

評核標準，一隻影響數學理解隱形的「手」¹

--一個案例之速寫

孫旭花

澳門大學教育學院

摘要

本文通過讓學生解一道關於租船的開放題，跟進訪談 23 名小學 5 年級小學生的數學理解，發現傳統評核標準，通過規定了學習的解題模式（列式），在一定的程度上，間接促進了僵化的數學觀形成，禁錮學生的數學思考，成了一隻影響理解隱形的「手」。

壹、研究背景和問題

美國數學教育改革，數學評核最為讓人注目，僅僅 5 年之內，美國政府及相應的機構便出版了一系列政策檔、指導性檔，推進評核改革在中小學推行。例如

- 1) 1990 年國家測試和公共政策委員會出版了《從守門到通道：美國測試的改變》（NCTP：National Commission on Testing and Public Policy）（NCTP，1990）。
- 2) 1991 年數學科學教育委員會（MSEB：Mathematical Sciences Education Board）出版了《學校數學評核標準》（MSEB，1991）。
- 3) 1993 年 NCTM 出版了《數學課堂評核》（*Assessment in the Mathematics Classroom*）（Webb，1993）。
- 4) 1993 年 MSEB (1993)進一步出版了《測量所算數的》（*Measuring What Counts*）。
- 5) 1995 年在美國數學教師議會(NCTM，1995)發表了《學校數學評核的標準》標誌著新的數學評核體系的初步形成。

眾所周知，華人地區的教育，是評核考試驅動的教育，然而華人地區的教育工作者對傳統數學評核教育改革力度遠遠不及美國教育部門，在《人人算數》

1 本研究是建立在黃毅英教授、林智中教授開放題研究基礎上的再發展。特別感謝導師對本文初期文稿的意見。

(Everybody Counts) 一份美國未來的數學教育報告中 (MSEB, 1989), 已詳盡總結了傳統數學評核所導致的教學實踐的問題, 而這些教學實踐的問題也無不是華人地區的教育評核體系當前存在的問題:

- 1、測試不能很好地評核教育目標, 教師常常以測試作為教學之目的, 而不是為課程和學生。
- 2、測試側重低水準的思維, 而不是高水準的思維, 強調對题目的及時反應而不是創造思維和表達。
- 3、某種特殊教學容易獲高的測試分數, 惡化了教育的不平等。
- 4、測試使數學成了僅有唯一答案科目, 數學觀念更加片面。
- 5、限時的測試因強調速度而阻止了許多“慢學生”的數學學習。
- 6、標準測試極大的“標準化”了數學的學習方式與速度, 忽視了學生學習個性的不同。
- 7、測試僅僅提供了學生在壓抑的環境下的成就的“速寫”而不能提供在支援環境下學生連續的成就“資訊”。
- 8、低的數學分數破壞了自我概念, 極大的壓抑了數學學習的自信心。

我們設想華人數學更受評核影響, 評核是否是影響學生的數學理解因素, 評核又究竟如何影響學生的數學理解, 理論與經驗型結論較多, 但實證方面相對空白, 也比較薄弱。

這裏我們以一個學生沒有學過, 也沒有現成方法, 也不用常規列算術式, 的一個稍難, 但仍在思維負荷以內的開放題, 深度地訪談, 深層瞭解學生解該題的解題思路受哪些因素影響, 核是否是影響學生的數學理解因素, 評核又究竟如何影響?

研究問題: 評核如何影響學生的數學理解?

貳、 研究方法

研究工具

開放題作為研究數學理解的研究工具

與具有唯一正確答案、甚至唯一正確問題解決方法的傳統問題(封閉題)相比，開放題不僅具有多種可能的(正確)解答，也可以具有多種可能的問題解決方法，開放題具有反映不同思維深度的優點，同樣利於解答者自主選擇展示自己水準的途徑與方式，因此這種開放題評核為數學過程考慮提供了得天獨厚的條件(鄭毓信，1993，2001)。其題目本身的特點，開放了學生在思維敏捷性、靈活性、獨創性、廣闊性等方面的發展。改變了學生在問題解決時，與頭腦中的“題庫”比較，確定類型，套用解法的思路。也改變了考試幾乎變成了記憶題目類型比賽的局面，數學開放題為思維方式和過程提供了更多空間，具有成為研究數學理解的研究工具得天獨厚的條件。

