

國立台灣師範大學物理研究所碩士論文

快速旋轉 BEC 在四次項位能井的效應

學 生：劉智豪

指導教授：吳文欽

中華民國九十八年六月

## 誌謝

首先想先謝謝指導教授吳文欽老師的指導，每遇到問題，老師爽朗笑聲和加油打氣總給予我那份自信往前進行下去，也感謝超群學長在這兩年的照顧，尤其在程式上的指導，讓我得以順利地進行；接下來謝謝家人這兩年來的支持，尤其是媽媽，讓我能無負擔地來完成碩士學位，也了解堅持到底的重要性。

接下來要謝謝我的同學們，謝謝你們這兩年的陪伴，讓我在唸書之餘，有你們可以一同吃喝玩樂，相互分享彼此的心情，有你們真好。還有我的高中好友阿雄，有一段時間我們每個星期日都吃鮮天下的水餃，只希望為星期一的 meeting 帶來好運，謝謝你不辭辛苦從淡水過來陪我吃水餃。

最後感謝學校在去年暑假舉辦環島鐵騎，讓我認識台灣之美並從中認識了現任女友茹喬，這一年來，因為有你生活更加多采多姿，除了一起運動外，你也教我如何去觀察美的事物，感謝上天讓我認識了你。

## 摘要

在二維平面上讓波色愛因斯坦凝聚(BEC)旋轉，當系統在非對稱位能井  $V = (m/2)[x^2(\omega_0^2 + \Lambda^2) + y^2(\omega_0^2 - \Lambda^2)]$  作用下，且當系統旋轉頻率  $\Omega$  接近位能簡諧頻率  $\omega_0$  及設定  $\Lambda^2 = \omega_0^2 - \Omega^2$  時，BEC 會變成一維方向無限延伸的系統。此時可由藍道規範(Landau gauge)寫下 Gross-Pitaevskii 能量泛函，其中能階為最低藍道能階(Lowest Landau levels (LLL))的近似。系統表現出旋渦柱(vortex line)的數目  $N_v$  和波函數的 LLL 基底組合數目  $N_c$  關係為  $N_v = N_c - 1$ ，而  $N_v$  (或  $N_c$ ) 是  $\Omega$  的函數。

我們研究加上四次項位能井  $V_q = \lambda x^4$ ，考慮改變  $\lambda$  大小所衍生的量子相變效應。由於其能階不再是 LLL 的近似，需要利用數值計算。研究發現四次項位能井的強束縛(strong confinement)作用往往使  $\lambda = 0$  時的過渡狀態(intermediate state)消失，並且減少旋渦柱的數目  $N_v$ 。我們利用數值方法尋找波函數對應到最低能量的  $N_c$  和波數  $k$ ，發現當  $\Omega < \omega_0$  且當  $\lambda \geq \lambda_c = 2.2$  時，找不到  $N_c \geq 2$  以上的解，也就是沒有旋渦柱的發生。另外改變粒子交互作用力時，發現讓粒子間排斥力變小，系統越不容易產生旋渦柱，此時要讓系統產生旋渦柱唯有讓旋轉頻率  $\Omega$  增加。

# 目錄

Chapter1	緒論.....	1
1.1	波色愛因斯坦凝聚.....	1
1.2	無相互作用力的波色子.....	2
1.3	波色子的特性.....	5
Chapter2	旋轉凝態.....	7
2.1	G-P 方程式和連續流方程式.....	7
2.2	量子化的環流.....	8
2.3	單一值旋渦的結構.....	9
2.4	簡諧位能井下的旋渦.....	11
Chapter3	延伸的 BEC 旋渦.....	12
3.1	BEC 在非對稱的位能井上旋轉.....	12
3.2	G-P 泛函.....	14
3.3	旋渦圖形的分析.....	16
3.3.1	$N_c=1, 2$ 的方法.....	16
3.3.2	$N_c=3, 4$ 的方法.....	16
3.4	旋渦圖形的分析.....	19
3.4.1	奇數家族.....	19
3.4.2	偶數家族.....	20
Chapter4	四次位能井的效應.....	22
4.1	動機.....	22
4.2	能量泛函的解析和數值運算.....	24
4.3	旋轉頻率所對應基底的關係.....	26
4.4	改變粒子相互作用力的效應.....	28
Chapter5	結論.....	30

# Chapter 1 緒論

## 1.1 波色-愛因斯坦凝聚

早在 1925 年，愛因斯坦大膽預測在低溫下，有一群相同的波色子構成的系統，彼此間無任何交互作用，溫度不斷降低，當達到相變溫度(transition temperature)時，該群粒子會大量落在最低能量的基態，他是根據印度物理學家 Bose 之光子統計原理所提出的[1]，此量子狀態被稱為波色-愛因斯坦凝聚(Bose-Einstein condensation)。但直到 1995 年，利用超強的雷射冷卻技術來冷卻原子，讓此實驗實現波色-愛因斯坦凝聚。在巨觀下表現出量子效應的凝聚態，已成為熱門的研究題目。

利用稀薄原子氣體鉀(Rubidium), 鈉(sodium)的波色-愛因斯坦凝聚, 此實驗提供了獨特機會在巨觀尺度下來觀察量子現象, 而此系統有別於一般的氣體, 液體, 固體, 所以我們將要探討其物理性質。

實現氣態原子的波色-愛因斯坦凝聚的實驗[2]是在 1995 年, 由美國科羅拉多大學的 Cornell、Wieman 和麻省理工學院的 Ketterle 達成, 利用雷射冷卻技術使鈉原子降溫, 但卻不能讓高密度且低溫的鈉原子達到凝聚狀態, 因此利用蒸發冷卻平台(evaporative cooling stage)方法慢慢地移除這些原子的能量, 達到凝聚。

基本粒子可以依照自旋為整數或是半整數可分為波色子(bosons)與費米子(fermions), 波色子是整數自旋的粒子, 相同的波色子在系統中是對稱的, 當兩兩交換其粒子而波函數並不改變, 對費米子而言它是反對稱的, 會相差一個負號。對一群等同且自由的粒子, 其粒子質量為  $m$ , 粒子空間密度為  $n$ , 蒲朗克常數為  $h = 2\pi\hbar$ , 這些自由粒子的能量為

$$E = E_x + E_y + E_z = \frac{\hbar^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = C \cdot \hbar^2 n^{2/3} / m \quad (1.1)$$

其中  $C$  為常數, 當除以波茲曼常數(Boltzmann constant)  $k$  時, 我們可以得到凝結態(condensation)的臨界溫度  $T_c$ ,

$$T_c = C \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{mk} \quad (1.2)$$

對液態氦 He 而言, 在飽和蒸氣壓下可以測得在臨界溫度 3.13 K, 液態氦在此臨界溫度以下時就變成超流體, 超流體有什麼特性呢? 如果把它置放到沒有蓋子的杯子裡頭, 它會爬上杯緣流到外頭去; 如果讓杯子做旋轉, 裡頭的超流體氦並不會跟著轉動, 因為液體的粘滯力(viscosity)為零。

在實驗上, 氣體都是非勻相的, 因為它們通常被束縛在位能井上, 其中位能為簡諧振盪(harmonic-oscillator)的位能井, 如果總粒子數為  $N$ , 原子雲的空間密度為  $N/R^3$ , 其中原子雲的尺度  $R$  大約為  $(kT/m\omega_0^2)^{1/2}$ , 其中  $\omega_0$  為簡諧振子的角頻率, 代回(1.2)的空間密度  $n \approx N/R^3$ , 可以得到臨界溫度  $T_c$ 。

## 1.2 無交互作用力的波色子

在熱平衡下無交互作用力的波色子，在某一單粒子狀態 $\nu$  (single-particle state)所佔據的平均數目(mean occupation number)被定義為波色分布函數

$$f^0(\epsilon_\nu) = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/kT} - 1} \quad (1.3)$$

其中 $\epsilon_\nu$ 代表單粒子態的能量在某特定束縛能下，讓粒子數固定，且化學能 $\mu$ 也在分布函數裡頭，代表控制著粒子 $N$ 和溫度 $T$ 的變因，因此總粒子數是佔據各個能階的粒子數和，所以在不同狀況下，這一項 $\zeta = e^{(\mu/kT)}$ 會跟著改變，假設有最低能量 $\epsilon_{\min}$ 在最低能階上，在臨界溫度之上通常這一項都會小於1，如果在臨界溫度以下，這粒子變成了凝聚態，此時 $\zeta = 1$ 。圖 1.1 為在不同 $\zeta$ 值下，所對應的分布函數(1.3)

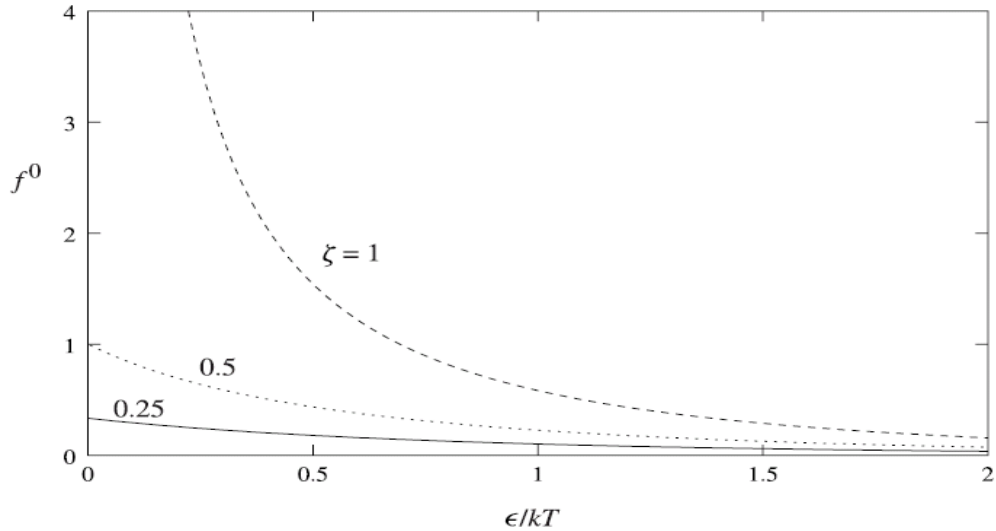


圖 1.1 分布函數對粒子能量關係[3]

在高溫下，量子統計的效應就會被忽略掉，因此粒子的分布函數近似於古典的波茲曼分布函數(Boltzmann distribution)

$$f^0(\epsilon_\nu) \approx e^{-(\epsilon_\nu - \mu)/kT} \quad (1.4)$$

化學能會遠小於最低能量 $\epsilon_{\min}$ 在高溫下，因為平均分布函數在不同狀態下都遠小於1，也就是 $\exp[(\mu - \epsilon_{\min})/kT]$ 也遠小於1，換句話說，當逐漸降低系統溫度時，化學能 $\mu$ 會漸漸地增加，而分布函數值也會增加，然而化學能 $\mu$ 是不會超過最低能量 $\epsilon_{\min}$ ，否則從(1.5)會計算出 $\epsilon_{\min}$ 為負數，是沒有物理意義的。因此在任一激

發態中(excited single-particle)的平均數目都不會超過 $\frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \epsilon_{\min})/kT} - 1}$ 。如果在激發態上的粒子少於總粒子數 $N$ ，而剩餘數就落在基態上，且數目夠大，這就是波色-愛因斯坦凝聚。

當我們在計算熱力學的物理特性時，通常會把所有的能態疊加起來，當能態數目夠大且能階變化得很平緩時，會引進態密度(density of states)的概念，當描述低能激發態的態密度情形，因為基態的態密度沒有很完善的定義，首先在三維空間中，一個自由粒子在某一特定狀態，在相空間中，平均在每單位體積  $(2\pi\hbar)^3$  中有一個量子態，在動量空間中，有一個小於半徑  $p$  的體積球為  $4\pi p^3/3$ ，其中動量和能量關係為  $\varepsilon_p = p^2/2m$ ，對於能量小於  $\varepsilon$  的全部態數目為  $G(\varepsilon)$ ，

$$G(\varepsilon) = V \frac{4\pi (2m\varepsilon)^{3/2}}{3 (2\pi\hbar)^3} = V \frac{2^{1/2} (m\varepsilon)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (1.6)$$

其中系統的體積為  $V$ ；通常我們也計算能量介於  $\varepsilon$  和  $\varepsilon + d\varepsilon$  之間的態數目，即態密度(density of state)

$$g(\varepsilon) = \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \varepsilon^{1/2} \quad (1.7)$$

對自由粒子而言，在  $d$  維尺度下有  $g(\varepsilon) \propto \varepsilon^{(d/2-1)}$  的關係，因此在二維尺度下態數目和粒子能量的關係是獨立的。

接下來考慮到粒子處在各向異(anisotropic)的簡諧位能井  $V(r)$

$$V(r) = \frac{1}{2} m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2) \quad (1.8)$$

從薛丁格方程式計算出其能階  $\varepsilon(n_1, n_2, n_3)$ ，

$$\varepsilon(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2 + (n_3 + \frac{1}{2})\hbar\omega_3 \quad (1.9)$$

其中  $n_i$  為大於或等於零的整數。我們現在來計算小於能量  $\varepsilon$  的態數目，如果能量  $\hbar\omega$  夠大，可以視  $n_i$  為連續的變數並忽略零點的能量，因此能量座標系統下有三個參數  $\varepsilon_i = \hbar\omega_i n_i$ ，有一個等能量常數表面  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ ，而態數目  $G(\varepsilon)$  和第一八分之圓(first octant)的體積成正比，

