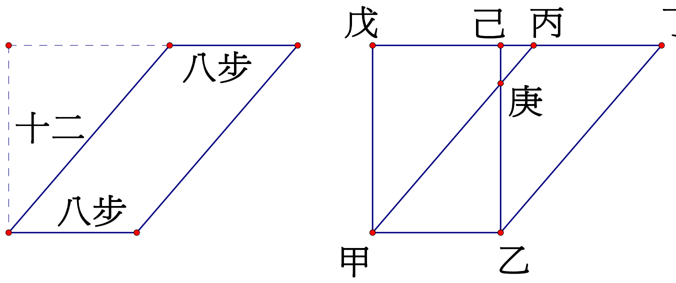


圖 3－20

九則、諸直線形求積：如下附圖 3－21，[102]列出六種圖形爲例，同前幾則之作法，將原圖形裁成方形、直形、三角形、勾股形等易算的圖形，而後再求其面積。而後以「其餘千形萬狀，凡屬直線邊者皆依方、直、三角、勾股裁之。」作爲諸直線形求積的依歸。[103]此與程大位強調量田「不必执泥，在于臨場機變。」主張用截盈補虛的方法把田湊補成方、直、圭、勾股、梭等形來計算。[104]所用的概念並不相同。

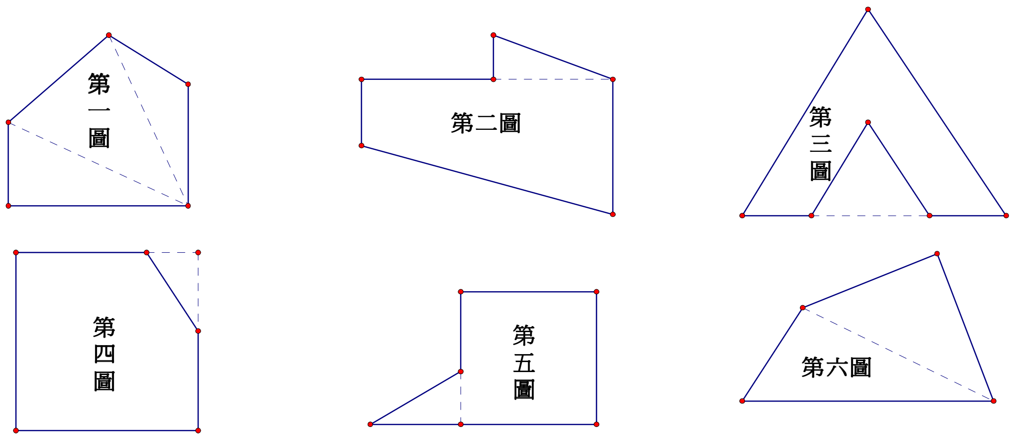


圖 3－21

三十二則、方周求積：「假如一步以四面計之，則周四步，自乘得一十六步。

[102] 同上，頁 2885。
[103] 同上。
[104] 參見自郭世榮，《《算法統宗》導讀》，頁 167。

是周自乘之十六步止得實積一步，故以十六為方法也。」[105]作者利用單位方形面積與周長 ^{2} 的比值，推出

$$方形積=\frac{(方形周長)^2}{16}$$

。並以二圖比較強調「此法止可施于方田，至于直田則不可用。」[106]

三十三則、方環以周求積：呈三十二則，再利用「方內減方法」，[107]推導出

$$方環積=\frac{(方田外周長)^2-(方田內周長)^2}{16}$$

。並指出「如知環濶則用梯田法，置兩周相並，折半，以濶乘之即得環積。」[108]

從上述幾則的「解」可明顯的看出下列特色：

1、證明仿效《幾何原本》中演繹式邏輯推理的方法，且部份證法，如第 8 則幾乎與《幾何原本》的證法一樣。

2、題目的編排順序符合數學與數學學習的邏輯性：1~9 題的編排順序爲先定單位方形積，之後推出直形積公式，而後再利用直形積公式導出方形積、勾股積，進而利用直形積及勾股積推導出三角形積、斜方形積、梯形積。第 9 則再以「其餘千形萬狀，凡屬直線邊者皆依方、直、三角、勾股裁之。」作爲總結及應用。而第 32、33 則也是先利用單位方形積與周長平方的比值推出以周長求積之法，再進而推導出方環以周長求積公式。其思路之進程不僅符合數學邏輯性，循序漸近的編排模式，亦有利於學生學習基模之建立。

3、證法與《算法統宗》上證法並不相同：試觀察《算法統宗》上的「圭形演段圖」、「梯形演段圖」可發現其證法多採用劉徽「出入相補」、「截盈補虛」的原理將原圖形湊補成方、直、圭、勾股、梭等形來計算。與本卷上的解法，只將圖形裁減成直形、勾股形以求積有明顯的不同。筆者認爲，就數學知識與技巧面向看，劉徽之作法似乎較爲精彩有深度。但就數學學習面向來看，杜知耕之作法較爲有結構，且淺顯易懂而利於學生之學習。

105 引自杜知耕，《數學論》第一卷，頁 2893。
106 同上。
107 同上。
108 同上。

3.2.3. 直線類圖形求邊

第一卷其餘問題爲直線類圖形反求邊長的題目，含開方、求長、廣、斜弦、截長、截闊等，茲分別介紹如下：

一、開方問題

本卷第 10 則的「積求方邊」即開平方的問題，與傳統不同的地方，作者並未將此類問題歸於少廣章中。[109]作者在此題中利用「**方田積三萬六千一百步，求方邊？**」、「**方田積七萬一千八百二十四步，求方邊？**」二題分別介紹爲二商與三商的開方法，[110]其方法如下：

＊二商開方法：

步驟	左	中	右	原術文[111]
1		36100		置積于中為實，
2	100 （初商）	36100	100 （方法）	初商一百步于實左，亦置一百步于實右為方法。
3		36100－100×100 ＝26100		左右對呼，除實一萬步。
4		26100	2×100＝200 （廉法）	倍方法為廉法，
5	90 （次商）	26100	90 （隅法）	次商九十步于左初商之次，亦置九十步于右廉法之次為隅法。
6		26100－90×200 ＝8100		左次商與廉法對呼，除實一萬八千步。
7		8100－90×90＝0		以左次商與隅法對呼，除實八千一百步恰盡。

109《九章算術》、《算法統宗》皆是將開平方法則（含方積求方邊，圓積求圓徑）等問題置於少廣章中。

110 參見杜知耕，《數學論》卷一，頁 2885。

111 同上。

8	190	100(初商)＋90(次商)＝190		左得一百九十步即所求方邊之數。[112]

＊三商開方法：

步驟	左	中	右	原術文[113]
1		71824		置積于中為實。
2	200（初商）	71824	200（方法）	初商二百步于實左，亦置二百步于實右為方法。
3		71824－200×200＝31824		左右對呼，除實四萬步。
4		31824	2×200＝400（廉法 1）	倍方法為廉法。
5	60（次商）	31824	60（隅法 1）	次商六十步于左初商之次，亦置六十步于右廉法之次為隅法。
6		31824－60×400＝7824		左次商與廉法對呼，除實二萬四千步。
7		7824－60×60＝4224		以左次商與隅法對呼，除實三千六百步。
8		4224	2×60＋400＝520（廉法 2）	又倍次商，並右廉法，復為廉法。
9	8（三商）	4224	8（隅法 2）	三商八步于左初商、次商之次，亦置八步于右廉法之次，復為隅法。
10		4224－8×520＝64		以三商與廉法對呼除實。
11		64－8×8＝0		以三商與隅法對呼，除實六十四步，恰盡。

112 同上。
113 同上，頁 2886。

12	268	200(初商)＋60(次商)＋8(三商)＝268		左初、次、三三商，共得二百六十八步即所求方邊之數。

至於二商、三商無法開盡的題目，作者則在三商開方法證明中明白指出「初商、次商不能盡，故三商之。如三商又不盡，則四商、五商倣此。」[114]此外根據筆者比對的結果，基本上作者所使用的開方法應爲《算法統宗》上的商除開平方法。且此則第二題的「又設方田積七萬一千八百二十四步，求方邊？……」與《算法統宗》上的「今有方田積七萬一千八百二十四步，問平方一面若干？……」的數字與解法幾乎相同。且杜知耕證明所附上的圖，[115]也與《算法統宗》上所附的「一方四廉兩隅演段圖」十分類似。[116]顯見杜知耕之證法與精神皆符合《九章算術》劉徽注的原意。

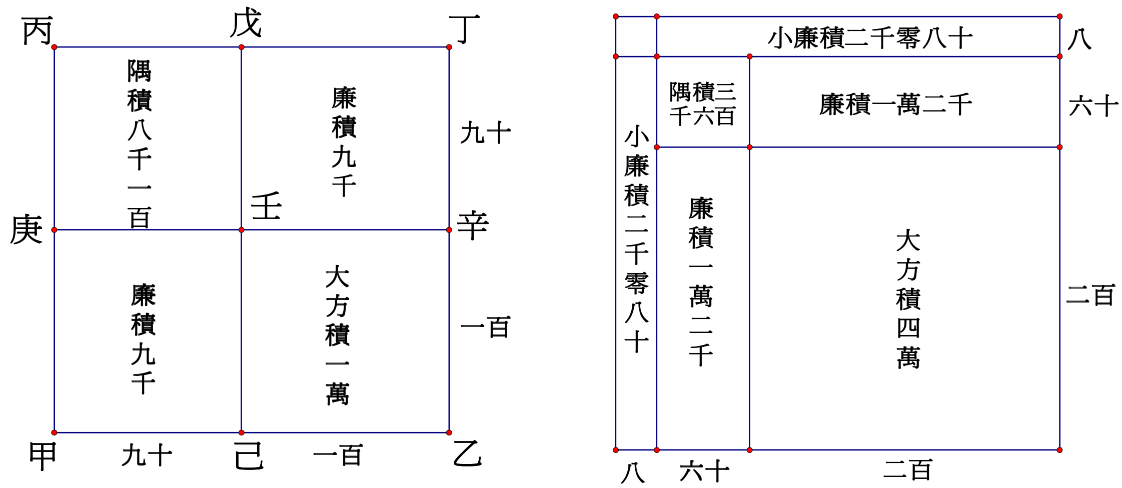


圖 3－22 《數學鑰》開平方圖

此外，與直線類圖形求積所觀察的結果相同，作者在題目順序的編排上一直是符合數學邏輯性與一定的數學學習脈絡。在介紹完開方法後，本卷接下來第 11 則的方邊求斜弦、第 12 則的斜弦求方邊、第 13 則的直積求長與濶：利用直形積與長濶差求長濶和，再求長與濶、第 16 則的直形長、濶求弦、第 17 則的直形濶、弦求長等等共 25 則均需利用開平方的方法、技巧。[117]如：第 18 則直形長、