本文以一道要求數學理解的數學題及相關的學生訪談(共23名)作為分析基礎，這道放寬測試的時間，使那些「慢手」也能充分展示自己的才華的數學題是：

25 位同學一起去划船。大船每條可以坐 6 人，租金 10 元，小船每條只可以坐 4 人，租金 8 元。如果讓所有同學都上船，又要儘量省錢，應該怎樣租船才付最少的租金呢？要租多少條大船，多少條小船？租金又是多少呢？請詳細列出你的計算方法。(注意：基於安全理由，每條船載客限額必須嚴格遵守，不得超載。)

本題是以中學生熟悉的租船材料為背景，明確易懂，有利于學生上手，減少因為讀不懂問題的胡亂猜測。突出對數學的「核心能力」——思維能力的考查，思維能力不僅包括邏輯推理能力，還包括探索能力、直覺思維能力、合情推理能力、策略創造能力等，本題把對思維能力的考查放在主導地位，集中突出邏輯推理、合情推理，注重表述的條理性、嚴謹性，強調理性思維和直覺思維，而不能靠記憶和套公式解決，對於小學 5 年級的問題解決者必須按處境分析、推理大小船數、空位數、和需用金額的關係，而不能像平時列綜合算式或方程式般迅速奏效。該題目涉及人數、大小船數、空位數、和需用金額的四個變數的函數，學生

在綜合推理這四個變數的變化依賴關係，可找到各個水準的綜合策略。由於變數與變數關係複雜，所以區分度較大，量度學生數學理解的空間大，範圍廣，能夠讓學生的主體性和建構性充分調動起來。該題的設計在原則上層次分明的「臺階」，起點低、入口寬，難度大，區分度大，問題解決背景自然，這樣可以測試出學生問題解決所處的真正水準。

本題解決的關鍵環節：1、認識到大船每人計租金比小船省錢。2、節省空位是節省的途徑。

研究對象

23 名研究對象是 6 所不同的小學五年級學生。為研究學生的解題思路受那些因素影響，我們必須控制，學生套用現成解法與頭腦中的“題庫”比較，確定類型，而缺乏自己分析問題解決問題而建立數學理解的過程。為避免使用方法（常規的列方程）方法，而不選擇中學生。

研究手段

訪談作為研究數學理解的研究手段

從學生的解題，瞭解反映了學生無數次數學思考實踐活動中所總結的數學方法和思維習慣，及多種思維習慣一點一滴沉澱的思維品質，數學觀念，從這些思維品質，數學觀念的“格局”，來預知學生的數學學習。

“言為心聲”，語言是頭腦思維的外化形式，思維的“物質外殼”，是瞭解學生思路的物質載體。這種方式不僅可以保持原始資料的“原汁原味”獲得最“真實”數學思維的“即時”反應。學生的書寫練習本保留了學生思路的痕跡，是思路的“原形”，訪談則“趁熱打鐵”，在學生展開思路之時，趁機探索頭腦內部的解題框架。

數學思維是一個動態的決策過程，這一動態的決策過程的“偶然性和動態性”卻被以往是數學思維研究者忽略。而訪談以訪問者和學生互動的“對話”模式，呈現特定解題情景下，數學理解與解題的“活著”的模式，正在經歷的“經歷”。

訪談挖掘了學生思維“現實”,讓學生昭示自我已經內化的思維的全過程,相對明晰地凸現出思維“現實”的各個部分、各個層面和各種關係的“動態”畫面。

利用訪談這一傳遞思想的工具,學生思想現實、解構數學問題解決意義的全過程。理解在特定問題環境下,學生數學解題模式建構的主觀過程,從各個方向再現數學理解,數學解題的全部視角和方式。

研究步驟

選擇研究對象并瞭解其學習數學的背景,學生解開放題,可放寬測試的時間,以學生的草稿與草圖為介體逐個作深入訪談,同時錄音,作事後分析。以思路、策略為焦點,從而瞭解其背後的問題解決思維模式。按照下列步驟分析:

- 1) 自己先做本題一遍,找出問題解決的關鍵。
- 2) 通讀全部訪談記錄,寫下即時的初步印象備忘錄。
- 3) 記錄每個學生問題解決的主要思路、特點,內在的邏輯思路。
- 4) 找出所有不理解之處。如本土語言,口誤,令人費解的列式,從上下文理解問題解決的內在邏輯和理性²。
- 5) 停下來製定本題新的評核標準:理解題意程度、方法的有效程度、推理的合理程度、計算,核查全部學生訪談資料,製定本題新的評核標準。
- 6) 再次閱讀訪談記錄,核查一致程度。

數據分析時的注意事項:

準確理解學生語言背後的意義在訪談中是一個挑戰,加強研究的效度,數據分析時特別以下問題。

1 注意學生不可言喻的、下意識或潛意識的語言特定的意義。

例如“準確”在下列不足百字的訪談記錄中出現四次,他的“準確”有著特定的意義,是“省錢”之意。

² 23名同學來自香港6所小學

學生: 可以準確地計出多少只大船, 多少只小船。

研究員: 有沒有想過其它組合呢?