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \int_0^\varepsilon d\varepsilon_1 \int_0^{\varepsilon-\varepsilon_1} d\varepsilon_2 \int_0^{\varepsilon-\varepsilon_1-\varepsilon_2} d\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon^3}{6\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (1.10)$$

$$\text{又因為態密度 } g(\varepsilon) = dG/d\varepsilon, \quad g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (1.11)$$

因此在  $d$  維簡諧位能井下，我們可以得到如下的態密度結果，

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{d-1}}{(d-1)! \prod_{i=1}^d \hbar\omega_i} \quad (1.12)$$

我們知道態密度和能量  $\varepsilon$  的次方是成正比的，而系統的態密度也可以如此表示

$$g(\varepsilon) = C_\alpha \varepsilon^{\alpha-1} \quad (1.13)$$

$$\text{從(1.11)和(1.13)得知, } C_3 = \frac{1}{2\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (1.14)$$

當總粒子數為  $N$  且數目夠大，又可忽略零點能量，激發態的粒子數可以表示成

$$N_{ex} = \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) f^0(\varepsilon) \quad (1.15)$$

如果化學能  $\mu = 0$  可以使激發態的數目達到最大，所以激發態可以容納全部的粒子，因此臨界溫度將由激發態的粒子數來決定，

$$N = N_{ex}(T_c, \mu = 0) = \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \frac{1}{e^{\varepsilon/kT_c} - 1} \quad (1.16)$$

接下來把(1.16)引進無因此參數  $x = \varepsilon/kT_c$ ，可以改成

$$N = C_\alpha (kT_c)^\alpha \int_0^{\infty} dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) (kT_c)^\alpha \quad (1.17)$$

其中  $\Gamma(\alpha)$  是 gamma 函數而  $\zeta(\alpha)$  是 Riemann zeta 函數，從(1.17)可以得到

$$kT_c = \frac{N^{1/\alpha}}{[C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)]^{1/\alpha}} \quad (1.18)$$

在三維簡諧位能井下，把前面(1.14)  $C_3$  代入(1.18)得到更實用的形式

$$kT_c = \frac{\hbar \bar{\omega} N^{1/3}}{[\zeta(3)]^{1/3}} \approx 0.94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3} \quad (1.19)$$

其中  $\bar{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3}$  是這三個振盪頻率的幾何平均數。

在臨界溫度以下，而  $\mu = 0$  且  $\alpha > 0$  激發態的粒子數目，

$$N_{ex}(T) = C_\alpha \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1} = C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) (kT)^\alpha \quad (1.20)$$

再和(1.18)的總粒子數  $N$  相比較，可以得到

$$N_{ex} = N \left( \frac{T}{T_c} \right)^\alpha \quad (1.21)$$

因此凝聚態的粒子數目可以如下表示

$$N_0(T) = N - N_{ex}(T) \quad \text{或} \quad N_0 = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^\alpha \right] \quad (1.22)$$

對一群粒子在三維的箱子裡頭，其  $\alpha = 3/2$ ；如果束縛在簡諧振盪的位能井裡頭，其  $\alpha = 3$ 。 $\alpha$  值越大，一旦過了臨界溫度以下時，會有許多粒子掉到凝聚態上。



### 1.3 波色子的特性

波色子的總自旋必為整數，而一個波色子必由偶數個費米子所組成而成，而原子的總自旋數即中子的數量，如果中子數  $N$  是偶數，此原子即為波色子，而中子數  $N$  是奇數，即為費米子。如果鹼金屬的核磁偶極矩  $\mu$ ，被定義  $z$  方向上磁偶極矩運算子的投影量或期望值，核的磁偶極矩在  $z$  方向的分量為  $m_I \hbar$ ，其中最大值，

$$\mu = \langle I, m_I = I | \mu_z | I, m_I = I \rangle \quad (1.23)$$

到目前，完成波色-愛因斯坦凝聚的實驗中，電子的總自旋量子數為  $1/2$ ，其中大部分的核的自旋數(nuclear spin)都為  $I = 3/2$  ( $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{23}\text{Na}$ , 和  $^7\text{Li}$ )，鹼金屬電子層的結構較簡單，除了一個電子在最外層，其它都在封閉的內層殼裡，所以核自旋數與電子自旋數耦合時，就是所謂的精細結構，耦合的作用把它表示漢米頓(Hamiltonian)

$$H_{hf} = AI \cdot J \quad (1.24)$$

其中  $I$  和  $J$  各為核自旋和電子角動量的運算子， $A$  為常數，而總角動量  $F = I + J$ ，鹼金屬和氫原子的電子基態  $S = 1/2$ ，因此我們可以計算出其分裂的能階差，

$$\Delta E_{hf} = h\nu_{hf} = \left(I + \frac{1}{2}\right)A \quad (1.25)$$

以鈉原子當例子，其核自旋數  $I = 3/2$ ，因此總角動量  $F = 1$  或  $F = 2$ ，所以三重簡併對應的能量  $E_1 = -5A/4$ ，另一能量  $E_2 = 3A/4$  (五重簡併態)，兩個能階差值為  $\Delta E_{hf} = E_2 - E_1 = 2A$ 。如果再考慮外加磁場  $B$  在  $z$  方向上，磁場  $B$  與原子的磁偶極矩交互作用，這是我們所稱的齊曼效應(Zeeman effect)，其中漢米頓的表示如下，

$$H_{spin} = AI \cdot J + CJ_z + DI_z \quad (1.26)$$

其中  $C = g\mu_B B$  和  $D = -\frac{\mu}{I} B$ ， $g$  因子可以由相對論性 Dirac 方程推得，而  $\mu_B$  為玻爾磁子。當核磁矩  $I = 3/2$ ，要取得簡併態的能階，可以對  $H_{spin}$  對角化，基底以  $|m_I, m_J\rangle$  來表示，所以對應投影值  $m_I = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$ ， $m_J = 1/2, -1/2$ ，在外加磁場下由原本兩個能階分裂成八個能階。

下一頁圖 1.2 即為齊曼效應下能階分裂情形，許多實驗要捕捉鈉原子都採用低場(low field)捕捉[4]，如果齊曼能階對應之磁矩與外加磁場方向相反，則該類能階之磁位能隨磁場增加而變大，因此原子處於該類齊曼效應時，其磁位能之最低點即為磁場最低點，會留在磁井中心；反之，為強場捕捉原子，將自動離開磁位能井中心。

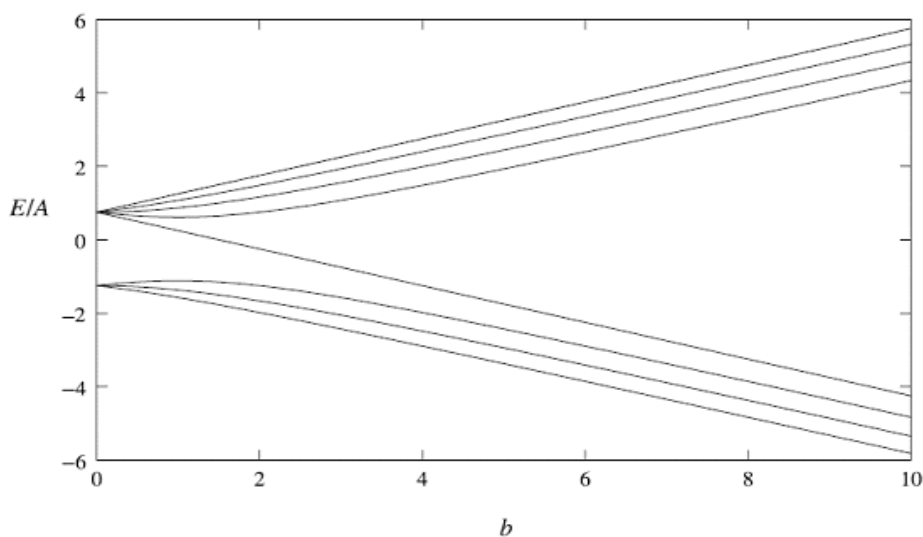


圖 1.2 鈉原子( $I=3/2$ )在磁場下的精細結構，  
其中  $A = \Delta E_{hf} / 2$ ， $b = C/A = 4\mu_B B / \Delta E_{hf}$ 。

接下來是關於原子間的作用力，彼此的作用力是吸引或排斥，我們看散射長度(scattering lengths)，這是在低能下兩個原子相互作用的特色，當速度較慢的原子去碰撞一個硬核(hard core)原子(半徑  $r_c$ )，由徑向 Schrodinger 方程推導，在硬核外表現出來的是自由粒子，其中  $u(r_c) = 0$ ，因此算出來的波函數  $u(r) = A \sin(kr + \delta_s)$ ， $A$  為常數， $k = \sqrt{2mE/\hbar}$ ， $\delta_s = -k \cdot r_c$ ，波函數是所謂的球面波(s-wave)，此時我們可以從相位  $\delta_s$  來求散射長度，

$$\delta_s(k) \approx -k \cdot a_s + O(k^2) \quad (1.27)$$

(1.27)中，當波數  $k$  很小時，因此可以得到  $a_s = r_c$  就是所謂的散射長度，也就是那顆硬核的半徑。散射長度  $a_s$  是硬核的半徑的函數，其中  $a_s$  可以正也可以負，正數表示原子間互相排斥，負數代表相互吸引。

#### 參考資料

- [1] S. N. Bose, Z. phys. 26, 178(1924)
- [2] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman and E. A. Cornell Science 269, 198(1995)
- [3] C. J. Pethick, H. Smith, " Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases" , Cambridge University Press(2002)
- [4] 韓殿君, 物理雙月刊, 廿七卷二期(2005)

## Chapter 2 旋轉凝態(rotating condensates)

### 2.1 G-P 方程式&連續流方程式

首先我們要先來了解 Gross-Pitaevskii equation(簡稱 G-P 方程)，描述在 0K 的溫度下，一群非均相波色粒子們的系統行為描述且散射長度遠小於粒子的平均間距，並考慮有效碰撞  $U_0\delta(r-r')$  狀況下，利用了平均場理論，而令全部粒子都落在相同的狀態，可以寫成，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r)+V(r)\psi(r)+U_0|\psi(r)|^2\psi(r)=\mu\psi(r) \quad (2.1)$$

這就是與時間無關 G-P 方程，其中包含了外加位能  $V$  還有非線性項的  $U_0|\psi(r)|^2$ 。如果是有關動態的問題，就和時間相關，因此時間有關的 G-P 方程如下[1]，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t)+V(r)\psi(r,t)+U_0|\psi(r,t)|^2\psi(r,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} \quad (2.2)$$

把(2.2)乘上  $\psi^*(r,t)$  再減掉  $[(2.2)\cdot\psi^*(r,t)]^*$  可以得到，

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t}+\nabla\cdot\left[\frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)\right]=0 \quad (2.3)$$

(2.3)可以寫成粒子密度的連續流方程式，

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(nv)=0 \quad (2.4)$$

從(2.3)和(2.4)比較，可以得到凝態的速度  $v$ ，

$$v=\frac{\hbar}{2mi}\frac{(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)}{|\psi|^2} \quad (2.5)$$

如果我們寫下波函數的振幅和相位關係， $\psi=f e^{i\phi}$ ，可以來表示密度和速度形式，

$$n=f^2, \quad v=\frac{\hbar}{m}\nabla\phi \quad (2.6)$$

從(2.6)的速度知道，凝態的運動是和位能分布有關的，速度是對某一個數量值作梯度(gradient)，其數量值  $A$  代表著「速度位能」(velocity potential)，可以表示成  $A=\hbar\phi/m$ ，由於  $\phi$  不是奇異點(singularity)，因此可得到此凝態運動狀態是非旋轉的結論。

$$\nabla\times v=\frac{\hbar}{m}\nabla\times\nabla\phi=0 \quad (2.7)$$

也可以說明此速度場(velocity field)是不會旋轉的，除非相位  $\phi$  中有奇異點，說明奇異點上還有其它的定義，所以此運動行為可能就會被定義所限制。

## 2.2 量子化的環流(quantized circulation)

有許多 BEC 的實驗，是在了解在旋轉下的凝態有什麼物理特性[2]，因此我們沿續上一節所提的，當有奇異點存在時，如果繞奇異點一圈，波函數的相位改變量將是  $2\pi$  的整數倍，其中  $\ell$  是整數，

$$\Delta\phi = \oint \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\ell \quad (2.8)$$

因此環流量值  $\Gamma$  做一圈封閉的線可以表示成，

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} 2\pi\ell = \ell \frac{h}{m} \quad (2.9)$$

它被證明出  $\Gamma$  是有量子化的情形，以  $h/m$  為單位，考慮一個簡單的位能井，會隨著方位角的方向旋轉，其中滿足單值(single-valuedness)的條件，此波函數會隨著  $e^{i\ell\phi}$  而改變，其中  $\phi$  為方向角沿著  $z$  軸，而  $\rho$  為離  $z$  軸的距離，所以速度

$$v_\phi = \ell \frac{h}{2\pi m \rho} \quad (2.10)$$

如果對  $z$  軸繞一個封閉線，此環流量是  $h/m$ ，但如果  $\ell \neq 0$ ，此凝態波函數會消失在位能的對稱軸上，相當於圖案結構的旋渦線(vortex line)(圖 2.1)