[114] 同上，頁 2886。
[115] 圖 3－22《數學鑰》開平方圖爲筆者仿《數學鑰》原圖所畫，參見《數學鑰》卷一，頁 2886。
[116] 此圖爲《詳解九章算術》少廣章第十四題圖解，參見《永樂大典》卷 16344。
[117] 詳見附錄 3：第一卷方田章直線類目錄。

弦求濶的公式爲：濶＝$a=\sqrt{c^2-b^2}$；第 53 則梯形截勾股的公式爲：所截勾股形截闊＝$\sqrt{(勾股截積\times 2)\times\frac{(大邊元闊-小邊元闊)}{2}\div 元長}$ 等等。茲就第 11 則的方邊求斜弦與第 13 則的直積求長與濶即是帶縱開平方法，茲分析如下：

原術文

第十一則、方邊求斜率

設方田方五十步，求弦？

法曰：置方數自乘(得二千五百步)，倍之(得五千步)，平方開之(本卷十則)，得七十步零七分有奇，即所求。

解曰：甲乙丙丁方形作甲丁、丙乙弦線，次作己庚辛壬方形，令方邊與甲丁方形之弦線等，則庚壬方形必倍大于甲丁方形，何也？甲丁形內丁戊丙、丙戊甲、甲戊乙、乙戊丁三角形四，是四三角形當中一甲丁方形也，形外丁丙己、乙丁壬、甲乙辛、丙甲庚三角形亦四，各與甲丁形內四三角形等。是形外四三角形又當一甲丁方形矣。因知斜弦自乘之方形(即庚壬方形)，倍大于方邊自乘之方形(即甲丁方形)。法置方邊自乘即甲丁方積也。倍之即庚壬方積也。平方開之得庚壬方形之邊，即得甲丁方形之弦也。[118]

今解

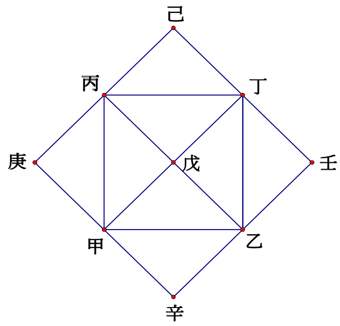


圖 3－23

斜弦(對角線)長

$=\sqrt{(方邊長)^2\times 2}$

$=\sqrt{50^2\times 2}$ ＝70.7⋯

證明：如附圖 3－23

1. 連接甲丁、丙乙弦線
2. 以甲丁爲邊長作己庚辛壬方形

∵ △丁戊丙 ＝ △丁己丙，

△丙戊甲 ＝ △丙庚甲，

△甲戊乙 ＝ △甲辛乙，

△乙戊丁 ＝ △乙壬丁

∴ 庚壬方形積 ＝ 2 × 甲丁方形積

$$(甲丁)^2=2\times(甲丙)^2$$
$$\Rightarrow 弦^2=2\times(方邊)^2$$
$$\Rightarrow 弦=\sqrt{2\times(方邊)^2}$$

此題的證法並未採用第 16 則直形長濶求弦的證明模式，直接寫「此即勾股

[118] 引自杜知耕，《數學鑰》卷一，頁 2887。

求弦六卷一則。」而是採用《算法統宗》上收入楊輝的「方求斜法」，所用的圖形也與《算法統宗》上的「方斜演段圖」相類似。[119]

原術文	今解
第十三則、直積求長與濶即帶縱開平方	令直形（即長方形）濶＝a，長＝b， 直形積＝$A=a\times b$
設直田積九百七十二步，長濶差九步，求長與濶？	則長濶和：$(a+b)=\sqrt{4\times A+(b-a)^2}$
法曰：置積四因之得三千八百八十八步，又長濶差自	$=\sqrt{4\times 972+9^2}=63$
乘得八十一步，兩數並共三千九百六十九步，平方開之得六十	長：$b=[(a+b)+(b-a)]\times\frac{1}{2}$
三步，加長濶差共七十二步折半得三十六步即	$=[63+9]\times\frac{1}{2}=36$
長，以長濶差減長餘二十七步即濶。	濶：$a=b-(b-a)=36-9=27$
解曰：一線任兩分之，兩分線矩內形四及兩分線之較線上方形一並，與元線上方形等。如圖，甲乙線兩分于丙，丙子、庚癸、己壬、辛丑四線各與乙丙等，庚子、己癸、辛壬、丙丑四線各與甲丙等，則丙庚、庚己、己辛、辛丙四形必兩分線矩內形也，辛丑既等于丙乙，壬辛又等于甲丙，則丑壬必兩分線之較線。壬癸、癸子、子丑又各等于丑壬，則癸丑形必較線上方形矣。甲乙元線上方形不與五形並等乎？直田積即兩分線矩內形也。四因之者，矩內形四也。長濶差自乘即較線上方形也。五形並，等于元線上方形，故平方開之得甲乙元線，即長濶相和之度也開方所得之六十三步。長濶和增	證明：如圖 3－24 甲乙線上方形（即甲戊方形） ＝甲子直形＋丙辛直形＋壬戊直形 ＋庚乙直形＋壬子方形 ＝4 ×甲子直形（即原直形） ＋壬子方形（即長、濶差線上方形） $(a+b)^2=4\times A+(b-a)^2$ $\Rightarrow$甲乙長:$(a+b)=\sqrt{4\times A+(b-a)^2}$ 長：$b=[(a+b)+(b-a)]\times\frac{1}{2}$ 濶：$a=b-(b-a)$

119 楊輝的「方求斜法」、「方斜演段圖」參見梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 258。

120 引自杜知耕，《數學論》卷一，頁 2887。

一長濶差即兩長。兩長折半，非一長而何？以長濶差減長，非濶而何？[120]

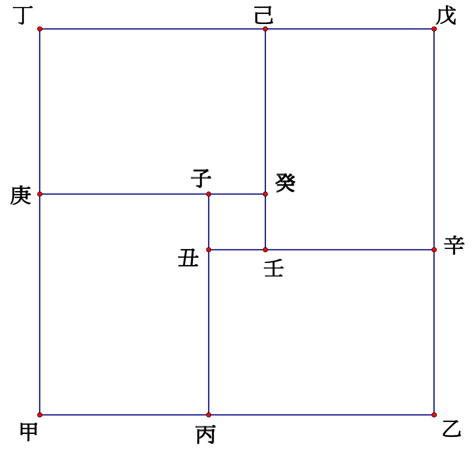


圖 3－24

此題的題目名稱「直積求長與濶即帶縱開平方」，[121]雖有所謂「即帶縱開平方」一詞，但從解法可看出，作者有關帶縱開平方問題並無使用《算法統宗》上所用的帶縱開平方法，而是借 $(a+b)=\sqrt{4\times ab+(b-a)^2}=\sqrt{4\times A+(b-a)^2}$ 的公式，利用長濶積與長濶差先求長濶和，再求長與濶。

二、勾股章概念應用問題

觀察本卷「解」可知，本卷題目的證明大量的引用卷六勾股章的數學概念、公式及結果。[122]首先作者在「解」直接寫明與勾股章的問題證明同的問題計有第 16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、30 則，共十二題，其寫法如下，茲列舉數例說明之：

第十九則、直形長及弦濶差求濶

設直田長三十六步，弦濶差一十八步，求濶？

法曰：長與弦濶差各自乘長得一千二百九十六步弦濶差得三百二十四步，兩數相減餘九百七十二步，折半得四百八十六步，以弦濶差為法除之得二十七步即所求。

解曰：此即股與勾弦較求勾六卷十四則。[123]

---

[121] 同上。
[122] 詳見附錄 3：第一卷方田章直線類目錄。
[123] 引自杜知耕，《數學鑰》卷一，頁 2889。

二十五則、直形長弦和及濶弦和求長與濶

設直田弦長和八十一步，濶弦和七十二步，求長與濶？

法曰：置長弦和以濶弦和乘之得五千八百三十二步，倍之得一萬一千六百六十四步，平方開之得一百零八步，與長弦和相減餘二十七步即濶，與濶弦和相減餘三十六步即長。

解曰：此即勾弦和、股弦和求勾與股六卷十三則。[124]

二十六則

直形長弦差及濶弦差求長與濶

設直田長弦差九步，濶弦差一十八步，求長與濶？

法曰：置長弦差以濶弦差乘之得一百六十二步，倍之得三百二十四步，平方開之得一十八步，加濶弦差得三十六步即長，加長弦差得二十七步即濶。

解曰：此即勾弦較、股弦較求勾與股六卷二十則。[125]