學生: 有。

研究員: 全部坐大或全部坐小, 可以嗎?

學生: 可以, 有其中... 有 4 大船 1 只小船。

研究員: 你有沒有想過呢?

學生: 有。

研究員: 爲甚么不用這個方法呢?

學生: 因爲不是太準確, 我以爲不是太準確。

研究員: 準確是甚么意思呢?

學生: 題目說要慳多點錢。

研究員: 那么這一個是不是多慳點錢?

學生: 不是那么多, 4 只也要 40 元, 1 只小 8 元... 48 元, 如果你這樣 (自己的方法) 便可以
準確一點

例如, 原文“坐唔晒”是坐不下的意思。“我覺得這個比較抵”, 是我覺得這個比較
“省錢”之意。“要儘量慳錢”是儘量省錢的意思。

2 注意從上下文理解其思路的內在邏輯。

準確理解學生語言背後的思路的內在邏輯在訪談中是一個更大的挑戰。如研究
員問: 可不可以又租大船, 又租小船呢? 學生二: $6+4=10$, 即是坐 10 個
人... 即是 3 只大船, 2 只小船。筆者一開始并不明白“坐 10 個人... 即是 3 只大
船, 2 只小船”的關係, 思考很久才發現其中間斷的邏輯環節“ $25/10=2$ 餘 5”即 2
倍一個大船和一個小船, 餘 5 個人可搭一個大船, 即是 3 只大船, 2 只小船。
如“25 除 6 除 4” (3) 是從上下文可以分析, 自己并不知道爲甚么要再除 4, 在
被追問其內在的數學理解的情形下, 只好交代“應該不用除 4”, “好希望找條式”
的語言, 透露想用上所有的數列式的內在邏輯和目的。

3 欲言又止背後的原因。

例如“但想一想，這(小船)可以坐 4 人，租金是 8 元，大船可以坐 6 人，但 10 元。之後 $6-4=2$ ，2 又不知怎樣...” (20)，學生欲言又止背後的原因，因頭腦中列式和數學理解并未“整合”到一起，被列式所深深苦惱和禁錮。

4 區分口誤.

如，寫出 $25/6=4$ 人，要多租一條小船讓餘下的一人，然後在 $25/6$ 旁寫 $\times 10$ ，但劃去，再計算 $4 \times 10 + 4 = 44$ 元。(13)。從上下文可看出 $25/6=4$ 條，他說 4 人是口誤，應是 4 條。

參、發現與討論

參與者的數學理解總體概況

整體上，參與研究學生的思路情況如下：只有一名學生當面對 $25 \div 6$ 餘 1 時，不知如何處理這個餘數。提醒下³，知道須為餘下的一個人租一條船。其餘學生均可以以現實情境處理題目。

共有 15 名學生的思路是把題目理解為「25 人能夠全部上船，無進一步的『省錢』理念」。例如 7 只小船，共 56 元，便是一個典型的思路。2 名學生以「一隻大船和一隻小船」為思維的邏輯起點，思路特別，從每次同時租一隻大船和一隻小船：「每次 10 人， $25 \div 10 = 2$ 餘 5 人，即 2 倍的一個大船和一個小船，再餘 5 人」。其中一個同學認為餘 5 人，使用一隻大船，答案為 3 只大船和 2 只小船。而另一個同學認為餘 5 人，使用 2 只小船，答案為 2 只大船和 4 只小船。儘管前者答案正確，但是邏輯上，從字面來開始推理，不合節省的「情」，方法缺乏比較，題目理解仍存在於「25 人能夠全部上船」的事實性內容和表述的淺層結構上，還未深入到問題內在的數學結構上。