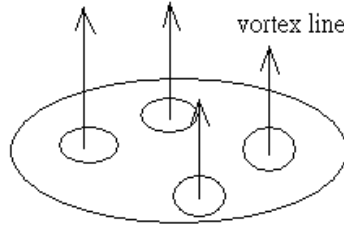


圖 2.1

對一個軸對稱的位能來說，且在軸上有奇異點的狀態，每個粒子沿著  $z$  軸所帶的角動量為  $\ell h$ ，而全部的角動量  $L$  為  $N\ell h$ ，但如果奇異點不在軸上，其角動量將不是  $N\ell h$ 。對於對稱軸不同位置的分布狀態如圖 2.1，其環流量子化會等於每一個粒子所帶來的角動量以其對稱軸而言，對其它環流而言也仍然量子化，但不代表每個粒子的角動量都被量子化，所以(2.7)可以改寫成更一般的形式，

$$\nabla \times \mathbf{v} = \hat{z} \frac{\ell h}{m} \delta^2(\rho) \quad (2.11)$$

其中  $\delta^2$  是一個二維的 Dirac delta 函數， $\rho = (x, y)$  是對稱軸在平面上的密度分布函數，當有許多旋渦時，(2.11)右邊的方程式所代表旋渦線的方向，也就是  $z$  軸上的向量和，而 Dirac delta 函數的強度大小也就是環流量值。

### 2.3 單一值旋渦(single vortex)的結構

考慮一個軸對稱的位能而言，假設波函數的位置改變和  $e^{i\ell\phi}$  有關，因此我們可以寫出凝態的波函數在圓柱座標下，

$$\psi(r) = f(\rho, z)e^{i\ell\phi} \quad (2.12)$$

其中  $f$  為實數，而系統的能量可以寫成，

$$E(\psi) = \int dr \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(r)|^2 + V(r) |\psi(r)|^2 + \frac{1}{2} U_0 |\psi(r)|^4 \right] \quad (2.13)$$

把(2.12)代入(2.13)，我們可以得到，

$$E(\psi) = \int dr \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\hbar^2}{2m} l^2 \frac{f^2}{\rho^2} + V(\rho, z) f^2 + \frac{U_0}{2} f^4 \right\} \quad (2.14)$$

我們得到的結果和另一個和位置無關的任意相位的波函數相比，會多出  $1/\rho^2$  的項，此動能是方位角的運動方向(azimuthal motion)的值，

$$\frac{m}{2} f^2 v_\phi^2 = \frac{\hbar^2 l^2 f^2}{2m\rho^2} \quad (2.15)$$

從(2.12)和(2.13)代入  $\delta(E - \mu N) = 0$ ，我們可以得到(2.16)，它可以決定一開始旋渦的能量在均質中或位能井中。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{df}{d\rho} \right) + \frac{d^2 f}{dz^2} \right] + \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} l^2 f + V(\rho, z) f + U_0 f^3 = \mu f \quad (2.16)$$

如果考慮在等高的位能井中，可以假設  $V(\rho, z) = 0$ ，因此基態的波函數將不是  $z$  的函數，表示我們對  $z$  微分，波函數會為 0，由於漩渦線的重要性，我們選擇單旋渦來探討，因此令量子數  $\ell = 1$ ，在遠距離對徑向微分時，向心位能的部分  $\propto 1/\rho^2$  會顯得沒那麼重要，因此波函數的振幅  $f = f_0 \equiv (\mu/U_0)^{1/2}$ ，如果在近距離時，波函數將隨著  $\rho$  改變，將表現出帶著單位角動量的自由粒子在二維平面上。當同調長度  $\xi$  很大時，同調長度可以當長度單位來測量，

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = nU_0 = \mu \quad (2.17)$$

其中  $n = f_0^2$  是遠離旋渦的密度，接下來我們做單位轉換  $x = \rho/\xi$ ，同時對波函數的量值改成無因次單位， $\chi = f/f_0$ ，因此能量密度  $\varepsilon$  可以表示成

$$\varepsilon = n^2 U_0 \left[ \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \frac{\chi^2}{x^2} + \frac{1}{2} \chi^4 \right] \quad (2.18)$$

所以 G-P 方程(2.16)可以改寫成

$$-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\chi}{dx} \right) + \frac{\chi^2}{x^2} + \chi^3 - \chi = 0 \quad (2.19)$$

用數值方法來得到此解，其解在下一頁的圖 2.2，實線部分為數值解，但此函數很接近此形式  $x/(2+x^2)^{1/2}$ ，以虛線來表示。

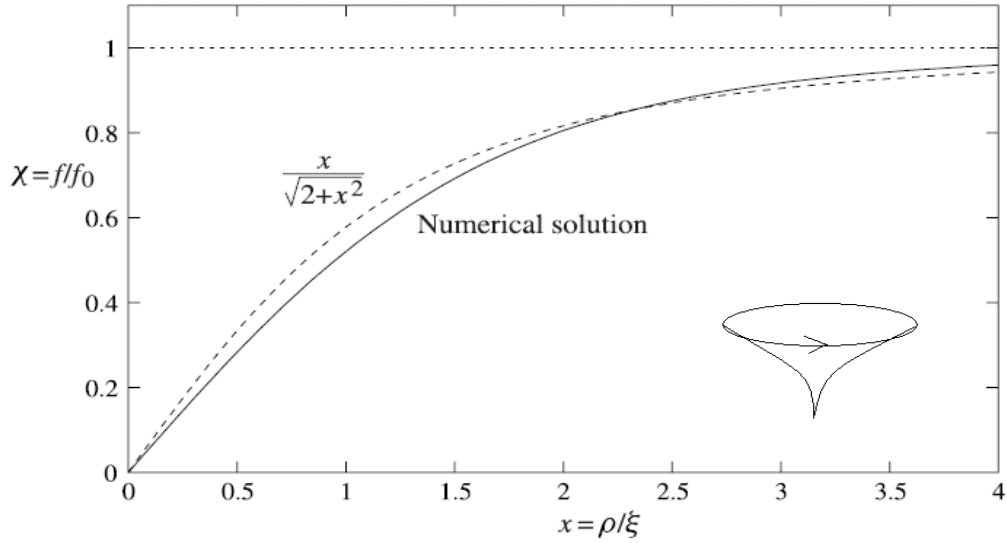


圖 2.2 單一值旋渦的凝態波函數和徑方向

從圖 2.2 的右下角為此函數的密度( $n$ )分布圖，現在來計算此旋渦的能量，也就是在沒有轉動此系統的能量，再加上粒子旋轉所帶來的動能，因此能量  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \int_0^b 2\pi\rho d\rho \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{df}{d\rho} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{f^2}{\rho^2} + \frac{U_0}{2} f^4 \right] \quad (2.20)$$

其中裡頭第二項就是方位角的動能，它跟著  $f^2/\rho^2$  改變，因為積分值為  $\log$  形式，所以到距離為無窮大時，其能量值會發散，所以距離我們可以選擇適當的距離，大約如同調長度大小。

我們再來考慮多值量子數的環流，即  $|\ell| > 1$ ，因此只要改變向心力的位能部分  $\sim 1/x^2$ ，即乘上  $\ell^2$ ，關於速度的分布，從遠距離到旋渦中心，速度隨著  $\ell\hbar/m\rho$  改變，因此旋轉運動所帶來的動能為

$$\varepsilon_v \approx \ell^2 \pi n \frac{\hbar^2}{m} \ln \frac{b}{\xi} \quad (2.21)$$

接下來要解波函數，只要在(2.19)的第二項乘上  $\ell^2$  即可，當  $\rho$  很小時，其波函數會表現和  $\rho^{|\ell|}$  有關，也就此粒子在二維平面上帶著角動量  $\ell\hbar$ ，因此相同環流下，多值量子的旋渦所帶的能量高於單值的旋渦，此暗示多值量子態不易出現在平衡系統中。

## 2.4 簡諧位能井下的旋渦

接下來要計算在有位能井下所形成 BEC 的旋渦能量[3]，估算在凝態下最低角速度，所以我們考慮在簡諧位能井下並固定對著  $z$  軸旋轉，如果粒子數夠多，可以使用 Thomas-Fermi 近似(忽略動能項)來描述非旋轉的原子雲，此旋渦的核中心落在  $z$  軸上，它可以決定同調長度，但和原子雲的尺度相比是較小的，所以從(2.17)知可以重新改寫， $\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = n(0)U_0 = \mu$ ，其中  $n(0)$  為沒有旋轉的中心密度。另外化學能是和原子雲半徑  $R$  有關，因此化學能  $\mu = m\omega_{\perp}^2 R^2/2$ ，而  $\omega_{\perp}$  是振盪頻率，把上面化學能關係結合，可以得到

$$\frac{\xi}{R} = \frac{\hbar\omega_{\perp}}{2\mu} \quad (2.22)$$

說明了同調長度  $\xi$  比原子雲的半徑  $R$  小，如果化學能大於簡諧振子的能量，表示滿足 Thomas-Fermi 近似。而旋渦核外的密度跟著  $R$  改變，而關於旋渦外的能量，取半徑  $\rho_1$  介於核和原子雲半徑之間( $\xi \ll \rho_1 \ll R$ )，為均質的旋渦的能量，如果在更遠一點的距離，此時密度不會因為旋渦而造成影響，而速度是受到旋渦運動所決定的，因此計算遠距離的動能可以由流體力學方法。

### 參考資料

- [1] A. L. Fetter, Phys. Mod. 81(2009)
- [2] A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, J. Phys. : Condens. Matter 13, 135(2001)
- [3] E. Lundh, C. J. Pethick, and H. Smith, Phys. Rev. A 55, 2126(1997)



## Chapter 3 延伸的 BEC 旋渦

### 3.1 BEC 在非對稱的位能井上旋轉

BEC 的旋渦晶格(vortex lattice)在對稱位能井的問題，藉由 G-P 方程和 Thomas-Fermi 近似方法來解決，實驗上有觀察到當旋轉系統  $\Omega > \omega_{\perp}$  (簡諧位能的振盪頻率)，而  $\Omega$  漸漸增加，原本出現的旋渦會從剛開始不規則到最後消失[1]。然而有些團隊在研究非均向性的位能井下，有一些有趣的物理現象，當波色子旋轉來到臨界轉速( $\Omega \sim \omega_0$ )，此時平面上的粒子會在某一方向上做自由延伸。

非均向性的束縛(trap)位能井可以看非對性的加上對稱的位能井，抵消另一個位能井的方向，讓另一方向自由延伸，因為我們希望處理似二維平面(x-y 平面)的氣體，因此實驗在 z 方向上可以給予很強的束縛位能， $(1/2)m\omega_z^2 z^2$ ，令  $\omega_z \gg \omega_0$ ，所表現出來的行為會束縛在 x-y 平面上，先找到對稱位能井下的波函數並對應到的最低的 G-P 泛函能量解(3.1)。

$$E[\Psi_0] = \int dV (E_k + E_h + E_i + E_r) \quad (3.1)$$

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} |\bar{\nabla} \Psi_0|^2 \quad (3.2)$$

$$E_h = \frac{[m\omega_0^2(x^2 + y^2)]}{2} |\Psi_0|^2 \quad (3.3)$$

$$E_i = \frac{g}{2} |\Psi_0|^4 \quad (3.4)$$

$$E_r = -\Psi_0^* \bar{\Omega} \cdot \bar{L} \Psi_0 \quad (3.5)$$

其中  $E_k$  為動能項， $E_h$  為簡諧位能項， $E_i$  為相互作用力項， $E_r$  為旋轉項。

接下來要探討為什麼旋轉項的前面是負值呢？在軸上如果是對稱的位能井，可以了解角動量在軸上是守恆的，假設在不對稱的位能井上，角動量是不守恆的，所以要尋找平衡態在一些條件下。我們在找平衡態時，習慣在旋轉座標系下來觀看，因為在參考座標系下，旋轉的束縛能(rotating traps)會隨著時間而改變，如果換成旋轉座標系下，旋轉束縛位能就不會跟著時間改變，因此旋轉座標的原子雲能量  $E'$  和非旋轉座標的原子雲能量  $E$  關係，

$$E' = E - \bar{L} \cdot \bar{\Omega} \quad (3.6)$$

其中  $\bar{L}$  為角動量，而  $\bar{\Omega}$  為角速度可以來描述旋轉位能，因此可以去找到最低能量  $E'$  的狀態或波函數。

在這裡的  $\bar{L}$  是角動量的運算子， $\bar{\Omega}$  為沿著 z 軸的旋轉方向，取  $\bar{\Omega} = \Omega \hat{z}$ ，因此旋轉項改成，

$$E_r = -\Omega \Psi_0^* L_z \Psi_0 = i\hbar \Omega \Psi_0^* \left[ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right] \Psi_0 \quad (3.7)$$



接下來考慮非均向性(anisotropy)的束縛能，所以再加上此項，

$$E_{an}[\Psi_0] = \int dV \frac{m\Lambda^2(x^2 - y^2)}{2} |\Psi_0|^2 \quad (3.8)$$

而  $\Lambda$  可以做調整，根據系統旋速而調整，再把兩項的束縛能相加，可以表示成

$$V_{tot} = E_h + E_{an} = \frac{m}{2} [x^2(\omega_0^2 + \Lambda^2) + y^2(\omega_0^2 - \Lambda^2)] \quad (3.9)$$