其次，作者在「解」中，明白標記其證明引用勾股章中問題的數學公式或概念的分別是第 29 則「兩邊等之三角形求對角之垂線」：引用 6 卷 2 則勾、弦求股法。第 31 則「不等邊而無方角之三角形求對角之垂線」：引用 6 卷 1 則「弦上方形必與股、勾上兩方形並等」的概念及 6 卷 2 則勾、弦求股法。茲就第 31 則作術文與今解之對照分析如下：

原術文	今解
第三十一則	如圖 3－25
不等邊而無方角之三角形求對角之垂線	乙丙＝a，甲丙＝b，甲乙＝c，
設三角田底濶一十五步，乙丙邊八步，甲丙邊十步，求中長？	乙丁＝d，甲丁＝e
法曰：置乙丙、甲丙二邊各自乘乙丙得六十四步甲丙得一百步，兩數相減餘三十六步為實，以底除之得二度四分，以減底餘一十二步六分，折半得六步三分即乙丁之度，以下勾弦求股法，又自	則甲己＝$(e-d)=\dfrac{b^2-a^2}{c}$ $=\dfrac{10^2-8^2}{15}=2.4$ 乙丁＝$d=\dfrac{c-(e-d)}{2}$

[124] 同上，頁 2890。
[125] 同上。

乘得三十九步六分九釐，另置乙丙自乘得六十四步，兩數相減餘二十四步三分一釐，平方開之得四步九分三釐有奇即所求。

解曰：甲乙丙三角形，丁為對角點，另作庚辛為乙丙邊上方，壬癸為甲乙邊上方，壬癸大于庚辛之較為卯子丑磬折形，若移丑于寅則成卯子寅直形，又作辰己為丁乙上方，午未為甲丁上方，午未大于辰己之較為申酉戌磬折形，若移戌于亥則成申酉亥直形，申酉亥與卯子寅兩直形必相等，何也？甲乙丙三角形以丙丁線分之則成丁乙丙、丁甲丙兩勾股形，既皆勾股形則丙乙弦上方形必與丙丁股、乙丁勾上兩方形並等，甲丙弦上方形必與丙丁股、甲丁勾上兩方形並等六卷一則，從此推之則甲丙上方形大于丙乙上方形之容，必與丙丁、甲丁上兩方形大于丙丁、乙丁上兩方形之容等。試減去同用之丙丁上方形，則甲丙上方形大于乙丙上方形之卯子寅直形與甲丁上方形大于乙丁上方形之申酉亥直形必相等矣。法以乙丙、甲丙上兩方形相減，餘即卯子寅直形之容，亦即申酉亥直形之容也，夫申酉亥直形以甲乙底為長以甲丁、乙丁兩線並為長即以甲乙全線為長以甲丁、乙丁之較線甲己為濶者也，故以甲乙底除之得甲己，甲己既為甲丁、乙丁之較線，于甲乙線減去甲己則己

$$=\frac{15-2.4}{2}=6.3$$

則對角之垂線長

$$=\sqrt{a^2-d^2}=\sqrt{8^2-6.3^2}=4.93...$$

證明：

以乙丙（a）爲邊長作庚辛方形，

以甲乙（b）爲邊長作壬癸方形

則卯子丑磬折形＝壬癸方形－庚辛方形

$=b^2-a^2$

又卯子寅直形＝卯子丑磬折形＝b^2-a^2

以丁乙（d）爲邊長作辰己方形，

以甲丁（e）爲邊長作午未方形

則申酉戊磬折形＝午未方形－辰己方形

$=e^2-d^2$

又申酉戊磬折形＝申酉亥直形

$e^2-d^2=(e+d)\times(e-d)=c\times(e-d)$

△甲乙丙

＝勾股形丁甲丙＋勾股形丁乙丙

甲丙上方形（b^2）

＝甲丁上方形（e^2）＋丙丁上方形

乙丙上方形（a^2）

＝乙丁上方形（d^2）＋丙丁上方形

∴甲丙上方形（b^2）－乙丙上方形（a^2）

＝甲丁上方形（e^2）－乙丁上方形（d^2）

卯子寅直形＝申酉亥直形

$b^2-a^2=c\times(e-d)$

則甲己長＝$(e-d)=\dfrac{a^2-b^2}{c}$

[126] 同上，頁 2892。

丁、乙丁兩線等矣，故折半得乙丁餘乃勾弦求股法$^{六卷}_{二則}$同前則。[126]	乙丁＝（甲乙－甲己）÷2＝ $d=\dfrac{c-(e-d)}{2}$ 則對角之垂線長＝ $\sqrt{b^2-d^2}$

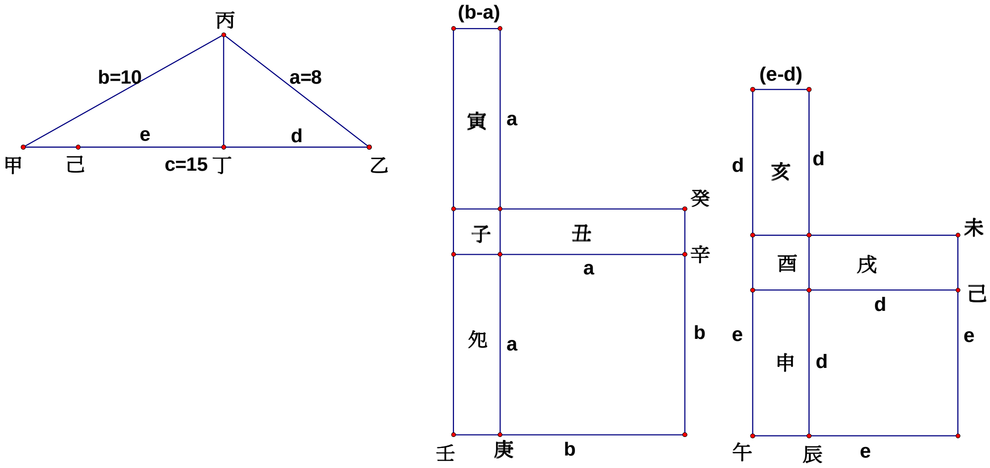


圖 3－25

顯見的，其公式是正確的。而證明的方法巧妙的利用圖形與六卷一則的勾股定理，即弦上方形必與股、勾上兩方形並等的關係式推導出 $e^2-d^2=b^2-a^2$ ，再進而推出甲己長＝ $(e-d)=\dfrac{a^2-b^2}{c}$ ，再導出乙丁長＝ $d=\dfrac{c-(e-d)}{2}$ ，最後再用六卷二則的勾弦求股法求出對角之垂線長（即高）。整個證明的過程簡單、清楚而嚴謹，且巧妙利用圖形表徵代數式之轉換，可看出杜知耕之構思巧妙、匠心獨具。

三、方田章直線類概念交互應用問題

除了引用「勾股」章概念解題外，本卷部份題目的證明也以本卷先前討論題目的概念、公式爲基礎，作推導或逆推的。如前節討論中，第 1 至 8 則的公式產生過程即是一個順勢推導的過程。而我們可從文本中發現，作者在「解」中直接寫明與本卷其餘問題證明同的問題計有第 35、36、41、42 等四則。寫法如下：

第四十一則、三角形以截積、截濶求截長$^{勾股截}_{積\quad同}$

設三角田依角截積一千三百六十步，截濶六十四步，求截長？

法曰：置積倍之$^{得二千七}_{百二十步}$，以濶除之得四十二步五分即所求。

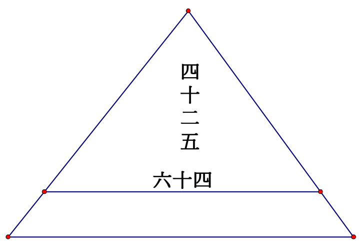


圖 3－26

解曰：此與直形截三角同本卷三十八則。[127]

而類似 1~8 則的推導模式，利用前述題目概念以證明該題則計有第 24、27、28、37、38、39、40、47、48、49、50、51、52、53、54、55 則等，共 17 則，且多是利用截積反求截長、截濶的問題。茲舉三例作術文與今解之對照分析：

原術文

第三十九則、直形截斜方

設直田長八十五步，依元長截積二千七百二十步成斜方形，兩濶相差五步，求兩濶？

法曰：置積為實，以元長除之得三十二步，另置相差五步折半得二步五分，並三十二步得三十四步五分即大邊；減三十二步得二十九步五分即小邊。

解曰：以元長除積者，求甲乙直形之濶也，甲乙直形之濶為為斜方兩濶之中度謂小于大邊二步五分，大于小邊亦二步五分，故置差折半增減之即得兩濶。[128]

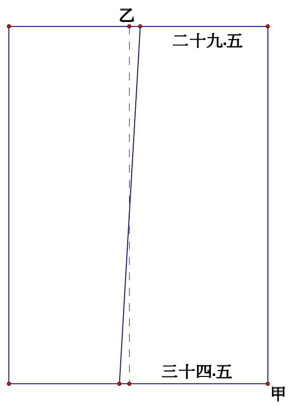


圖 3－27

今解

如圖 3－27

$$大邊元濶＝\frac{所截斜方形積}{元長}+\frac{兩濶差}{2}$$

$$＝\frac{2720}{85}+\frac{5}{2}＝34.5$$

$$小邊元濶＝\frac{所截斜方形積}{元長}-\frac{兩濶差}{2}$$

$$＝\frac{2720}{85}-\frac{5}{2}＝29.5$$

證明：如圖 3－27

$$\frac{大闊+小闊}{2}=\frac{所截斜方形積}{元長}$$

$$大邊元濶＝\frac{大闊+小闊}{2}+\frac{兩闊差}{2}$$

$$=\frac{所截斜方形積}{元長}+\frac{兩闊差}{2}$$

$$小邊元濶＝\frac{大闊+小闊}{2}-\frac{兩闊差}{2}$$

$$=\frac{所截斜方形積}{元長}-\frac{兩闊差}{2}$$

[127] 同上，頁 2895。
[128] 同上，頁 2894。

原術文

第五十一則、斜方形依小邊截積求截濶

設斜方田元長九十步，大邊濶三十八步，小邊濶二十步，依小邊截積八百二十二步五分，求截濶？

法曰：置積為實，以兩元濶相減餘一十八步，乘之得一萬四千八百零五步，以元長除之得一百六十四步五分，倍之得三百二十九步，另以小邊元濶自乘得四百步，兩數並共七百二十九步，平方開之得二十七步即所求。