8 名學生既「有 25 人能夠全部上船，又有進一步的『省錢』理念」，1 名學生雖然提出「一條大船比一條小船的租金貴，一開始只考慮用小船」的「盲點」，但

³因為題目和課本習題相差較大，本研究適當的提醒，讓學生理解題意，均沒有「教學介入」。

仍能考慮座位的利用率。共 5 名同學從大船入手，既兼顧了大船入手較便宜，又兼顧了位子的利用率兩個角度，理解處於組織化、系統化、綜合化的層面。

還有一名同學，思維過於現實化，認為學生獨自乘船很危險，需要加一名教師，以 26 人來分配船數，脫離題目原意。

下列訪談所得的資料，往往超越批改作業時較少瞭解學生數學思維資訊的限制，以訪問者和學生互動的「對話」模式，學生以最「真實」的數學思維「即時」反應，呈現特定「租船」問題解決情境下，數學理解與問題解決的「活著」模式，展示了通常被數學教育工作者和教師所忽略的關係。

發現一：評核的指標體系間接規定學生的解決問題的模式，規定了學習數學成功的方式、已經慢慢形成一種“型化”、“僵化”的數學觀念。

我們先看以下的例子。

(學生靜默 325 秒,期間學生首先寫下:要租大船 1 條,租小船 6 條,租金又要 58 元,然後列出 $(25\div 6)\div 4=1$ 條, $25\div 6=6$ 條, $6\times 8+10=48+10=58$ 元。)

訪談者：可否告訴我你是怎樣想這題數呢？

學生：大船坐 6 人，小船坐 4 人，25 位同學租船，又要儘量慳錢。

訪談者：為甚麼要用除法去計呢？你可否告訴我，你怎樣計呢？

學生：（指著 25 除以 6 除以 4）這個是大船幾多條，一條大船可以坐 6 人。

訪談者：為甚麼要再除以 4？

學生：小船可以坐 4 人，所以除 4。

訪談者：即是你將 25 人除大船可載人的數目，再除以小船的數目，但 25 除 6，為甚麼是 4 呢？

（靜默 11 秒）

學生：不知道。

訪談者：25 除 6 是多少呢？

學生：4 餘 1。

訪談者：除不盡，餘下的 1 怎樣呢？

學生：應該不用除 4。

訪談者：其實你看完題目後，清不清楚題目呢？

學生：一般。

訪談者：那些清楚，那些不清楚呢？

學生： 不知道如何列式。

訪談者： 你很希望列式，但找不到關係，是不是呢？

（學生點頭。）

學生： 好希望找條式？

（學生點頭。）

[分析]

我們可以清晰看到：學生頭腦中預先有一種“定勢”總是設法將已知條件的數字，用“加減乘除”符號連接，湊出答案的“固定的模式”。仔細分析，都是設法將已知條件的數字，用“加減乘除”符號連接，湊出答案的“固定模式”的“定勢”。

從學生「好希望找條式」的答話，道出學生思維背後潛在的數學觀念框架和障礙，即評核的指標，「列式和正確的答案」規定了數學成功的內涵、學習數學成功的方式、成功的尺度。我們也看到，評核標準中“套公式”、“湊答案”已經慢慢形成一種“型化”、“僵化”的數學觀念。這種數學觀念也一定程度上，束縛了學生對數學理解自然建構。

[討論]

事實上，「25 除以 6 除以 4」是從上下文可以分析，自己並不知道為甚麼要再除 4，在被追問其內在的數學理解情形下，只好交代「應該不用除以 4」，「好希望找條式」的語言，透露「他想用上所有數位元列式的目的」。因為這是我們傳統數學評核的指標。我們看到數學理解讓位於機械列式，評核「深層地」影響了學生的學習方式。這亦反映了評核的標準，間接促進了僵化的數學觀形成。小組的先前研究亦有類似發現（黃毅英，2002；Wong, Marton, Lam, & Wong, 2002）。當然課程、教材、教師、教法、同學的數學觀等同時參與塑造衍生這樣數學觀的「經驗空間」（lived space），而傳統的評核方式也自然是其中一個重要因素，於是學生迫于「迎合」這樣的評核方式，去調控自己的內在學習「機制」，評核成了教育體系一隻隱形的「手」，以其潛在的力量牽動、調節學生整個學習過程。

發現二：評核的“列式”要求，一定程度上束縛了學生對數學理解的自然建構。

以下訪談再現學生受“列式”評核如何束縛了學生對數學理解建構。

(靜默 103 秒，期間學生寫了 $6 \times 10 = 60$ 。)