當  $\Omega \rightarrow \omega_0$ ，系統會在  $x$  方向給予更多的束縛，而在  $y$  方向會漸漸地自由延伸，可以假設  $\Lambda^2 = \omega_0^2 - \Omega^2$ ，此系統減少  $y$  方向的束縛，BEC 的旋渦就像一條通道，延伸到無窮遠處，在  $x$  方向上位能像拋物線束縛住粒子。此非均向的比例為

$$\eta = \frac{\Lambda^2}{\omega_0^2} \quad (3.10)$$

如果  $\Lambda^2 \geq \omega_0^2 - \Omega^2$ ，表示系統的向心力克服  $y$  方向的束縛位能，因此粒子束縛力的有效作用較小，如果等號成立，將有許多的簡併狀態的出現，類似於量子 Hall 效應中的最低 Landau 能階(Lowest Landau level)來描述旋渦的波函數，其中需要一些條件，

$$\delta = 1 - \Omega \ll 1, \eta \ll 1 \quad (3.11)$$

$$\frac{\eta}{2\delta} = \lambda \approx 1 \quad (3.12)$$

而圖 3.1 為非均向比例由小到大的情形[2]。 $\lambda$  從左到右，從上到下分別 0.05, 0.25, 0.85, 0.90， $\lambda$  有兩種參數，如果非均向比例  $\eta$  很小，但只要系統的旋轉角速度接近  $\omega_0$ ，也會有相同的結果，往較弱束縛方向延伸，但均向比例較大的情形，BEC 的延伸效果也較佳。

如果沒有考慮作用力項下，單一粒子的本徵態就是藍道能階，能階之間大小約為  $2\hbar\Omega$ ，在低密度下，利用平均場理論， $gn_{2D} \ll \hbar\Omega$ ，其中  $n_{2D}$  為平面密度，所以這些能階都可以視為藍道能階[4]。

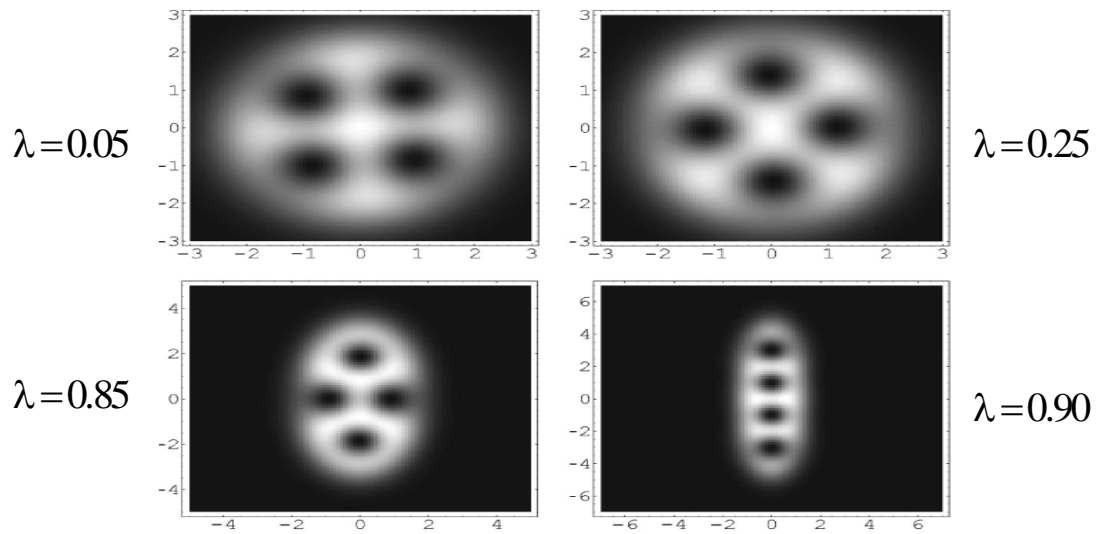


圖 3.1 四種不同非均向比例的密度圖[2]

### 3.2 G-P 泛函(functional)

在規範轉換下波函數可以表示為  $\Psi_0 = \Psi e^{-\frac{i}{\hbar}m\Omega y}$ ，可代回(3.1)，其中把  $E_h$  改寫成總束縛能  $V_{tot}$ ，因為在非均向的位能井，並利用  $\Lambda^2 = \omega_0^2 - \Omega^2$ ，我們可以得到各項的結果，

$$E_k = \frac{m}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) - \frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\nabla^2\Psi + \Psi^*\Omega i\hbar y\frac{\partial}{\partial x}\Psi + \Psi^*\Omega i\hbar x\frac{\partial}{\partial y}\Psi \quad (3.13)$$

$$V_{tot} = E_h + E_{an} = \Psi^*\frac{m}{2}\left[x^2(2\omega_0^2 - \Omega^2) + y^2(\Omega^2)\right]\Psi \quad (3.14)$$

$$E_i = \Psi^*\frac{g}{2}|\Psi|^2\Psi \quad (3.15)$$

$$E_r = \Psi^*\left[\Omega^2 m(x^2 - y^2) + i\hbar\Omega\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\Psi \quad (3.16)$$

$$E[\Psi] = \int dV\Psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + mx^2(\Omega^2 + \omega_0^2) + \frac{g}{2}|\Psi|^2 + 2i\hbar\Omega x\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi \quad (3.17)$$

其中  $mx^2(\Omega^2 + \omega_0^2)$  為有效的束縛位能  $V_{eff}$ ， $\Lambda$  和  $\Omega$  的關係只有在  $\Lambda^2 = \omega_0^2 - \Omega_c^2$ ，表示當給予非均向的位能井( $\Lambda$ )時，系統旋轉角頻率要達到  $\Omega_c$ ，上式(3.17)才能成立。接著要做單位的轉換，所以使用振盪長度當基本長度  $a_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ ，而基態的能量  $E_0 = \hbar\omega_0/2$  當作基本能量單位，把  $\Psi$  展開最低能階的特徵函數  $\phi_k$  線性組合(3.18)， $\phi_k$  為動能項、旋轉項和有效位能項運算子的特徵函數，忽略交互作用力項，因為  $E_i$  為非線性項，不好處理，且跟其它項相比， $E_i$  比較小，可以視為微擾項，所以最後算出的能量特徵值再補上  $E_i$ 。

$$\Psi = \sum_k^{N_c} C_k \phi_k \quad (3.18)$$

$C_k$  值取決對應最低能量有關。由於對稱性(波數  $k$  和  $-k$ )且  $y$  方向可視為平面波，波函數可以寫成，

$$\phi_k = A e^{iky} \chi_k(x) \quad (3.19)$$

其中  $A$  為歸一常數；接下來把動能、旋轉、位能運算子作用在  $\phi_k$  (3.22)，在旋轉座標系中， $\phi_k$  就像解 Schrodinger 方程對帶電粒子在磁場中的情形，磁場就在 Landau 規範裡的磁位能所造成的。

$$\hat{H}|\phi_k\rangle = \varepsilon_k|\phi_k\rangle \quad (3.22)$$

從(3.22)化簡，而對  $\chi_k$  可以寫成一維的微分方程，

$$-\frac{d^2}{dx^2}\chi_k + \left[\left(\sqrt{2R}x - \frac{2}{\sqrt{2R}}\frac{\Omega}{\omega_0}k\right)^2 - \varepsilon_k^*\right]\chi_k = 0 \quad (3.21)$$

其中  $\varepsilon_k^* = \varepsilon_k - k^2 \frac{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}$ ，而  $R = 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}$ 。

接下來改變參數  $u = a\left(\sqrt{2R}x - \left(2/\sqrt{2R}\right)(\Omega/\omega_0)k\right)$ ，並選擇  $a = \sqrt[4]{1/2R}$ ，所以

$$\frac{d^2}{du^2} \chi_k + \left(\frac{\varepsilon_k^*}{\sqrt{2R}} - u^2\right) \chi_k = 0 \quad (3.22)$$

上式類似量子簡諧振子方程式，要滿足在無窮遠時  $\chi_k \rightarrow 0$  條件，所以得到特徵函數  $\chi_k$  和特徵值  $\varepsilon_k^*$ ，

$$\chi_k = Ce^{-u^2/2} H_n(u) \text{ 和 } \varepsilon_k^* = (2n+1)\sqrt{2R} \quad (3.23)$$

其中  $H_n$  為 Hemite 多項式，C 為歸一常數，當  $n=0$  時， $\chi_k$  在最低 Landau 能階中，

$$\chi_k = \sqrt{\frac{2R}{\pi^2}} e^{-\sqrt{2R}\left(x - \frac{\Omega}{R\omega_0}k\right)^2} \text{ 和 } \varepsilon_k = \sqrt{2R} + k^2 \frac{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)} \quad (3.33)$$

從(3.33)中， $\varepsilon_k$  與  $k$  消散關係(dispersion relation)說明系統角頻率  $\Omega$  越接近簡諧頻率  $\omega_0$ ， $\varepsilon_k \approx \sqrt{2R}$ ，就像對全部的波數而言，束縛位能井都消失了。所以(3.33)的  $\chi_k$  代回(3.19)，可以得到此系統波函數  $\Psi_0$  的解析解。

由於波函數  $\Psi_0$  已求得，最後來看 G-P 泛函的形式，代回(3.17)

$$E = \sum_k^{N_c} |C_k|^2 \varepsilon_k + \frac{g}{2} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4}^{N_c} C_{k_1}^* C_{k_2}^* C_{k_3} C_{k_4} \int dx \chi_{k_1} \chi_{k_2} \chi_{k_3} \chi_{k_4} \delta_{k_3+k_4, k_1+k_2} \quad (3.34)$$

其中  $N_c$  為波函數的基底組合數目，如果奇數個基底組合，稱為奇數家族(odd family)，而偶數個則為偶數家族，兩者表現出來的圖形是不太一樣的，奇數家族有零個或偶數個旋渦柱(圖 3.2)，偶數家族則有奇數個旋渦柱(圖 3.3)。

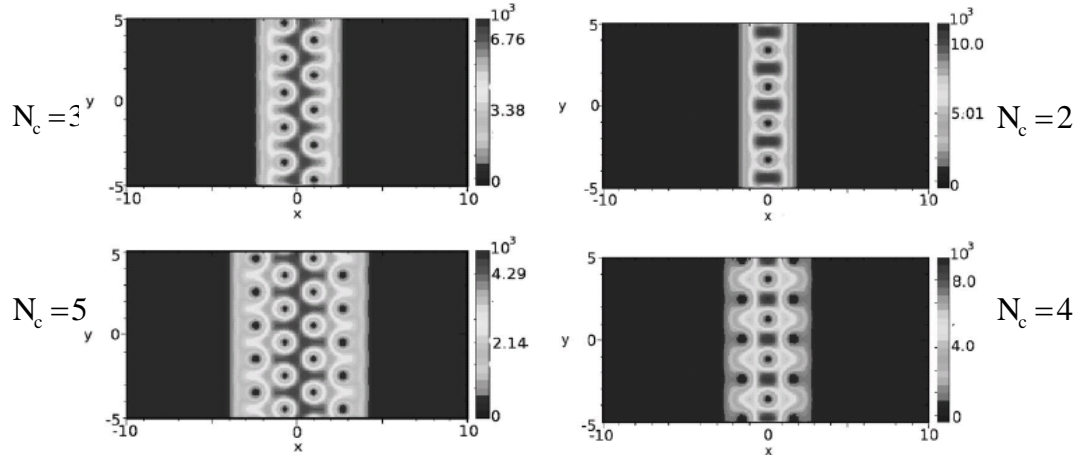


圖 3.2 奇數家族[3]

圖 3.3 偶數家族[3]

### 3.3 最低能階的旋渦

#### 3.3.1 $N_c = 1, 2$ 的方法

把波函數作基底展開  $\Psi = \sum_k C_k \phi_k$ ，也是由許多的波函數做組合，我們也已寫出  $\phi_k$  的解析解，是高斯函數的形式，把它代入 G-P 泛函，可以得到系統的能量 E 式子(3.34)，前面提到的線性組合數目為  $N_c$ ，所以我們先看  $N_c = 1$  的波函數， $\Psi = C_k \phi_k$ ，所以要判斷出 k 和 E 的關係求 k，因此寫出  $E(k)$  形式[3]，

$$E = \varepsilon_k |C_k|^2 + \frac{g}{2} |C_k|^4 I_k \quad (3.35)$$

其中  $I_k = \int \chi_k^4 dx$ ，波函數的係數和粒子數有關，利用總粒子數  $N$  守恆，

$$\int dV (|\Psi|^2 - n) = 0 \quad (3.36)$$

可以得到  $C_k = \sqrt{N}$ ，再把它代回(3.35)，再對  $dE/dk = 0$ ； $d^2E/dk^2 > 0$  找到當  $k=0$  時，有能量最小值， $E_{\min} = \varepsilon_k N + gN^2 I_k / 2$ ，利用  $\mu = dE/dN$  求得化學能  $\mu$ ， $\mu = \varepsilon_k + gN I_k$ 。

接下來求  $N_c = 2$  的波函數，由於對稱的關係，可以假設基底的對應波數為  $(k, -k)$ ，如此也可以得到能量最小值。因為空間的對稱性， $\Psi_k = \Psi_{-k}$ ，波函數可以表示成

$$\Psi(k) = |C_k| e^{i(\theta_k + ky)} \phi_k \chi_k + |C_{-k}| e^{i(\theta_{-k} - ky)} \phi_{-k} \chi_{-k} \quad (3.37)$$

$$\Psi(-k) = |C_{-k}| e^{i(\theta_{-k} - ky)} \phi_{-k} \chi_{-k} + |C_k| e^{i(\theta_k + ky)} \phi_k \chi_k \quad (3.38)$$