解曰：甲乙丙丁全形、己辛丙丁截形，丙丁與甲乙為兩元濶，辛己為截濶，丙戊為元長，丙庚為截長，庚己為小邊與截濶之較線，甲戊為兩元濶之較線，癸辛為截濶上方形，子辛為小邊上方形庚辛與丙丁等，癸辛之大于子辛者為丑、寅兩廉與卯一隅，卯隅即較線庚己上方形也，截形以丙庚線分之必成庚丁一直形、己丙庚一勾股形，若以截長丙庚除直形必得辛庚線，再以較線己庚乘之必成一廉兩廉具以小邊為長以較線為濶，若以截長丙庚除勾股必得庚壬線，庚壬者庚己之半也，再以庚己乘之必成半隅，然直形與勾股兩形實一截形之分也，若以己庚乘截積，以丙庚除之，亦必得一廉半隅也，又全形之比例與截形等本卷四十九則，丙戊之與甲戊必若丙庚之與己庚，故置截積以元長丙戊

今解

斜方形截闊

$$=\sqrt{\frac{截積\times(大邊元闊-小邊元闊)}{元長}\times 2+(小邊元闊)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{822.5\times(38-20)}{90}\times 2+20^2}=27$$

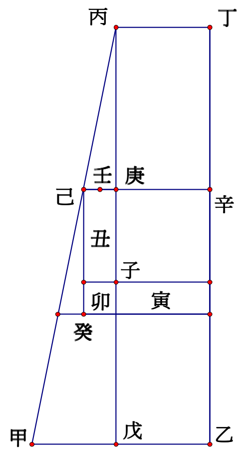


圖 3－28

證明：如圖 3－28

所截斜方形積

＝庚丁直形＋己丙庚勾股形

＝丙庚×辛庚＋丙庚×庚壬

＝丙庚×（辛庚＋庚壬）

＝丙庚×[（辛庚×庚己＋庚壬×庚己）÷庚己]

＝丙庚×（一廉+半隅）÷庚己

則（一廉+半隅）$=\dfrac{截積\times 己庚}{丙庚}$

又$\because \dfrac{己庚}{丙庚}=\dfrac{甲戊}{丙戊}$，

則（一廉+半隅）

$$=\frac{截積\times 己庚}{丙庚}=\frac{截積\times 甲戊}{丙戊}$$

$$=\frac{截積\times(大邊元闊-小邊元闊)}{元長}$$

癸辛方形（截闊上方形）

除之，以兩邊較線甲戊乘之亦得一廉半隅，與前同倍之則成兩廉一隅，夫小邊上方形之小于截潤上方形者此兩廉一隅也，並之則成截潤上方形矣，故平方開之得截潤。[129]

＝(丑＋寅＋卯)＋子辛方形(小邊上方形）(截闊)^2

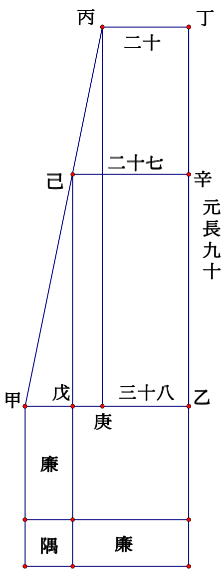
＝2×（一廉+半隅）＋(小邊元闊)^2

則截闊

$$=\sqrt{\frac{\text{截積}\times(\text{大邊元闊}-\text{小邊元闊})}{\text{元長}}\times 2+(\text{小邊元闊})^2}$$

原術文	今解

圖 3－29



第五十二則、斜方形依大邊截積求截潤

設斜方田元長九十步，大邊潤三十八步，小邊潤二十步，自大邊截積一千七百八十七步五分，求截潤？

法曰：置積為實，以兩元潤相減餘一十八步，乘之得三萬二千一百七十五步，以元長除之得三百五十七步五分，倍之得七百一十五步，另以大邊元潤自乘得一千四百四十四步，兩數相減餘七百二十九步，平方開之得二十七步即所求。

斜方形截闊

$$=\sqrt{(\text{大邊元闊})^2-\frac{\text{截積}\times(\text{大邊元闊}-\text{小邊元闊})}{\text{元長}}\times 2}$$

$$=\sqrt{38^2-\frac{1787.5\times(38-20)}{90}\times 2}=27$$

證明：如圖 3－29

所截斜方形積

＝戊辛直形＋甲戊己勾股形

$=$己戊×戊丁＋己戊×$\frac{1}{2}$甲戊

$=$己戊×（戊丁＋$\frac{1}{2}$甲戊）

$=$己戊×[（戊丁×甲戊＋$\frac{1}{2}$甲戊×甲戊）÷甲戊]

＝己戊×（一廉+半隅）÷甲戊

則（一廉+半隅）

$$=\frac{\text{截積}\times\text{甲戊}}{\text{己戊}}=\frac{\text{截積}\times\text{甲庚}}{\text{丙庚}}$$

$$==\frac{\text{截積}\times(\text{大邊元闊}-\text{小邊元闊})}{\text{元長}}$$

大邊元闊上方形（(大邊元闊)^2）

＝（二廉+一隅）＋截闊上方形（(截闊)^2）

[129] 同上，頁 2898。

解曰：既自大邊截積，則元形之大邊亦即截形之大邊，而截濶為小邊，小邊上方形之小于大邊上方形者，兩廉一隅也，故于大邊上方形內減去兩廉一隅，平方開之即得截濶。若並求長得濶用本卷四十八則法求之。[130]	截闊上方形（$(\text{截闊})^2$） ＝大邊元闊上方形（$(\text{大邊元闊})^2$）－2×（一廉+半隅） $(\text{截闊})^2=\left((\text{大邊元闊})^2\right)-2\times\dfrac{\text{截積}\times(\text{大邊元闊}-\text{小邊元闊})}{\text{元長}}$ 則截闊 $=\sqrt{(\text{大邊元闊})^2-\dfrac{\text{截積}\times(\text{大邊元闊}-\text{小邊元闊})}{\text{元長}}\times 2}$

從上述三題可明顯看出：51 則的斜方形依小邊截積求截濶，與 52 則的斜方形依大邊截積求截濶的公式，皆是正確的，且分別利用到本卷 49 及 48 則的概念。在第 39 則的直形截斜方，作者雖未標示出引用本卷的那一則數學概念，但顯然可看出其引用本卷第 6 則的斜方形求積概念。此外 51 與 52 則的證明，作者巧妙的利用圖形分別表徵出癸辛方形（截闊上方形）＝2×（一廉+半隅）＋$(\text{小邊元闊})^2$ 及截闊上方形（$(\text{截闊})^2$）＝大邊元闊上方形（$(\text{大邊元闊})^2$）－2×（一廉+半隅）等二個式子，進而推導出公式。由此二例可看出，杜知耕的圖解構思巧妙，獨具匠心，論證步驟簡短，論述嚴謹。[131]

四、西洋傳入問題

除了中國傳統數學概念解題外，本卷也有部份題目引用西洋傳入的數學知識及概念。其中作者明白標記其證明引用《幾何原本》的數學公式或概念的有三題。經筆者比對《幾何原本》發現其引用之構念分別爲第 8 則「象目形求積」：引用《幾何原本》第 1 卷第 35、36 命題的概念。第 43 則「三角形以截長求截濶」：引用《幾何原本》第 6 卷第 4 命題的概念。第 45 則「三角形以截積求截長」：引用《幾何原本》第 6 卷第 1 命題的概念。茲就第 43 則與 45 則分析如下：

原術文	今解
四十三則、三角形以截長求截濶 設三角田元長二百步，濶一百五十步，自角截長一百五十步，求截濶？	

130 同上，頁 2899。
131 參見高宏林，〈杜知耕與《數學論》〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系－第七卷》，頁 212。

法曰：置截長為實，以元潤乘之得二萬二千五百步，以元長除之，得一百一十二步五分即所求。

解曰：凡三角形任以一線分之，分線若與底線平行，則分形之比例必各與全形等。謂丙丁與丁戊若丙甲與甲乙，丁戊與丙庚若甲乙與丙己，又丁戊與甲乙若丙丁與甲丙、丙庚與丙己也泰西《幾何原本》，甲乙丙即元形，丁戊丙即截形也，則截長與截潤之比例必若元長與元潤矣，截潤與元潤之比例亦必若截長與元長矣謂截長大于截潤幾分之幾，則元長亦大于元潤幾分之幾；截潤小于元潤幾分之幾，則截長亦小于元長幾分之幾，法以元潤乘截長，以元長除之者，借元長及元潤之比例，因截長以求截潤也求比例用異乘同除法詳三卷五則。[132]

$$\text{三角形截闊} = \frac{\text{截長} \times \text{元闊}}{\text{元長}}$$

$$= \frac{150 \times 150}{200} = 112.5$$

證明：如圖 3－30

$\because$ 丁戊 $\parallel$ 甲乙，

則根據《幾何原本》第六卷第四題

$$\frac{\text{丙丁}}{\text{丁戊}} = \frac{\text{丙甲}}{\text{甲乙}} \text{、} \frac{\text{丁戊}}{\text{丙庚}} = \frac{\text{甲乙}}{\text{丙己}}$$

$$\therefore \frac{\text{丁戊}}{\text{甲乙}} = \frac{\text{丙丁}}{\text{甲丙}} = \frac{\text{丙庚}}{\text{丙乙}}$$