所以可以看出  $\theta_k = \theta_{-k}$ ，波函數為  $\Psi = C_k \phi_k + C_{-k} \phi_{-k}$ ，其中  $C_k$  和  $C_{-k}$  的大小值相同，而相位相同，分別為

$$C_k = |C_k| e^{i\theta_k}, \quad C_{-k} = |C_{-k}| e^{i\theta_{-k}} = |C_k| e^{i\theta_k} \quad (3.39)$$

然後引進粒子數守恆，得到  $N = 2|C_k|^2$  代回  $E$ ，當找到適當的 k 值，對應到能量最小值  $E_{\min} = \varepsilon_k N + gN^2 A_k / 4$ ，而  $A_k = I_k + 2I_{k,-k}$ ，其中  $I_{k,-k} = \int dx \chi_k^2 \chi_{-k}^2$ 。所以  $\Psi$  知道後，就可以求出系統的旋渦密度，表示為  $\Psi^* \Psi$ 。

#### 3.3.2 $N_c = 3, 4$ 的方法

再看  $N_c = 3$  的例子，寫出  $\Psi = C_0 \phi_0 + C_k \phi_k + C_{-k} \phi_{-k}$  可以對應到最低能量的可能組合，從(3.34)知道，第二項為交互作用力項中，從  $\delta_{k_3+k_4, k_1+k_2}$  可以排列組合出來可能的項數，其中  $C_k$ ， $C_{-k}$ ， $C_0$  的之間相位關係，會決定  $C_{k_1}^* C_{k_2}^* C_{k_3} C_{k_4}$  是否為負號，當  $(k_3, k_4, k_1, k_2)$  為  $(0, 0, k, -k)$  和  $(k, -k, 0, 0)$ ，此積分為  $\cos(2\phi_0) \int dx \chi_k \chi_{-k} \chi_0^2$ ，

當令  $\phi_0 = \pi/2$ ，而  $\phi_k = 0$ ，當負號出現，降低總能量值，即有最小值，因此相位會決定旋渦密度的圖形和總能量值。再利用粒子數守恆條件， $N = 2|C_k|^2 + |C_0|^2$ ，可以寫出能量泛函形式，

$$E = 2\varepsilon_k |C_k|^2 + \varepsilon_0 |C_0|^2 + \frac{g}{2} \left( 2A_k |C_k|^4 + I_0 |C_0|^4 + 4(2I_{k,0} - I_{k,0,-k}) |C_k|^2 |C_0|^2 \right) \quad (3.40)$$

因為  $E(k, |C_0|)$  有兩個參數，可以利用  $\partial E / \partial |C_0| = 0$ ，求得  $|C_0|$  的解析解的形式再代回(3.38)，再用數值方法  $\partial E / \partial k = 0$  且  $\partial^2 E / \partial k^2 = 0$ ，就可以把  $k$  值求出， $N_c = 3$  的最低能量也能得到。

至於  $N_c = 4$ ，可以假設基底的波函數  $\Psi = C_{k_1} \phi_{k_1} + C_{-k_1} \phi_{-k_1} + C_{k_2} \phi_{k_2} + C_{-k_2} \phi_{-k_2}$ ，一開始猜測對應到最低能量的解為  $(k, -k, 2k, -2k)$ ，比別人所計算的值卻高一些，最後考慮到當  $(k, -k, 3k, -3k)$  會比上式多一項負的積分值， $-4g |C_k|^3 |C_{3k}| I_{k,k,-k,3k}$ ，當判斷積分項的相位時，要考慮兩個積分值， $4g |C_k|^3 |C_{3k}| I_{k,k,-k,3k} e^{i(\theta_k - \theta_{3k})}$ ，還有  $4g |C_k|^2 |C_{3k}|^2 I_{k,-k,3k,-3k} e^{i2(\theta_k - \theta_{3k})}$ ，把兩個值相加後，然後判斷其最小值，可以得到  $\cos(\theta_k - \theta_{3k}) = -1$ ，可以令  $\theta_k = \pi$ ，而  $\theta_{3k} = 0$ ，所以  $\phi_k = \pi/3$ ，因此相位選取也是很重要的，會影響旋渦的圖形，最後寫出  $N_c = 4$  的能量泛函，

$$E = 2\varepsilon_k |C_k|^2 + 2\varepsilon_{3k} |C_{3k}|^2 + 4g |C_k|^2 |C_{3k}|^2 I_{k,-k,3k,-3k} + g |C_{k_1}|^4 I_{k_1} + g |C_{k_2}|^4 I_{k_2} + 2g \left( |C_{k_1}|^4 I_{k_1,-k_1} + |C_{k_2}|^4 I_{k_2,-k_2} + |C_k|^2 |C_{3k}|^2 (I_{k,3k} + I_{k,-3k} + I_{-k,3k} + I_{-k,-3k}) \right) - 4g |C_k|^3 |C_{3k}| I_{k,k,-k,3k} \quad (3.41)$$

利用粒子數守恆， $N = 2|C_k|^2 + 2|C_{3k}|^2$ ，所以只剩兩個參數， $E(k, |C_k|)$ ，在這裡找最低能量解的方法是先給  $k$  一個值，然後用牛頓法找出最小值，所以不同  $k$  會有相對應的  $E$ ，再做比大小後即可得到  $E_{\min}$ ；有時只利用牛頓法還不夠周延，因為馬鞍形狀時，不是絕對最小值，當在  $\partial E / \partial k = 0$  和  $\partial E / \partial |C_0| = 0$ ，我們還要考慮二階微分的部分，也就是所謂赫氏矩陣(Hessian matrix)條件，

$$\nabla^2 f(x, y) = \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

如果要得到最小值，則  $\mathbf{H}$  的 eignevalue 要大於 0，則可以得到  $E_{\min}$ 。而  $N_c \geq 5$  以上，在交互作用力項數會越來越多，會考慮到彼此的相位，將會使用到多變數系統的數值方法來計算，會有三個變數或以上，再找出能量的最小值。圖 3.4 是系統旋轉  $\Omega$  所對應的基態能量的基底數目，當  $\omega_0 / \Omega$  越接近 1，表示角速度變快，中央的密度會變小，因此  $k=0$  的狀態係數變小，而會落到  $k$  值較大的基底，所以落在  $N_c = 3, 4, 5$  或以上，但我們只處理到  $N_c = 5$ ，因為  $\omega_0 / \Omega \approx 1$  時，表示有更多的簡併態的基底，所以基底數目不斷增加是合理的，旋渦柱的數目也不斷往外擴增，粒子也將處於次穩定(meta-stable)的狀態，因為系統不斷在找尋能量最小值的狀態，因此實驗上要處理  $\omega_0 / \Omega \approx 1$  的系統是不易處理，當粒子的離心力克服了束縛力的關係，所以粒子將不再被束縛在中央。

當  $\omega_0/\Omega$  在 1.027 到 1.028 左右，最低能量卻落到  $N_c = 5$  的狀態，表示系統處在過渡的狀態，也就是相變，由  $N_c = 2$  狀態到  $N_c = 3$  的狀態，此時這三個狀態的能量是非常接近(圖 3.5)，因此在巨觀上的旋渦密度，會從中間只有一條穩定的旋渦柱( $N_c = 2$ )，到開始像蛇一樣不安份地擾動， $N_c = 5$  的狀態(圖 3.6)，粒子密度逐漸往外擴散移動的趨勢，系統旋轉速度再增加，漸漸地旋渦柱也就多了一條，但兩條各分於兩邊，因此來到  $N_c = 3$  的狀態(圖 3.7)，逐漸穩定且能量也不斷往下降，可以看出旋渦數增加，會比旋渦數不增加而增加其量子數來得穩定。

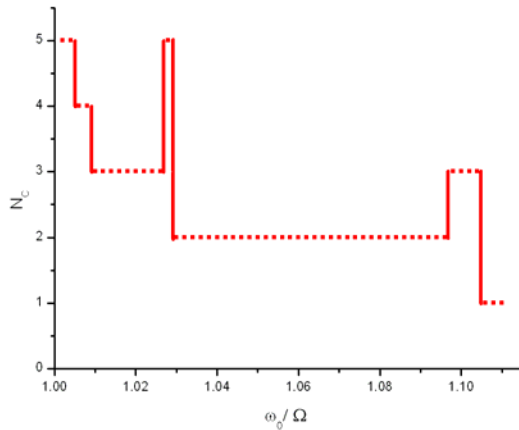


圖 3.4 基底數目和旋轉頻率關係

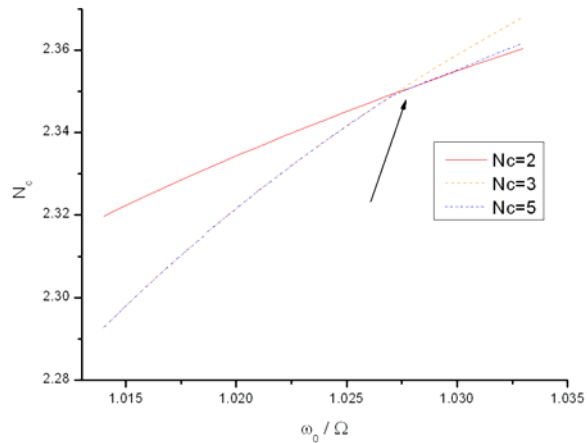


圖 3.5 相變時對應的頻率關係

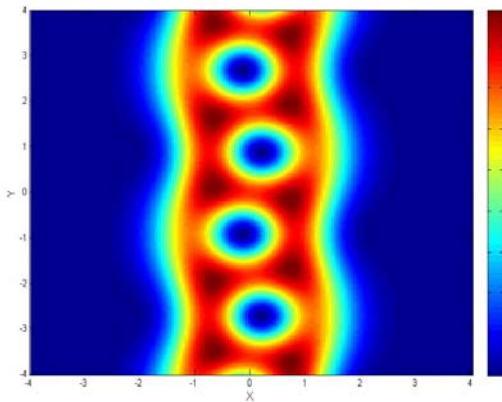


圖 3.6  $N_c = 5$ ,  $\omega_0/\Omega = 1.028$  的密度圖形，為此系統的基態。

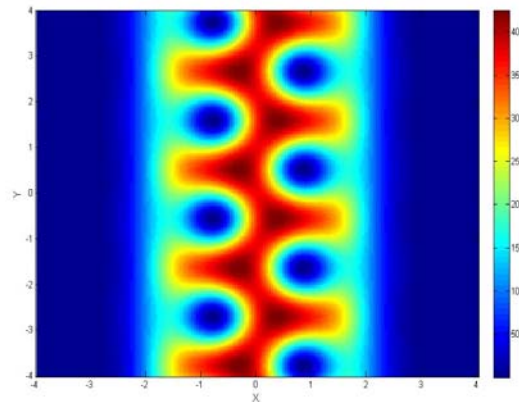


圖 3.7  $N_c = 3$ ,  $\omega_0/\Omega = 1.026$  的密度圖形，為此系統的基態。



## 3.4 旋渦圖形的分析

### 3.4.1 奇數家族

沿續上一節所提的基底數目  $N_c$ ，波函數  $\Psi = \sum_k C_k \phi_k$  就是基底的組合，我們把它分類成奇數和偶數家族，其中  $\phi_k = A e^{iky} \chi_k(x)$ ， $\chi_k(x)$  為 x 方向上的高斯圖形，當  $k=0$  時，它恰好在圖的中間， $k \neq 0$  表示其它基底的函數的高峰是分布兩側， $e^{iky}$  表示為周期函數，是有變化性的，也可以想像成在 y 方向上為平面波移動。

我們先看奇數家族的  $N_c = 1$  情形，波函數為  $\Psi = C_0 \phi_0$ ，其波數  $k=0$ ，當  $\omega_0/\Omega$  在 1.15 之後(圖 3.4)，波函數的基態就落在  $N_c = 1$ ，就是沒有旋渦的圖形(圖 3.8)，此圖為密度的表示成  $\Psi^* \Psi$ 。表示  $\Omega$  不夠快時，還不足形成旋渦，因此大部分粒子都被束縛在中間，也說明其它基底的能階( $k \neq 0$ )都比基底  $k=0$  還要高出一些，能階會隨著  $\omega_0/\Omega$  改變，因此越遠離 1 時，能階差會漸漸變大， $N_c = 1$  交互作用力項的值雖然和其它  $N_c$  比是較大的，但總動能還是較低，所以一群原子最後還是會落在  $N_c = 1$ 。

奇數家族還有另一個同伴  $N_c = 3$ ，可以表示成  $\Psi = C_0 \phi_0 + C_k \phi_k + C_{-k} \phi_{-k}$ ，想像在 x 方向有三個高斯函數交互作用下，因此可以猜測出中間兩側會有旋渦柱，所以當旋轉變快時，會從一條旋渦柱變成兩個旋渦柱，是所謂的第二次相變後如圖 3.9，當  $\omega_0/\Omega = 1.02$  時， $N_c = 3$  的狀態為基態，系統較傾向往兩側移動， $C_0$  的比例會降低，表示中間的密度從最高，由於離心力關係，往外擴散， $C_k = C_{-k}$  的比例會增加而達到平衡，但中間的密度相較於兩側還要高，因為被位能束縛在中央關係。其中兩條旋渦柱的圖形不完全對稱，再移動某若干距離，即可達到對稱。

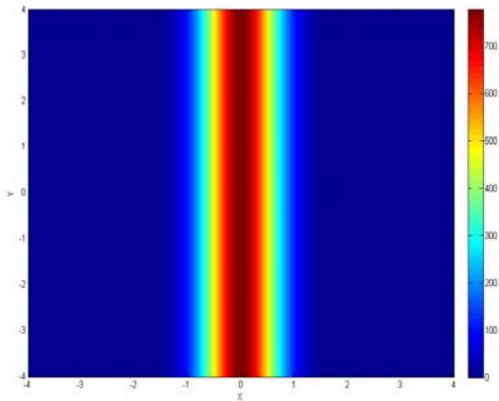


圖 3.8  $N_c = 1$ ， $\omega_0/\Omega = 1.106$  的密度圖形

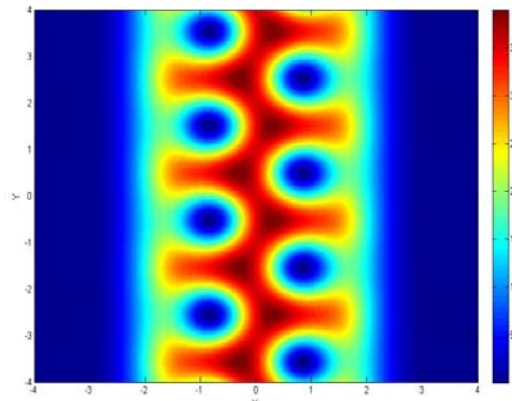


圖 3.9  $N_c = 3$ ， $\omega_0/\Omega = 1.02$  的密度圖形

### 3.4.2 偶數家族

接下來關於偶數家族，偶數家族的圖形有一個特色，中間都會有旋渦柱，先從  $N_c = 2$  開始介紹，波函數可以寫成  $\Psi = C_k \phi_k + C_{-k} \phi_{-k}$ ，可以簡單地想成兩邊有 Gaussian 圖形分布，兩波形疊加之後，很合理地猜測中間會有旋渦柱，而且是從無旋渦柱到中間有旋渦柱，其圖形恰為左右對稱，如果旋轉地越快，波數  $k$  值會變大，表示旋渦柱的旋渦數會增加，圖 3.10 為系統在  $\omega_0/\Omega = 1.032$  的基態。

$N_c = 4$  由於有四個基底，兩側各有兩個 Gaussian 波形，因此中間一定還會有旋渦柱，而兩側也會有各一個旋渦柱，共有三個旋渦柱，但不代表一定有三個，因為可能旁邊的最外側基底的係數很小，所以會不明顯，在  $\omega_0/\Omega = 1.032$  時， $N_c = 4$  的能量是略低於一點  $N_c = 2$ ，但  $C_k/C_{3k} \approx 90$ ，類似  $N_c = 2$  的基底被展開成  $N_c = 4$ ，由於  $C_{3k}$  的係數太小，因此仍視  $N_c = 2$  為基態，所以圖 3.11 雖然為  $N_c = 4$  的狀態，但和  $N_c = 2$  的狀態是相同的(圖 3.10)。

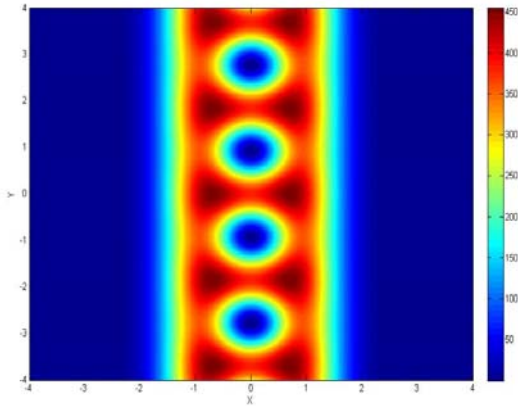


圖 3.10  $N_c = 2$ ， $\omega_0/\Omega = 1.032$  的密度圖

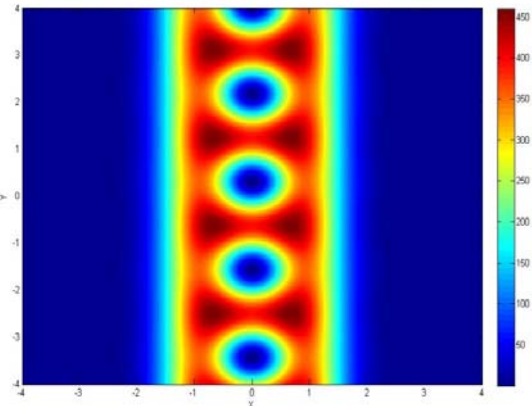


圖 3.11  $N_c = 4$ ， $\omega_0/\Omega = 1.032$  的密度圖

接下來在第一次相變中，也就是從無旋渦變化到有一條旋渦柱 ( $N_c = 2$ ) 的過程中(圖 3.12)，發現箭頭所指的雖然不是基態，相較於  $N_c = 3$  狀態的能階高一些，還是為激發態，可以屬於過渡狀態的情形，從  $N_c = 4$  的旋渦圖(圖 3.13)可以看出中間已有旋渦柱，而兩側的凹處，可以看出類似旋渦但還沒形成完全，且所需要的能量也較高，所以系統旋轉再快一些就落到  $N_c = 2$  的基態。

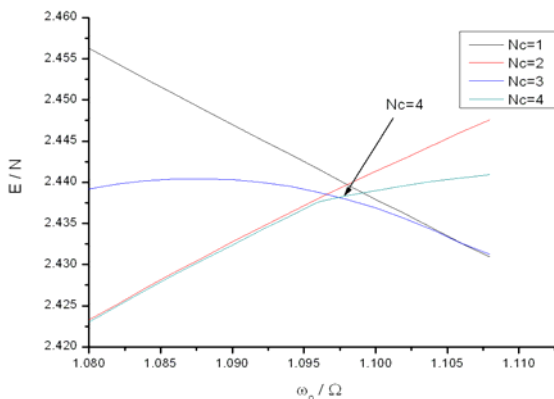


圖 3.12 第一次相變，基態數目的轉變

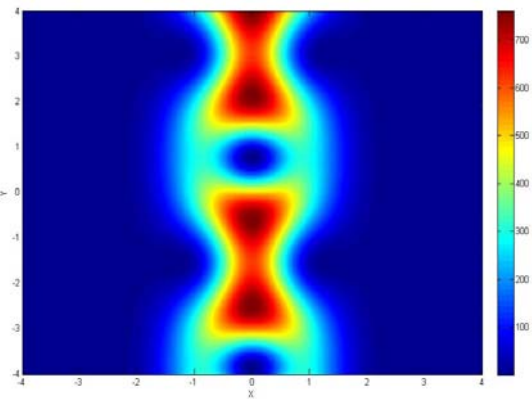


圖 3.13  $N_c = 4$ ， $\omega_0/\Omega = 1.097$  的密度圖



系統旋轉頻率 $\Omega$ 更接近於 $\omega_0$ 時，相變次數將慢慢增加，當 $\omega_0/\Omega=1.008$ ，系統已經發生三次的相變，因此基態來到 $N_c=4$ 的狀態，圖 3.14 就是由 $N_c=3$ 的兩個旋渦柱轉變成三個旋渦柱，和 $N_c=2$ 圖形一樣，呈現出左右對稱，且中央有一條旋渦柱，另兩條分布在兩側。

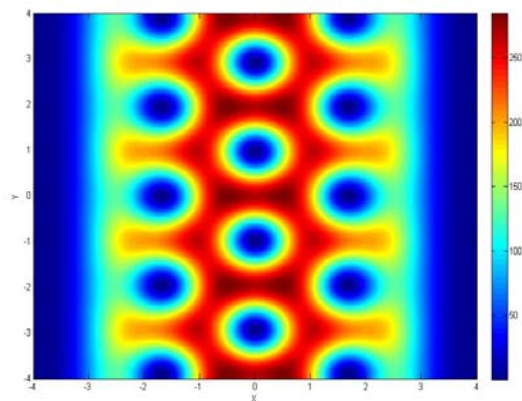


圖 3.14  $N_c=4$ ， $\omega_0/\Omega=1.008$  的密度圖

#### 參考資料

- [1] V. Bretin et al., Phys. Rev. Lett. 92, 050403(2004)
- [2] M. O. Oktel, Phys. Rev. A 69, 023618(2004)
- [3] P. Sanchez et al., Phys. Rev. A 72, 043613(2005)
- [4] S. Sinha et al., Phys. Rev. Lett. 94 150401(2005)

# Chapter 4 四次位能井的效應

## 4.1 動機

上一章我們選擇  $\Omega < \omega_0$  的旋轉速度，因為有交互作用力關係，因此  $\Omega$  的改變會對應不同的基底數目  $N_c$  (圖 3.4)，我們知道系統旋轉速度  $\Omega \rightarrow \omega_0$ ，基底間會有簡併態，而粒子群會往外擴散，由於離心力  $\propto \Omega^2 r$ ，因此合力  $\propto (\omega_0 - \Omega)^2 r$  會趨近於 0，所以實驗上也不容易來捕捉到這群 BEC 粒子，除了磁位能井外，再使用雷射光在 z 方向上，也可以增加其位能，

$$U(r_\perp) = U_0 \exp\left(-\frac{2r_\perp}{\omega^2}\right) = U_0 - \frac{2U_0}{\omega^2} r_\perp^2 + \frac{2U_0}{\omega^4} r_\perp^4 \quad (4.1)$$

而(4.1)右邊第一項增加位能常數，第二項會減少徑方向的束縛力，而第三項就是我們想要的四次項位能井，其中  $r_\perp$  為  $x-y$  平面的半徑方向[1]。

如果考慮粒子之間的無交互作用力 ( $gN=0$ ) 且在非對稱位能井下，因此能量泛函可以寫成  $E = \sum_k^{N_c} |C_k|^2 \varepsilon_k$ ，且從(3.33)知， $\varepsilon_k = \sqrt{2R} + k^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} / 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)$ ，可以看出當  $k=0$ ， $\varepsilon_k$  會最小，所以最低能量落在  $N_c=1$  的狀態，即沒有旋渦的高斯分布圖形[2]。

如果在無交互作用力下，系統角速度持續增加，令  $\Omega > \omega_0$ ，基底能量的第二項將為負數，表示最低能量有機會不斷地往下掉，即  $N_c$  的數目可以不斷地增加， $k$  值也變大，最後為負的無窮大為不穩定狀態，所以是不存在的，但如果我們在(3.17)上外加一個四次項的位能井， $E_q = \Psi^* \lambda x^4 \Psi$ ，所以能量泛函可以寫成，

$$E[\Psi] = \int dV \Psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + mx^2(\Omega^2 + \omega_0^2) + 2i\hbar\Omega x \frac{\partial}{\partial y} + \lambda x^4 \right) \Psi \quad (4.1)$$

再經過  $\hat{H}|\phi_k\rangle = \varepsilon_k|\phi_k\rangle$ ，可以表示成一維的微分方程，

$$-\frac{d^2}{dx^2} \chi_k + \left[ \lambda x^4 + \left(2 + \frac{2\Omega^2}{\omega_0^2}\right)x^2 + \left(-4\frac{\Omega}{\omega_0}k\right)x + k^2 \right] \chi_k = \varepsilon_k \chi_k \quad (4.2)$$

系統加了四次項的位能井，只有在 x 方向束縛，因為我們想了解在 x 方向增加其束縛力會對基底的數目組合產生什麼效果，如果我們把它當作微擾項，不影響到能階，是可以寫成解析解的形式，這裡利用數值方法算出  $\lambda$  值， $\lambda$  值可以逐一調整如圖 4.1，令  $\omega_0/\Omega=0.9$ ，計算出  $\varepsilon_k$  和  $k$  的關係，可以看出加上四次項位能井，選擇適當  $k$  值，將有能量最小值的產生，因為  $k$  和  $-k$  的對應能量是相同的， $E = |C_k|^2 \varepsilon_k + |C_{-k}|^2 \varepsilon_{-k} = 2|C_k|^2 \varepsilon_k$  會有最低能量的狀態，因此基態落在  $N_c=2$  的狀態上，說明  $\Omega > \omega_0$  時，可以藉由四次項的位能來解決，因為在距離中心越遠，四次項的影響也越大，不會讓粒子跑掉，同時也 and 第三章所做的一些結果來比較其差異性。

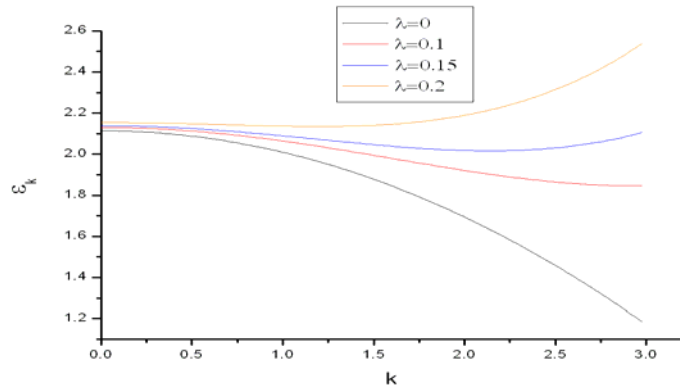


圖 4.1  $\lambda = 0, 0.1, 0.15, 0.2$  且  $\omega_0/\Omega = 0.9$  對應能量關係

當  $\omega_0/\Omega = 0.9$ ，基態為  $N_c = 2$  的狀態，從 (3.6)  $E' = E - L \cdot \Omega$  可以了解，我們讓系統轉頻率  $\Omega$  漸漸變快時，系統的最低能量會逐漸降低，接下來逐漸調四次項的強度， $\lambda$  值可以一開始從零開始，也就是只有二次項的位能井，因為沒有交互作用力關係，圖 4.1 中是找不到最小值的解。當  $\lambda = 0.05$  時，雖然有穩定的基態，但沒有旋渦圖形的產生，當強度增加一倍時， $\lambda = 0.1$ ，因為基底的波函數位置  $\propto e^{-A(x-Bk)^2}$ ，所以波數  $k$  變小時，兩個波函數會更接近地交互作用，因此會有明顯地旋渦產生，下面四張圖說明當  $\lambda$  值逐漸變大時，旋渦數變少了，而最低的能量也漸漸增加，也提供在中央穩定旋渦的產生，因此系統處在  $N_c = 2$  的狀態。