$\therefore$ △丁戊丙即△甲乙丙截形

$$\therefore \frac{\text{截長}}{\text{截闊}} = \frac{\text{元長}}{\text{元闊}} ,$$

$$\frac{\text{截闊}}{\text{元闊}} = \frac{\text{截長}}{\text{元長}} \Rightarrow \text{截闊} = \frac{\text{截長} \times \text{元闊}}{\text{元長}}$$

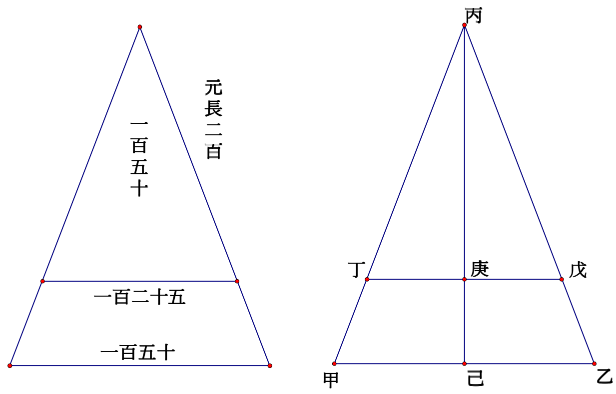


圖 3－30

原術文	今解
四十五則、三角形以截積求截長	
設三角田元長二百步，潤一百五十步，自角截積八千四百三十七步五分，求截長？	三角形截長

[132] 引自杜知耕，《數學論》卷一，頁 2896。

法曰：置積倍之（得一萬六千八百七十五步）為實，以元長乘之（得三百三十七萬五千步），以元濶除之（得二萬二千五百步），平方開之得一百五十步即所求。

解曰：甲乙丙即元形，丁戊丙即截形，丁壬為截形等高、等濶之直形，辛壬為截長丙庚線上方形，丁壬、辛壬兩形之高必相等。兩形既等高則比例必若丁戊與辛戊（《幾何原本》云：凡兩形等高，形與形之比例若線與線），辛戊與截長丙庚等，而丁戊即截濶，是丁壬與辛壬之比例若截濶與截長也。分形之比例，元與全形等（本卷四十三則），則丁壬與辛壬之比例又若元濶與元長矣，法倍截積者求丁壬直形也，以元長乘、元濶除之者，借元長元濶之比例，因丁壬直形以求辛壬方形也，辛壬為截長丙庚上方形，故平方開之得截長也。[133]

$$=\sqrt{\frac{\text{所截三角形積}\times 2\times\text{元長}}{\text{元闊}}}$$

$$=\sqrt{\frac{8437.5\times 2\times 200}{150}}=150$$

證明：如下圖 3－31

1.作與截形丁戊丙等高、等濶之丁壬直形

2.作截長丙庚線上方形（辛壬方形）

根據《幾何原本》第六卷第一題

凡兩形等高，形與形之比例若線與線

$$\therefore \frac{\text{丁壬直形積}}{\text{辛壬方形積}}=\frac{\text{截闊}}{\text{截長}}=\frac{\text{元闊}}{\text{元長}}$$

$$\Rightarrow \text{辛壬方形積}=\frac{\text{丁壬直形積}\times\text{元長}}{\text{元闊}}$$

$$\Rightarrow (\text{截長})^2=\frac{\text{丁壬直形積}\times\text{元長}}{\text{元闊}}$$

$$\Rightarrow (\text{截長})^2=\frac{\text{所截三角形積}\times 2\times\text{元長}}{\text{元闊}}$$

$$\therefore \text{截長}=\sqrt{\frac{\text{所截三角形積}\times 2\times\text{元長}}{\text{元闊}}}$$

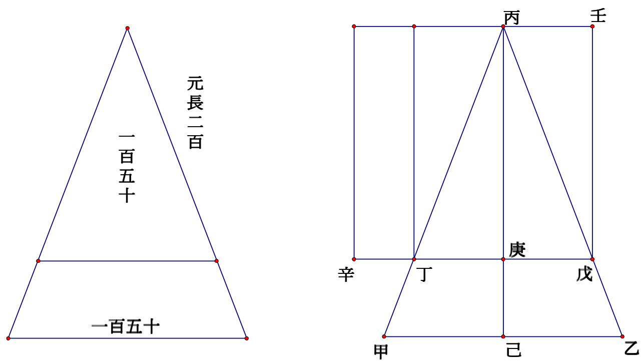


圖 3－31

由這幾則的證明可看出，作者除了引用《幾何原本》上的數學概念外，其證明的手法先作補助線、圖再行證明的敘述模式也與《幾何原本》很類似。

五、作者新增問題

[133] 同上，頁 2896。

除了引用中國傳統與西洋傳入的數學題目外，本卷也有部份題目屬於作者新增。其中作者在目錄上明白標示的有第 24、30、31、56、57 等五則，茲舉第 30 則爲例，並與第六卷第 24 則比較分析之：

原術文	今解
第一卷第三十則、 有一方角之三角形，求對角之垂線？ 設不等邊三角形有一方角（丙為方角即勾股田），底濶十步，乙丙邊六步，甲丙邊八步，求中長？ 法曰：置乙丙邊自乘（得三十六步），以底除之（得三度六分。此即丁乙之度，以下乃勾、弦求股法），又自乘（得一十二步九分六釐），與丙乙邊自乘之數相減（餘二十三步零四釐），平方開之得四步八分即所求。	直角三角形斜邊之垂線長（高） $=$丙丁$=\sqrt{(\text{乙丙})^2-(\frac{\text{乙丙}^2}{\text{甲乙}})^2}$ $=\sqrt{6^2-(\frac{6^2}{10})^2}=4.8$ 證明：如下圖 3－32 戊乙直形（乙丁$\times c$）＝乙丙勾上方形（a^2） 則乙丁長＝$\frac{a^2}{c}=\frac{\text{乙丙}^2}{\text{甲乙}}$
解曰：此勾股求對角垂線法也（六卷二十五則），因有方角故用之。若無方角，此法又窮矣。更有一法不問等邊、方角與否皆可求，如下則。[134]	直角三角形斜邊之垂線長（高） $=$丙丁$=\sqrt{(\text{乙丙})^2-(\text{乙丁})^2}$ $=\sqrt{(\text{乙丙})^2-(\frac{\text{乙丙}^2}{\text{甲乙}})^2}$

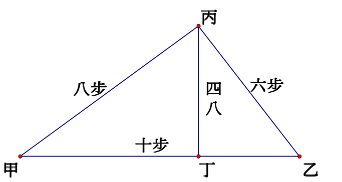
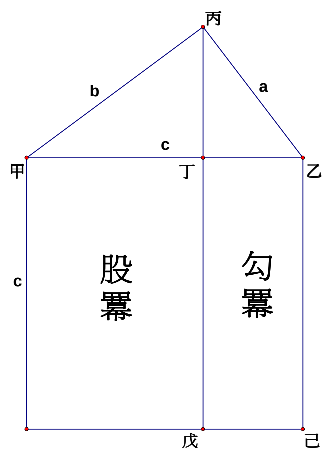


圖 3－32



[134] 同上，頁 2891。

原術文	今解
第六卷第二十四則、	
勾股形，求對角之垂線？	如下圖 3－33
設勾六尺，股八尺，弦十尺，求對角垂線？	令勾長＝a，股長＝b，弦長＝c
法曰：置勾股相乘得四十八尺，以弦除之，得四尺八寸即所求。	弦邊上高爲 $h_c = \dfrac{a \times b}{c} = \dfrac{6 \times 8}{10} = 4.8$
解曰：勾股相乘必得丁丙直形，與甲戊直形等，何也？丁丙直形倍大于甲乙丙勾股形，甲戊直形亦倍大于甲乙丙勾股形，故等也。以弦除積得垂線，即以長除積得濶也。[135]	證明： 丁丙直形積 ＝2×甲乙丙勾股形積 ＝甲戊直形積 $a \times b = c \times h_c \Rightarrow h_c = \dfrac{a \times b}{c}$

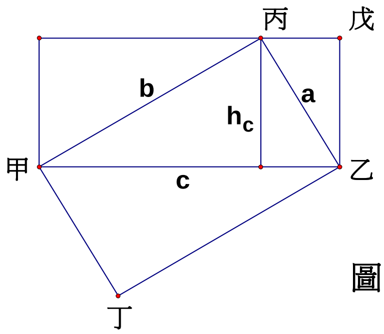


圖 3－33

此二題皆爲求直角三角形斜邊上的高，公式皆正確。第六卷所用的公式與今日常用的公式同，且利用直角三角行面積相等來證明 $h_c = \dfrac{a \times b}{c}$ 的手法也相同。而本卷所用的公式，先求丙丁或甲丁長，再利用勾弦求股法求出高。看起來似乎較爲複雜，但筆者試著比較本卷 29、30、31 則三個三角形求垂線（即求高）的公式，可發現其所用方法的一致性。

3. 2. 4.　曲線類圖形求積

第二卷共有題目 40 則，第 1 則、圓徑求周的題目定出圓周與圓徑的比值，即圓周率。經比對本書求出圓周率的方法與阿基米德在《圓的度量》一書的命題 3 完全相同。作者從圓內接、外切正六邊形起算，先用分數逼近 $\sqrt{3}$，而後再以