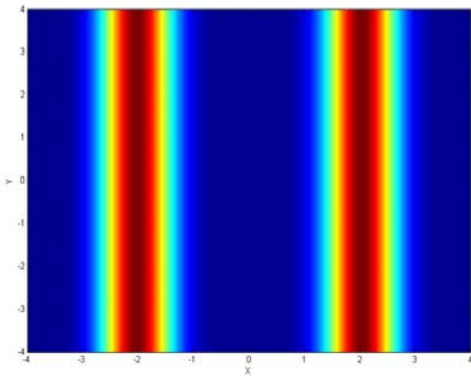


圖 4.2  $\lambda = 0.05$  ;  $\omega_0/\Omega = 0.9$  的密度圖

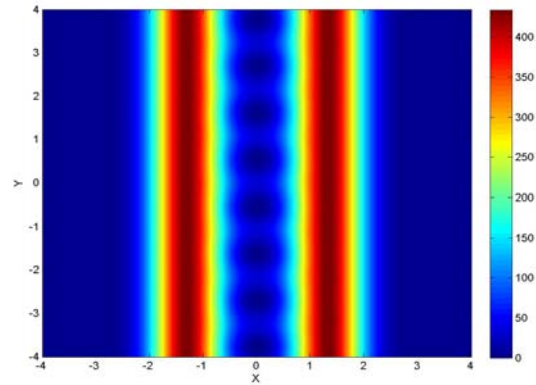


圖 4.3  $\lambda = 0.1$  ;  $\omega_0/\Omega = 0.9$  的密度圖

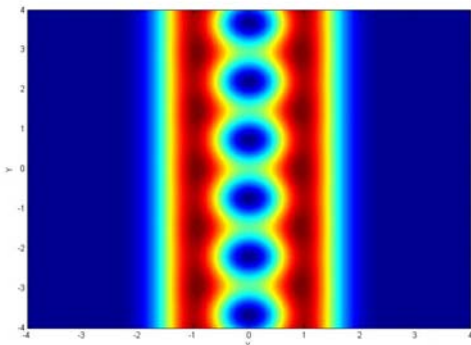


圖 4.4  $\lambda = 0.15$  ;  $\omega_0/\Omega = 0.9$  的密度圖

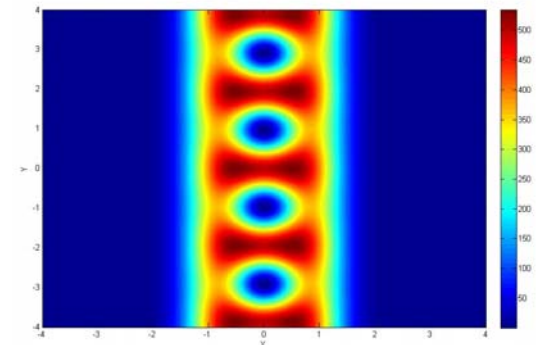


圖 4.5  $\lambda = 0.2$  ;  $\omega_0/\Omega = 0.9$  的密度圖

## 4.2 能量泛函的解析和數值的計算

系統加了四次項的位能井後，如果把四次項的大小變成微擾項，令 $\lambda$ 為足夠小的情況下（ $\ll \hbar\Omega$ ），並不會影響藍道能階，粒子的交互作用力項也把它當作微擾項，所以我們寫出能量泛函的形式，

$$E[\Psi] = \int dV \Psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + mx^2(\Omega^2 + \omega_0^2) + 2i\hbar\Omega x \frac{\partial}{\partial y} + \lambda x^4 + \frac{g}{2} |\Psi|^2 \right) \Psi \quad (4.3)$$

交互作用力項最後再放進去，因此和第三章解微分方程相同，能階可以寫成

$$\varepsilon_k \approx \sqrt{2R} + k^2 \left( \frac{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} \right) + \Delta_n \quad \text{其中 } R = 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \quad (4.4)$$

關於 $\Delta_n$ 為四次項的位能所造成的，可以寫成

$$\Delta_n = \langle n | \lambda(x+c)^4 | n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle n | x \rangle \lambda(x+c)^4 \langle x | n \rangle_{n=0} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx \chi_k^2(x+c)^4 \quad (4.5)$$

由於旋轉項的關係，因此基底的波函數 $\propto e^{-a(x-c)^2}$ ，所以位置部分有偏移，而 $c$ 為常數， $\chi_k$ 為上一章所計算的基底(3.33)，如果 $\lambda$ 值漸增， $\Delta_{n=0}$ 就不適用，所以基底 $|n\rangle$ 是和四次項有關係，所以我們就要用數值的方法來處理 $\varepsilon_k$ 和 $\langle x | n \rangle$  [3]。

我們把連續空間看成單位空間的連接，因此波函數 $\phi(r) = \langle x | n \rangle$ 假設 $r$ 是連續空間距離，把 $\phi(r)$ 改成 $\phi_\ell$ ，其中 $\ell\delta < r < (\ell+1)\delta$ ，還有要遵守邊界條件(邊長 $L$ )，當 $\ell \leq 0$ 或 $\ell > L$ 時， $\phi_\ell = 0$ 。可以了解 $\hat{H}\phi(r) = \varepsilon\phi(r)$ ，關於 $\hat{H} = -d^2/dr^2 + U(r)$ ，第一項為動能項，而第二項總位能 $U(r)$ 包含式子(4.2)中的第二項部分，而也把交互作用力項 $\Psi^* \frac{g}{2} |\Psi|^2 \Psi$ 先不考慮，因為把它視為微擾項且又為非線性項，不好處理，接下來要把運算子 $\hat{H}$ 寫成不連續形式，其中

$$d^2\phi(r)/dr^2 = (\phi_{\ell+1} - 2\phi_\ell + \phi_{\ell-1})/\delta^2; u^\ell = U(\ell\delta) + 2\delta^{-2} \quad (4.6)$$

因此運算子 $\hat{H}$ 可以用表示成矩陣形式，

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} u^1 & -\delta^{-2} & & & & \\ -\delta^{-2} & u^2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & u^{L-1} & -\delta^{-2} & \\ & & & -\delta^{-2} & u^L & \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

接下來我們就可以解 $\hat{H}$ 的特徵函數和特徵值，其中最小的特徵值就是我們所要求的能量 $\varepsilon$ ，而特徵值所對應的特徵函數就是基底，其它能階對應的特徵函數就是激發態。

當從數值計算的基底是以矩陣來表示，因為加了四次項不易寫出解析解的形式，因此再簡化(4.2)的形式(4.8)，可以利用(4.7)來得到 $f$ 和 $\chi_k$ 的向量

$$\frac{d^2}{dx^2} \chi_k + [ax^4 + bx^2 + cx + d] \chi_k = f \chi_k \quad (4.8)$$

所以試著用級數解的方法來表示波函數(4.9)，並代入(4.8)式

$$\chi_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4.9)$$

然後再使用遞回關係和邊界條件，再比較係數後而得到  $a_n$ ，

$$a_{n+6} = \frac{aa_n + ba_{n+2} + ca_{n+3} + da_{n+4}}{-(n+6)(n+5)} \quad (4.10)$$

其中(4.10)的  $a_{n+6}$  是當  $n \geq 0$  的整數，所以我們先計算出  $a_0 \sim a_5$  的值，再把值代入(4.10)就可以算出  $a_6$  以上的值，再用數值方法去列出一百項的波函數，而取得此波函數的過程有點複雜，因為初始值  $a_0$  和  $a_1$  的取得是有誤差的成分在，從(4.8)取得波函數的向量  $\chi_k(1,800)$ ，向量表示從-4到4且間隔取0.01，因此  $a_0 = \chi_k(401)$ ，而  $a_1$  也就是  $\chi_k(401)$  點的斜率，利用一階導數近似的方法取得，當取  $a_0$  和  $a_1$  值不太精確時，在邊界附近表現出不平緩地下降曲線。

由於取波函數的級數解過程中不太有效率，所以直接用數值計算來處理，會顯得更有效率，其中積分時會使用辛普森法則，它是利用二次多項式來近似一對小區域內的函數  $f(x)$ ，若通過三點依序為  $(x_0, f_0)$ ， $(x_1, f_1)$ ， $(x_2, f_2)$ ，而點和點的間距為  $h$ ，可以得到下面的積分值

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (4.11)$$

因此加上四次項的位能井後， $\chi_k$  就不能像(3.33)有解析解，起初用級數解的方式也不夠有效率，最後採用數值的方式來運算最低能量，並找出相對應的  $k$  值，由於不能直接對  $\chi_k$  微分計算，相對地所花的時間也較久；關於旋渦密度的圖形，因為  $\chi_k$  所以改成矩陣的相乘來處理。

### 4.3 旋轉頻率所對應的基底關係

系統加了四次位能井， $\lambda x^4$ ，在中心附近的束縛力會隨著遠離中心而漸增，表示增加了穩定性，上一章的有效位能井  $V_{eff} = mx^2(\omega_0^2 + \Omega^2)$ ，改成

$$V_{eff} = mx^2(\omega_0^2 + \Omega^2) + \lambda x^4 \quad (4.12)$$

其中  $\lambda$  是可以調整強度的，所以我們也不能當作微擾項，它會影響到能階變化，所以第三章的有效位能是  $mx^2(\omega_0^2 + \Omega^2)$  當  $\lambda = 0$ ，在這裡先假設粒子交互作用力  $gn = 2$ ，逐一改變  $\lambda$  值， $\lambda = 0, 0.01, 0.03, 0.2$ ，看相變改變時基底的變化情形，圖 4.6 說明當沒有四次項時，當  $\omega_0/\Omega$  接近 1 時，基底之間的差異會越來越小，也是所謂的藍道能階，簡併態會產生，因此基底之間的組合會產生能量更低的基態，粒子會逐漸往中央的兩端移動，因此粒子間的密度小，相互作用力也會變小，所以基底的數目不斷增加組合。

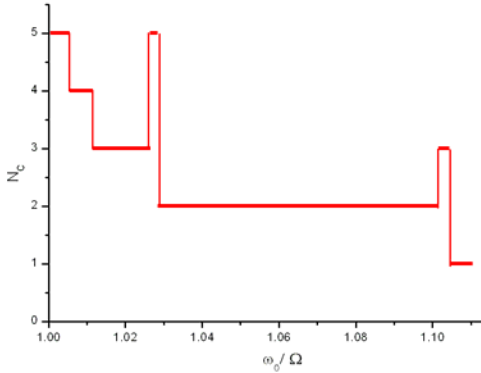


圖 4.6  $\lambda = 0$ ； $gN = 2$  的基態的基底數目對應旋轉頻率關係。

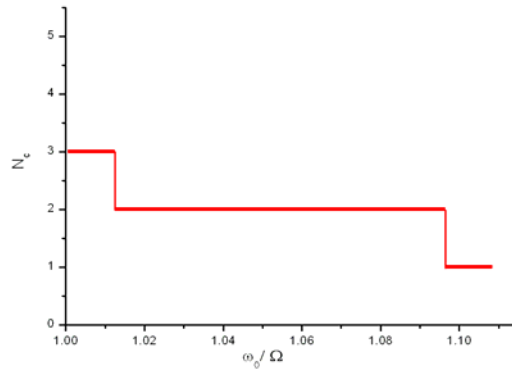


圖 4.7  $\lambda = 0.01$ ； $gN = 2$  的基態的基底數目對應旋轉頻率關係。

當開始調整  $\lambda$  值，圖 4.6 和圖 4.7 比較後，發現圖 4.7 發生了兩次的相變，相較於圖 4.6 發生四次的相變，表示四次的位能井在中央外圍束縛此系統的影響較大，表現出較穩定的狀態，使圖 4.6 的過渡狀態也消失了，因為四次位能井的作用，所以  $N_c = 1$  轉換到  $N_c = 2$  的基態時，發生相變的過程可能很迅速，因此過渡狀態出現的時間很短。