135 引自杜知耕，《數學鑰》卷六，頁 3014。

合比性質、相似三角形性質、角平分線性質及勾股定理，採邊數倍增之方式自內而外、自外而內逼近圓周長。分別計算內接、外切兩組正多邊形的邊數至 96 邊。而後求出$3\frac{10}{71}<\frac{\text{圓周}}{\text{圓徑}}<3\frac{1}{7}$的周徑比値範圍。杜知耕並明白指出「兩數皆不能與周徑脗合，但徑七周二十二其數少整姑從之。」[136]因而以$\frac{22}{7}$爲圓周與圓徑的比値。此後全卷題目以此值作爲圓周率以爲後續計算的基礎。

本卷中曲線類圖形求面積的題目有 15 則，[137]分別是求圓積、圓環積、橢圓積、弧矢積、雜線三角形積（即今扇形積）及諸雜線形積，底下分四類介紹。

一、求圓積

本卷第 3~5 題分別爲圓周徑求積、圓徑求積及圓周求積，公式則分別爲$S=\frac{1}{2}C\times\frac{1}{2}d$ 、$S=d^2\times\frac{11}{14}$及$S=C^2\times\frac{7}{88}$。顯然若將$\frac{22}{7}$視爲圓周率，可發現公式都正確無誤。《算法統宗》上也有此三類題型，公式的概念也相同，不同的是，其所取圓周率的值爲 3。而從「解」可發現此三題證明大部份引用《測量全義》的數學概念。茲就第 3 題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第三則、圓周徑求積 設圓田，周八十八步，徑二十八步，求積？ 法曰：置周折半得四十四步為實，以徑折半得一十四步為法，乘之得六百一十六步即所求。 解曰：圓形與半徑為高、全周為底之三角形等，何也？《測量全義》云：甲乙丙丁圜，自戊心百分之必皆成三角形，而己戊甲其百分之一也，次依甲戊半徑作庚戊辛三角形，令庚辛底與圜之全周等，自戊角百分之，亦必皆成三角形，而甲戊壬，其百分之一也。己戊甲、甲戊壬兩分形，己甲、甲壬兩底既等，又戊甲同高，	如下圖 3－34 令圓積：S，圓周：C， 圓徑（直徑）：d 則$S=\frac{1}{2}C\times\frac{1}{2}d=\frac{88}{2}\times\frac{28}{2}=616$ 證明：如下圖 3－34 庚辛長＝圓周長 ∴△甲戊辛面積＝甲乙丙丁圓面積 則甲乙丙丁圓面積（S） $=\text{庚辛}\times\text{甲戊}\times\frac{1}{2}$ ＝半周 × 半徑

136 引自杜知耕，《數學論》卷二，頁 2909。
137 詳見附錄 4：第二卷方田章曲線類目錄。

因推其容必等。夫百倍己戊甲為甲乙丙丁全圓，百倍甲戊壬為庚戊辛三角形，兩分形既等，兩全形有不等乎。故法以半徑乘半周得庚戊辛三角形之積，即得甲乙丙丁圜之積也。或云己戊甲雖全圓百分之一，其底終屬曲線，不可與直線三角形為比。不知甲戊壬角大于己戊甲角，而己戊甲中垂線大于甲戊壬中垂線，兩相折准即謂之無差亦可。[138]

$$=\frac{1}{2}C\times\frac{1}{2}d$$

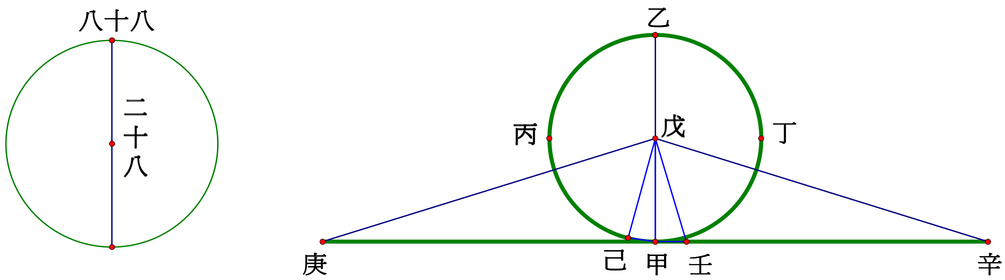


圖 3－34

二、圓環求積

本卷第 8 與第 15 題分別以內、外周及全徑、虛徑求圓環積，所用公式分別為 $S=(C_2^2-C_1^2)\times\frac{7}{88}$ 及 $S=(d_2^2-d_1^2)\times\frac{11}{14}$ 。同樣可發現公式都正確無誤。《算法統宗》上也有求圓環積的題型，為《九章算術》既有題，其所使用公式則為 $S=\frac{(C_1+C_2)}{2}\times a$ ，其中 a 為環濶。與本卷上所使用的公式並不相同。而從「解」可發現此二題公式顯是引用 1 卷 5 則方環之數學概念，並借方、圓之面積比值導出。茲就第 8 題的術文觀察之：

第八則、圓環求積

設環田，外周六十六步，內周一十一步，求積？

法曰：置內、外兩周各自乘外周得四千三百五十六步，內周得一百二十一步，兩數相減餘四千二百三十五步，以七乘之得二萬九千六百四十五步，以八十八除之得三百三十六步八分七釐五毫即所求。

[138] 引自杜知耕，《數學鑰》卷二，頁 2909。

解曰：與方環求積同一卷三十三則及本卷五則。[139]

三、弧矢形求積

第二卷第 17、27、30 題皆爲求弧矢積的題目，其中第 17 題所使用公式爲「弧矢積 $=\dfrac{\text{背}\times(\text{離徑}+\text{矢})-\text{弦}\times\text{離徑}}{2}$ 」。此公式爲西洋傳入，是正確的公式。而 27 題所使用公式「弧矢形積＝（矢＋弦）$\times\dfrac{1}{2}\times$矢」則與《算法統宗》上所使用之公式相同，爲近似公式。至於第 30 題則爲做作者新增之算法，亦爲近似算法。底下就第 17 題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第十七則、弧矢求積 設弧矢田，矢濶五步，弦長一十七步三分二釐有奇，背二十步零九分五釐二毫有奇，離徑五步，求積？	弧矢田積 $=\dfrac{\text{背}\times(\text{離徑}+\text{矢})-\text{弦}\times\text{離徑}}{2}$
法曰：置背，以離徑並矢共十步乘之得二百零九步五分二釐三毫有奇，另置弦，以離徑乘之得八十六步六分有奇，兩數相減餘一百二十二步九分二釐三毫有奇，折半得六十一步四分六釐一毫有奇即所求。	$=\dfrac{20.95\times(5+5)-17.32\times5}{2}$ $=61.461\cdots$
解曰：甲乙丙弧矢形，戊為圜心，自甲、自乙作甲戊、乙戊兩線成甲戊乙丙雜線形，其丙丁矢與丁戊離徑並即全圓之半徑，甲丙乙背又為圓周之分線，求積之法當與圓同，夫圓以半徑乘周折半得積本卷三則，則雜線形亦必以半徑乘背折半得積矣，又雜線形內以甲乙線分之必成一甲乙丙弧矢形、一甲戊乙三角形，其三角形以甲乙弦為濶，以丁戊離徑為高，若以高乘濶折半	證明：如下圖 3－35 甲乙丙弧矢形 ＝甲戊乙丙雜線形（即今扇形） －△甲戊乙 $=\text{半徑}\times\text{背}\times\dfrac{1}{2}-\text{弦}\times\text{離徑}\times\dfrac{1}{2}$ $=[\text{半徑}\times\text{背}-\text{弦}\times\text{離徑}]\times\dfrac{1}{2}$ $=\dfrac{\text{背}\times(\text{離徑}+\text{矢})-\text{弦}\times\text{離徑}}{2}$

[139] 同上，頁 2911。
[140] 同上，頁 2914。

必得三角形之積也一卷五則，于雜線形內減去三角積，所餘非弧矢積而何。故法以半徑乘背，離徑乘弦，相減折半得積也相減而後折半與各折半而後相減得數同。[140]

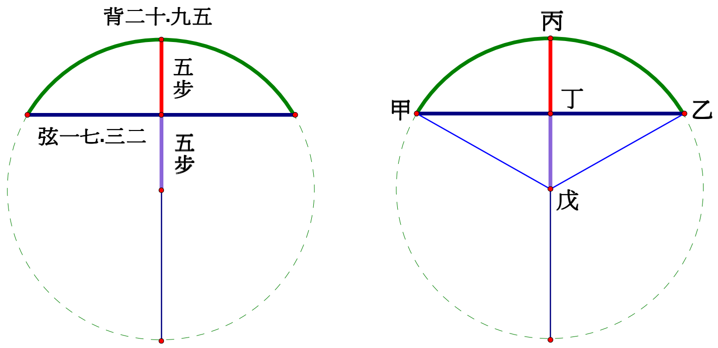


圖 3—35

四、其它

本卷 16 與 34 題分別是求橢圓積及雜線三角形積（即今扇形積）爲西洋傳入之題型，公式以代數符號表示分別爲 $S=2a\times 2b\times\frac{22}{7}$ 與 $A=s\times r\times\frac{1}{2}$。爲正確無誤之公式，與現今所用的也相同。而 34~37 題則爲方中容圓、圓中容方餘積、方積與圓積互求之公式，應屬周、徑比值之引申題型。茲就第 36 題作術文與今解之對照分析：

原術文

第三十六則、圓內減方以餘積求方積求方邊、圓徑附

設圓田減去內切方田，餘積二百二十四步，求方積？

法曰：置積為實，以七乘之得一千五百六十八步，以七與圓法十一相減餘四為法歸之，得三百九十二步即所求。

解曰：內切方形之弦與外切方形之邊等，則內切方形必倍小于外切方形，而若七之與十四，夫圓既為外方十四分之十一，而內方不為圓十一分之七乎？圓內減方之餘積為圓十一分之四，即為內方七分之四，故七乘四除得內切方

今解

內切方積（**即今內接方積**）

$=\text{餘積}\times\frac{7}{4}$

$=224\times\frac{7}{4}=392$

證明：如圖 3—36

圓外切方形積

＝圓內切（**即今圓內接**）方形積 × 2

$\frac{\text{外切方積}}{\text{圓積}}=\frac{14}{11}\Rightarrow\frac{\text{內切方積}}{\text{圓積}}=\frac{7}{11}$

$\Rightarrow\frac{\text{內切方積}}{\text{餘積}}=\frac{7}{11-7}=\frac{7}{4}$

原術文	今解
積也。置方積平方開之即方邊，倍方積平方開之即得圓徑。[141]	$\therefore$ 內切方積＝餘積 $\times\frac{7}{4}$ 又 $\because$ 內切方邊＝$\sqrt{方積}$ ， $\therefore$ 圓徑＝內切方邊＝$\sqrt{方積\times 2}$

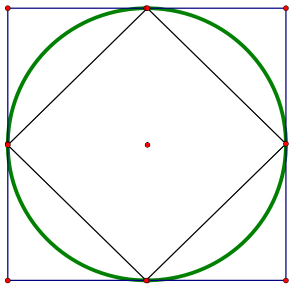


圖 3－36

3.2.5. 曲線類圖形反求周徑

第二卷內容除 14 則求面積的問題外，其餘 26 題大多皆爲反求周徑的題型。如：圓積求徑、求周、圓環以積及內周求外周或以積及外周求內周、弧矢形以積、矢、弦及離徑求背等等。可看出大部份皆爲曲線類圖形求積題型概念的逆推或公式反用之。經比對，發現此類題型來源大概可分成三類，底下分別介紹：

一、傳統中算題型

經比對發現此類題型部份題目所蘊涵之數學概念及所用之公式與《算法統宗》相同，而這些題目原屬其少廣章之題型。但題目敘述、數據與所用之周徑比值並不盡相同。如圓積求徑、求周即屬此類型，茲就第 6 題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第六則、圓積求徑 設圓田，積六百一十六步，求徑？ 法曰：置積為實，以十四乘之（得八千六百二十四步），以十一除之（得七百八十四步），平方開之得二十八步即所求。 解曰：以十四乘十一除者，因圜積以求戊己方積也，平方開之得方邊，即得圜徑者，方邊與圜徑等也。[142]	圓徑（d）＝$\sqrt{S\times\frac{14}{11}}$ ＝$\sqrt{616\times\frac{14}{11}}$ ＝28 證明：如下圖 3－37

[141] 同上，頁 2921。
[142] 同上，頁 2911。

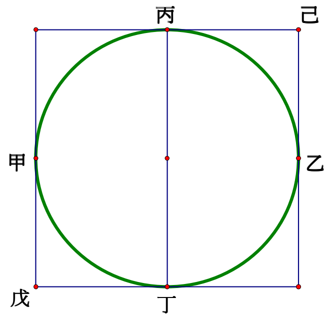


圖 3－37

$$\frac{\text{戊己方積}}{\text{圓田積}}=\frac{14}{11}$$

$$\Rightarrow \text{戊己方積}=\text{圓田積}\times\frac{14}{11}$$

$$\text{圓徑}=\text{方邊}=\sqrt{\text{戊己方積}}$$

$$=\sqrt{\text{圓田積}\times\frac{14}{11}}=\sqrt{S\times\frac{14}{11}}$$

二、西洋傳入題型

再者，從目錄亦可看出 19、20、22 三題型爲西洋所傳入，而且三題所用之核心概念相同，皆爲「矢×餘徑＝(半弦)^2」。此類題型並不見於傳統中算。茲就第 19 題作術文與今解之對照分析：

原術文

第十九則、弧矢形以矢、弦求餘徑（求全徑、離徑、半徑附）

設弧矢田，矢五步，弦一十七步三分二釐有奇，求餘徑？

法曰：置弦折半（得八步六分六釐有奇），自乘（得七十五步），以矢除之得一十五步即所求。

解曰：甲乙丙弧矢形，丙丁為矢，丁戊為離徑，丁己為餘徑，自圓心戊作戊乙線成丁戊乙勾股形，丁己半弦為股，丁戊離徑為勾，戊乙半徑為弦，另作辛卯形為丁戊勾上方形，庚壬形為戊乙弦上方形，夫庚壬之大于辛卯者為癸丑子磬折形，癸丑子磬折形必等于乙丁股上方形，何也？弦上方形與勾股上兩方形並等故也六卷一則，若移子于寅則成癸丑寅直形，必以勾弦較為濶，勾弦和為長。今戊乙弦等于戊丙，戊丙之大于丁戊勾者為丙丁，是丙丁矢即勾弦較

今解

$$\text{餘徑}=\frac{(\text{半弦})^2}{\text{矢}}=\frac{17.32...^2}{5}=15$$

證明：如下圖 3－38

戊乙＝戊丙＝戊己＝半徑＝c，

丁乙＝丁甲＝半弦＝b（股），

丁戊＝a（勾）

餘徑＝丁己＝丁戊＋戊丁

＝$(c+a)$（勾弦和）

$$=\frac{b^2}{(c-a)}\quad\left(\frac{\text{股}^2}{\text{勾弦較}}\right)$$

$$=\frac{\text{乙丁}^2}{\text{丙丁}}=\frac{(\text{半弦})^2}{\text{矢}}$$

全徑 ＝ 餘徑 ＋ 矢

$$=\frac{(\text{半弦})^2}{\text{矢}}+\text{矢}$$

143 同上，頁 2915。

也，故以矢除丁乙半弦弧矢形之弦，自乘之積即得勾弦和，又乙戊弦勾股形之弦既半，徑必與戊己等，戊己合丁戊非丁己餘徑而何。求得餘徑加矢即全徑，減矢折半即離徑，加矢折半即半徑。[143]	半徑 $=$ 全徑 $\times\frac{1}{2}$ $=$（餘徑 $+$ 矢）$\times\frac{1}{2}$

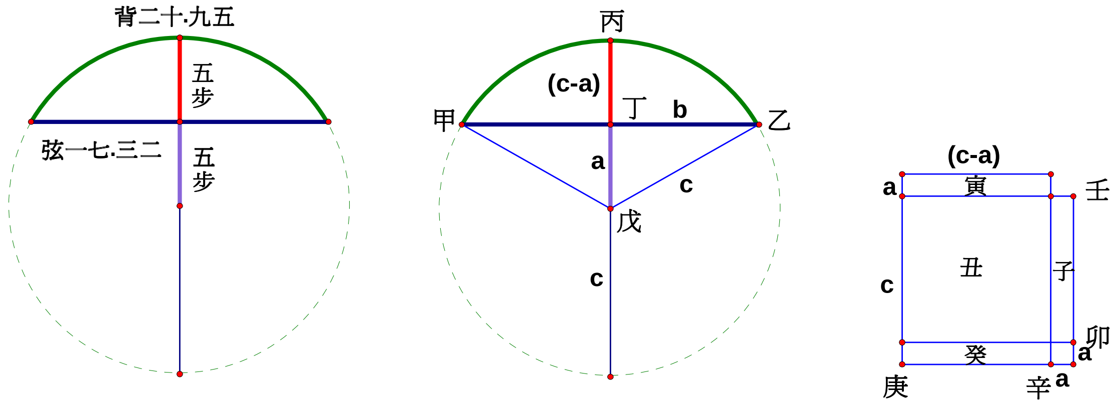


圖 3－38

三、作者新增題型

除上述二種來源外，本卷有 11 個題目或其解法屬作者新增。經筆者研究大部份爲杜知耕由上述二種題型所蘊涵之概念與公式引申、推廣而來。之中圓環類題型有 6 題，而屬勾股概念的引申的有 3 題，而第 39 題「圓內減不相切之方以餘積求圓徑及方弦」與第 38 題皆爲《算法統宗》少廣難題所載之題目，其中第 38 題所用之公式與之相同，而第 39 題則不同。比較二題之解法可看出第 39 題之解法，乃作者依 38 題之概念引申而來。底下分就第 13、26、39 三則作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第十三則、圓環以積及濶求兩周 設圓環田，積三百三十六步八分七釐五毫，濶八步七分五釐，求兩周？ 法曰：置積為實，以濶除之得三十八步五分，另置濶以二十二乘之得一百九十二步五分，以七除	圓環外周 $=\frac{\text{圓環田積}}{\text{環闊}}+$環闊$\times\frac{22}{7}$ $=\frac{336.875}{8.75}+8.75\times\frac{22}{7}=66$ 圓環內周 $=\frac{\text{圓環田積}}{\text{環闊}}-$環闊$\times\frac{22}{7}$

[144] 同上，頁 2913。

之（得二十七步五分），與三十八步五分相並，得六十六步即外周；與三十八步五分相減，得一十一步即內周。

解曰：此亦梯形求濶法也，法以環濶除積所得之三十八步五分即兩環周之中度也。環濶為全徑與虛徑相差之半，以二十二乘七除則為內外兩周相差之半矣。故以增減兩周之中度得兩周也。[144]

$$=\frac{336.875}{8.75}-8.75\times\frac{22}{7}=11$$

證明：

$$\frac{\text{圓環田積}}{\text{環闊}}=\frac{\text{外周}+\text{內周}}{2}\cdots(1)$$

$$\text{環闊}\times\frac{22}{7}=\frac{\text{外周}-\text{內周}}{2}\cdots(2)$$

（1）＋（2）

$$\text{圓環外周}=\frac{\text{圓環田積}}{\text{環闊}}+\text{環闊}\times\frac{22}{7}$$

（1）－（2）

$$\text{圓環內周}=\frac{\text{圓環田積}}{\text{環闊}}-\text{環闊}\times\frac{22}{7}$$

原術文

第二十六則、弧矢形以半徑半弦較及半弦離徑較求矢與弦

設弧矢田，半徑多半弦一步三分四釐弱，半弦多離徑三步六分六釐強，求矢及弦？

法曰：並兩數（共五步），以半徑多半弦之數乘之（得六步七分），倍之（得一十三步四分），平方開之（得三步六分六釐），以加半徑多半弦之數得五步即離徑，再加半弦多離徑之數得八步六分六釐即半弦，再加半徑多半弦之數得十步即半徑，半徑減去離徑餘五步即矢。