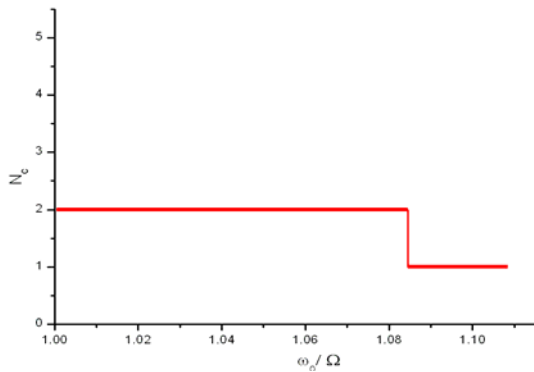


圖 4.8  $\lambda = 0.03$ ； $gN = 2$  的基態的基底數目對應旋轉頻率關係。

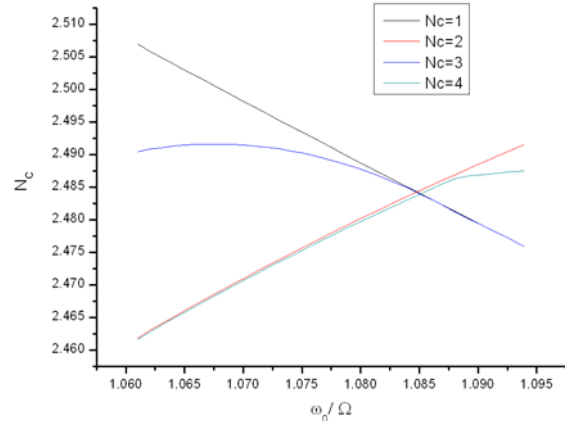


圖 4.9  $\lambda = 0.03$ ， $gN = 2$  的  $N_c$  變化。

當位能四次項  $\lambda = 0.03$ ，我們發現只發生了一次地相變，發生在  $\omega_0/\Omega = 1.085$ ，因此系統的轉速也變得比  $\lambda = 0$  和  $\lambda = 0.01$  的例子還要快，需要的能量約 2.484，但比前面第一次相變所需的能量還要高，表示要克服的位能變大，圖 4.9 中的  $N_c = 1$  和  $N_c = 3$  狀態在相變前，所帶能量值很接近，因此系統的基態視為  $N_c = 1$ ，同樣道理用於  $N_c = 2$  和  $N_c = 4$  的狀況上，所以在相變後我們仍認定是  $N_c = 2$  的狀態，但系統在相變改變的附近不像上一章的圖 3.12 ( $\lambda = 0$ ) 四個狀態的能階可以辨別高低，也就是先後順序  $N_c = 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  的狀態，而是  $N_c = 1 \rightarrow 2$  的情形。

接下來當慢慢地去調整  $\lambda$  值，我們會好奇強度多少就會把旋渦柱消失或毀掉呢？也就不再旋轉時，即粒子不帶著角動量，換句話說環流的量子化被四次項的位能井破壞掉，所以束縛在中間呈高斯分布， $\lambda$  值等於 0.2 時(圖 4.10)，系統要產生旋渦柱或有環流量子化的效應是不太容易，所以只發生了一次相變，原因是  $N_c \geq 1$  的能階逐漸往上升，慢慢大於  $N_c = 1$  的能階，因此要讓轉速要不斷增加， $N_c = 1$  的能階會慢慢增加，其它能階卻會慢慢下降，就會有個交點就是所謂的相變。再調高一點四次項強度，當  $\lambda = 0.22$ ，且轉速  $\Omega$  小於  $\omega_0$ ，從圖 4.11 可以知道不會有相變的變化，除非  $\Omega$  大於  $\omega_0$ ，會有  $N_c = 2$  的基態產生，所以  $\lambda_c = 0.22$  為四次項位能的臨界強度，當  $\lambda < 0.22$  時，系統會有一次或以上相變發生。

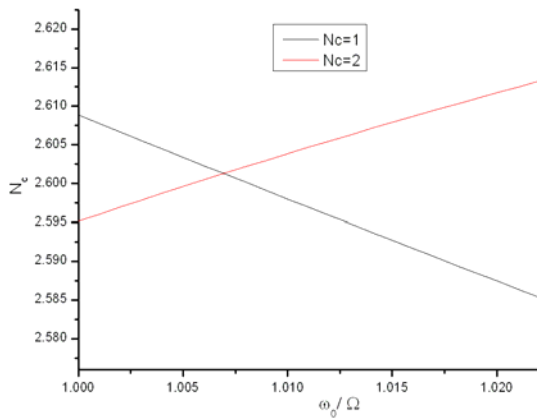


圖 4.10  $\lambda = 0.2$ ， $gN = 2$  的  $N_c$  變化。

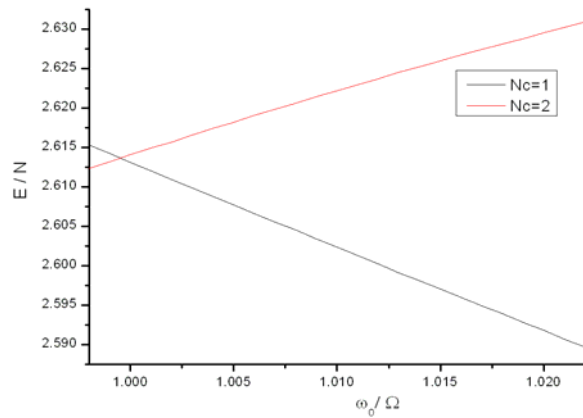


圖 4.11  $\lambda = 0.22$ ， $gN = 2$  的  $N_c$  變化。



## 4.4 改變粒子交互作用力的效應

當我們開始改變粒子間作用力，當作用力為相互吸引時，交互作用力強度  $g$  為負，反之亦然，這裡使用粒子間的作用力為相互排斥力，去調整排斥力的大小看基態會隨著旋轉速率如何地改變，雖然仍把交互作用力視為微擾項，是不會影響到基底的能階，但計算總能量時，要考慮交互作用力項的貢獻， $gN$  值越大，因此所需的能量也越大，其中  $N$  代表系統的總粒子數，表示粒子群較喜愛分開一點，圖 4.12 ( $gN=1$ ) 和圖 4.6 ( $gN=2$ ) 可以來比較，當  $gN$  值變小時，圖 4.12 像是把圖 4.6 往左邊壓縮似的，說明作用力小，在位能井束縛下是較穩定的相較於  $gN=2$ ，所以排斥力較小的粒子要發生相變，就是使系統轉速增加，發現在第二次相變時，過度狀態也消失了。

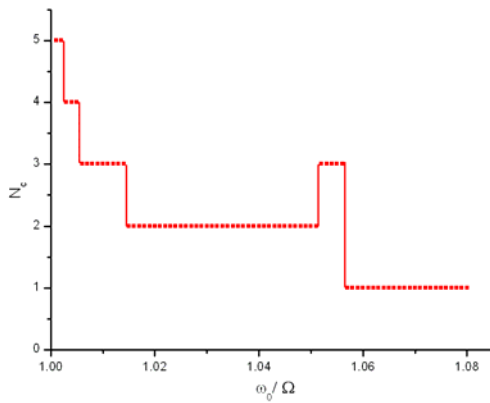


圖 4.12  $\lambda=0$ ； $gN=1$  的基態的基底數目對應旋轉頻率關係。

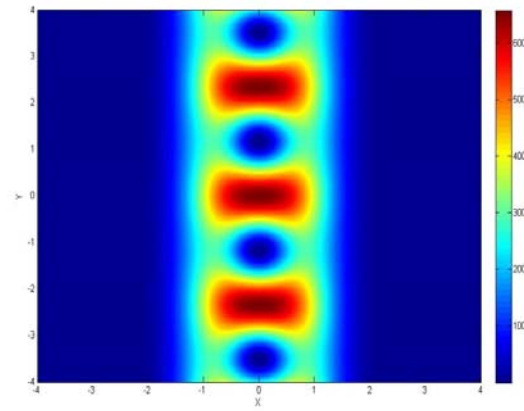


圖 4.13 當  $\omega_0/\Omega=1.05$ ， $\lambda=0$ ， $gN=1$ ； $N_c=2$  的旋渦密度圖。

當系統轉速在  $\omega_0/\Omega=1.05$ ，在不同作用力大小下，圖 4.13 和圖 4.14 都處在  $N_c=2$  的狀態，由於  $gN=1$  的所帶的能量較小，角動量的值也較小，且粒子群較安定待在中央，而  $gN=2$  由於粒子間排斥作用，已慢慢往兩邊進行，其第一次相變在  $\omega_0/\Omega=1.12$  左右，說明交互作用力大的粒子更容易有相變的產生。

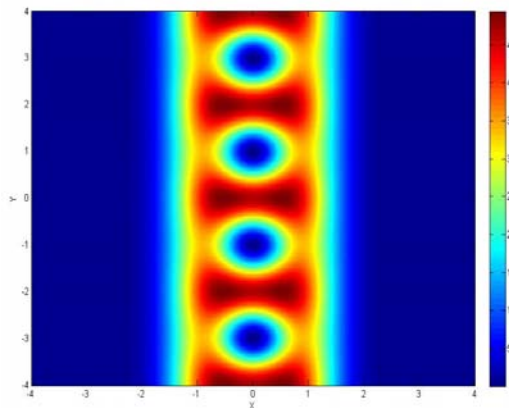


圖 4.14 當  $\omega_0/\Omega=1.05$ ， $\lambda=0$ ， $gN=2$ ； $N_c=2$  的旋渦密度圖。



接下來要加入四次項的位能井( $\lambda=0.1$ )在  $gN=1$  的系統上，從上一節(4.3)我們知道加上四次項的位能井後，會使系統穩定落在  $N_c$  數目較小的狀態，也比較不容易發生相變，因此讓系統不斷地加快轉速，讓粒子的離心力克服掉束縛力，發現此系統只發生一次相變(圖 4.15)，從結果可以知道由於四次項位能井的關係，當  $\omega_0/\Omega < 1$ ，會有穩定的  $N_c = 2$  的解，如圖 4.16 旋渦柱裡的旋渦數隨著波數  $k$  變大而變多，可以想成駐波的形成方式，但隨著轉速不斷加快，最後一群粒子會被分離於兩側。

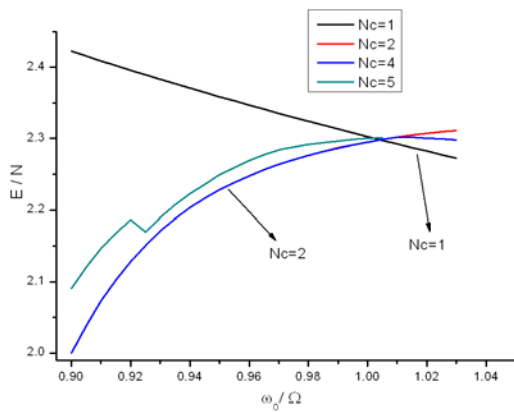


圖 4.15  $\lambda = 0.1$ ， $gN = 1$ ； $N_c$  的變化

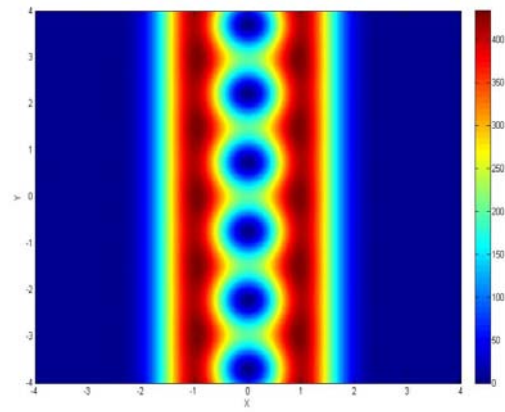


圖 4.16  $\lambda = 0.1$ ， $gN = 1$ ； $\omega_0/\Omega = 0.93$   
 $N_c = 2$  的密度圖

#### 參考資料

- [1] V. Bretin et al., Phys. Rev. Lett. 92, 050403(2004)
- [2] P. Sanchez and J. J. Palacios Phys. Rev. A 72, 043613(2005)
- [3] H. Pu and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. 80, 6(1998)

## Chapter 5 結論

我們先研究系統的非對稱位能下的旋轉問題，使用藍道規範轉換寫下波函數，再由能量的 G-P 方程和 Thomas-Fermi 近似方法來解決，並在粒子數的限制條件下找出最低能量的解，其中當接近簡諧頻率  $\omega_0$  時，而能階為藍道能階，計算出來的波函數和能階都為解析解，發現粒子會往某一方向做無限的延伸，而被另一方向所束縛住。

波函數可以分成奇數和偶數個基底組合，而  $N_c$  為基底數目組合，密度圖的旋渦柱的數目為  $N_c - 1$ ，但不代表  $N_c$  的基態時有  $N_c - 1$  的旋渦柱，因為基態為過度狀態，出現時對應的旋轉範圍很短暫；旋渦柱數的改變即所謂的相變，隨著旋轉頻率變快而趨近於  $\omega_0$ ，波數增加，旋渦柱(數目)增加，將降低角動量的量值，讓粒子所帶的能量往下降，相變次數更為頻繁。

接下來加了四次項位能井之後，當旋轉系統超過  $\omega_0$ ，可以尋找到穩定的最低能量解，我們調整四次項的強度，將改變了較遠程的束縛力，因此也限制系統的相變次數，原本出現有過度的狀態解也由於四次項束縛力的關係也消失了，因為四次項位能井破壞了前面的藍道能階，因此即使粒子所帶能量不斷上升，也不輕易地做相變，因此當四次項強度  $\lambda = 0.22$ ，當  $\Omega \leq \omega_0$  時，系統都不會有環流量子化效應，也就沒有旋渦的發生。

我們也改變粒子的交互作用力，這裡取  $g$  為正值，表示粒子間為相互排斥力，所以當交互作用排斥力變小時，粒子群是較安定地被束縛住，也就是不輕易地相變，可以想成離心力變小的關係，如果沒有加上四次項的作用力，改變交互作用力並不會破壞藍道能階，因此當系統頻率  $\Omega$  接近  $\omega_0$  時，能階將處在簡併態，才會變得更容易相變，所以當完全沒有作用力時，是不會產生相變的。

由於位能井的變化和旋轉頻率改變將決定系統處在何種基態的基底數目組合( $N_c$ )，接下來還可以來處理雙位能井(double well)的問題，讓系統的粒子是否較喜愛處在偶數的基底組合(偶數家族)並觀察旋渦相變和能階變化的情形。