解曰：戊己半徑（圖同二十四則）多于丁乙半弦之數即股弦較，丁乙半弦多于丁戊離徑之數即勾股較，勾股較並股弦較即勾弦較，此即勾弦較、股弦較求勾、股、弦法也（六卷二十則）。[145]

今解

令半徑半弦較為 $(c-b)$ ，

半弦離徑較為 $(b-a)$

∴離徑（ a ）

$$=\sqrt{[(c-b)+(b-a)]\times(c-b)\times 2}+(c-b)$$

$$=\sqrt{[1.34+3.66]\times 1.34\times 2}+1.34=5$$

半弦（ b ）＝ $a+(b-a)=5+3.66=8.66$

弦（ $2b$ ）＝ $2\times 8.66=17.32$

半徑（ c ）＝ $b+(c-b)=8.66+1.34=10$

矢＝半徑－離徑＝10－5＝5

證明：

半徑半弦較 $(c-b)$ 為股弦較

半弦離徑較 $(b-a)$ 為勾股較

∴ $(c-b)+(b-a)=(c-a)$ 為勾弦較

[145] 同上，頁 2917。

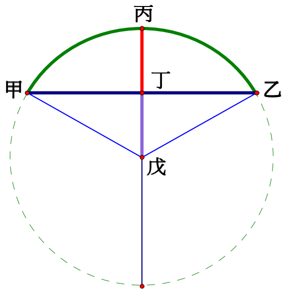


圖 3－39

$\sqrt{[(c-b)+(b-a)]\times(c-b)\times 2}$

$=\sqrt{(c-a)\times(c-b)\times 2}$　　爲弦和較

$=(a+b-c)$

離徑（ a ）$=(a+b-c)+(c-b)$

$=\sqrt{[(c-b)+(b-a)]\times(c-b)\times 2}+(c-b)$

半弦(b)＝離徑(a)＋半弦離徑較 $(b-a)$

半徑(c)＝半弦(b)＋半徑半弦較 $(c-b)$

矢＝半徑－離徑

原術文	今解
第三十九則、圓內減不相切之方以餘積求圓徑及方弦	
設圓田內減方田，圓周至方角一步，餘積四十三步，求圓徑及方弦？	如下圖 3－40 令巽坎直形之長爲 a ，寬爲 b $a\times b=1^2\times 2+43=45$ 縱方＝$a-b=1\times 4=4$ 利用平方帶縱開之即得
法曰：置一步自乘仍得一步，以二因之得二步，與餘積並四十五步，另置一步以四因之得四步為縱方，以平方帶縱開之得一十四步，減去縱方即圓徑，再減圓周至方角各一步共二步，餘八步即方弦。	$a+b=\sqrt{(a-b)^2+4ab}=\sqrt{4^2+4\times 45}=14$ 圓徑＝$(a+b)-(a-b)=14-4=10$ 方邊＝圓徑－2x1＝10－2x1＝8
解曰：依內方角作一圓線，此圓線偕外圓周必成一圓環形，次依環潤改作方環，圓環當方環四分之三，故止作方環之三隅即與圓環等。依圖分之甲、乙、丙三方形，丁，戊、己、庚、辛、壬六直形，尚餘癸、子、丑、寅四弧矢形為圓減內切方形之餘積，以圓三方二推之舊法謂圓內容方，方居圓三分之二，四弧矢形並當圓三分之一，必當內方二分之一，	證明：如下圖 3－40 餘積＝圓環積＋子、丑、寅、癸四弧矢形 $=\dfrac{3}{4}$方環$+\dfrac{1}{3}$小圓 （∵舊法謂圓內容方，方居圓三分之二） $=\dfrac{3}{4}$方環$+\dfrac{1}{2}$內方 $=\dfrac{3}{4}$方環＋卯癸辰方形

而夘癸辰方形亦當內方二分之一，則四弧矢形必能補夘癸辰方形之闕，而與辛、壬、丙三形並共輳成一震坎方形矣。次移甲于巳，移乙于午，移丁于酉，移戊于戌，移己于亥，移庚于乾，尚闕未、申二形，故法取圓周至方角一步自乘，二因之補入積內也，自巳至申凡四形，每形濶一步，共四步，故取圓周至方角之一步四因之為縱方也，以平方帶縱開之得巽艮、艮坎長濶相和之度，減去縱方巽震餘震艮、艮坎兩濶即圓徑，圓徑之大于方弦者為兩邊之各一步，故減之得方弦。[146]

（又次移甲于巳，移乙于午，移丁于酉，移戊于戌，移己于亥，移庚于乾）

巽坎直形（巽艮×艮坎：$(a\times b)$）

$=$餘積＋申、未方形$=1^2\times 2+43=45$

又巽艮－艮坎（$a-b$）$=1\times 4=4$

則利用帶縱開方得巽艮＋艮坎（$a+b$）

$=\sqrt{(a-b)^2+4ab}=\sqrt{4^2+4\times 45}=14$

圓徑（$2b$）$=(a+b)-(a-b)=14-4=10$

方邊＝圓徑－2x1＝10－2x1＝8

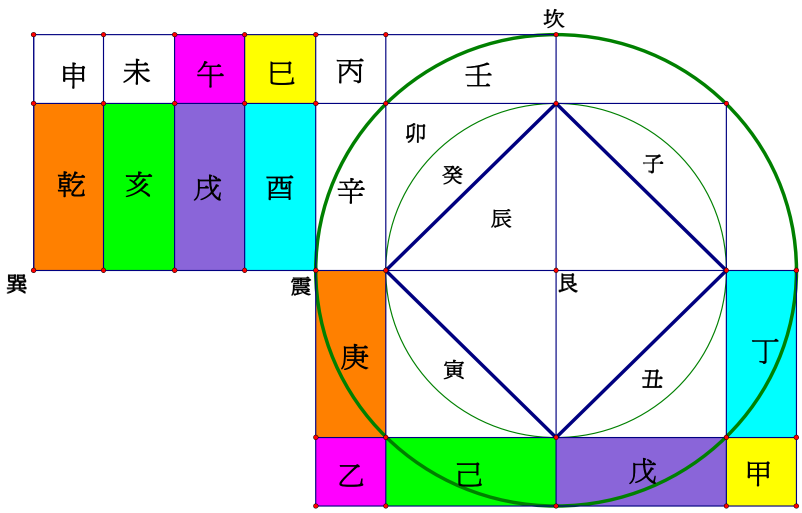


圖 3－40

3. 2. 6.　方田章小結

經由上述分析，可發現《數學鑰》第一、二卷的方田章有幾個特色，茲簡述如下：

（1）　經比對方田章二卷題型及所用之概念、公式，與《算法統宗》相同的分別有 30 題、16 題，[147]大抵從其卷三方田章、卷六少廣章及卷七分田截積法而來。題型及所用之概念雖同，但數據、敘述則不盡相同。第一卷之 51

[146] 同上，頁 2922。
[147] 見附錄 3、4。

及 52 二題選自卷七分田截積法，除所用概念、公式外，題目的敘述與所使用之數據亦同。

（2） 「幾何即勾股」：由方田章各題之「解」可看出作者證明時所蘊涵的數學概念與公式交互引用，其中引用最多的爲勾股章概念。可從底下二點看出：

※ 觀察第一卷 16~31 題、第二卷 26 題的「解」，可發現此 17 題之公式皆以「勾股」章概念直接推導而得。此類題目大部份並不見於《算法統宗》。

※ 於「解」明顯註記引用「勾股」章概念以證明公式的題目亦有 5 題。如此看來，杜知耕似乎更具體實踐了梅文鼎的「幾何即勾股」之說。

（3） 以數學概念與公式爲中心：就知識內容的安排來看，題目強調的是數學概念與公式本身的傳達，而非該題之答案或情境。可從底下二點看出：

※ 一題一公式、一公式一題，並無同一公式數個例題的情形。且與《算法統宗》的題目相比，可發現雖題目所用之公式，甚至部份數據相同，但本書作者幾乎將所有題目的敘述改寫的更爲簡單扼要，而並不強調題目的實際應用與情境。

※ 方田章大部份題目，只要是屬於同概念或近似概念互相推導而出的題型，所用之數據組皆相同，如第一卷 13~28 題、35~40 題、47~52 題等等。而非《算法統宗》原所載題目的數據組。顯見作者在乎的並非題目所用之數據及答案，數據及答案應只是作者用來顯示該題數學概念與公式所借用之「傀儡」而已。

（4） 受西學影響很大，可從底下四點看出：

※ 此二卷目錄註記爲「西法」的有 7 題。

※ 「凡例」、「問題」、「法」、「解」的體例與《幾何原本》類似。

※ 證明仿效《幾何原本》中演繹式邏輯推理的方法。

※ 「解」的說明或證明中大量引用《幾何原本》、《測量全義》、《大測》的數學知識與概念。如求圓周率的方法與阿基米德在《圓的度量》一書的命題 3 完全相同。