學生：計不到。

訪談者：你也計了 $6 \times 10 \dots$ 。

學生：錯的。

訪談者：為甚麼錯呢？剛才你想些甚麼

學生： $6 \times 10 = 25 \dots$ 。

訪談者：怎樣呢？為甚麼用 6？6 代表些甚麼呢？

學生：大船可以坐 6 人，所以乘 10，租金是 10。但想一想，這（小船）可以坐 4 人，租金是 8 元，大船可以坐 6 人，但 10 元。之後 $6 - 4 = 2$ ，2 又不知怎樣...我覺得這個比較抵。

訪談者：怎樣 $6 - 4 = 2$ 又比較抵？是怎麼意思呢？

學生：因為 $6 - 4 = 2$ ，2 是增加 2 元，但可以坐 4 人...。

訪談者：即是？題目問些甚麼？

學生：不知道式怎樣計。

[分析]

學生從「大船可以坐 6 人，所以乘 10，租金是 10。但想一想，這（小船）以坐 4 人，租金是 8 元，大船可以坐 6 人，但 10 元。之後 $6 - 4 = 2$ ，2 又不知怎樣...」從訪談內容中，我們可以清楚看到，學生總是設法將已知條件的數字，用“加減乘除”符號連接，湊出答案，“2 又不知怎樣...”，欲言又止的背後，是被列式這個要求所深深困擾。從學生「不知道式怎樣計」的答話，道出學生思維背後潛在的數學觀念框架和障礙，即評核的指標—列式，評核如同一隻隱形的「手」，以其潛在的力量牽動、調節學生整個解題過程。

發現三：除去對列式要求，自然出現了“數學理解”。

學生被告知不用列式後，而迅速得出所求的「動態過程」⁴。

⁴值得說明的是，不是每個受訪學生若被告知不用列式後，其迅速解出來問題。表現，可能部分學生受以往評核

(靜默 69 秒, 期間寫了 $18 \times 10, 7 \times 8$ 。)

訪談者: 不一定要列式, 做到便行了。

學生: 我認為其中 18 位坐 6 元這條船...

訪談者: 坐 6 個人的船。

學生: 是, 其他 7 位就坐 8 元這條船。

訪談者: 為甚麼這樣是最便宜呢?

學生: 因為(大船)貴, 25 位其中 18 位坐 10 元(大船), 其他就坐(小船), 如果坐這個(大船), 會有剩下一些人, 所以比較貴。

訪談者: 即是 18 人坐 10 元一條的船, 7 個人就坐 8 元一條的船?

學生: 即是 7 個人坐, 大約 2 個人...2 條船。

訪談者: 這個呢?(大船)

學生: 3 條。

訪談者: 你怎樣想是 3 條大, 2 條小呢?

學生: 乘, 看看怎樣最多幾個人可以坐滿船, 然後剩下的人, 不要坐這個(大船), 而坐這個(小船), 小船少了少少, 所以最便宜。

訪談者: 為甚麼你不想 4 條大船, 1 條小船? 有沒有想過呢?

學生: 沒有。

訪談者: 為甚麼呢?

學生: 六四二十四, 如果坐這個(大船), 會多了一個人...

訪談者: 可以坐一條小船。

(靜默 5 秒)

學生: 我覺得多了錢, 不是最抵。

訪談者: 你感覺多了錢?

學生: 是。

[分析]

我們看到在「不一定要列式，做到便行了」的指導語之前與之後學生表現很鮮明的不同，之前，學生在頭腦列式和數學理解並未「整合」到一起。在學生看來，列式是他最希望的，但實際又有些困難，之後，一旦這個禁錮解除，學生的思路便恍然大悟、「柳暗花明」，數學理解脫殼而出，我們看到學生在「不一定要列式，做到便行了」的指導下，立即有了思想，也有了方法。

這裏，我們清楚地看到，學生依據評核標準去努力，設置方向和計畫，調節和執行學習。正如 Stenmark (1992) 也指出「我們所測試的，就是我們所得到的」(頁 175)。下列訪談也展示了，評核和理解“不能整合的兩張皮”，我們除去對列式要求的“禁錮”，“數學理解”迅速湧出的“動態過程”。

學生： 不懂。

訪談者： 不懂為甚麼呢？你知道題目問些甚麼嗎？

學生： 明白。

訪談者： 但困難在那裏呢？

學生： 如果要全部同學上船，又要儘量慳錢，應該怎樣租船呢？

訪談者： 你有沒有甚麼入手方法？

學生： 我最初想用大船載 25 位同學，但後來覺得有點不對。

訪談者： 為甚麼不對呢？

學生： 我在想 25 人，每條船可以載 6 人，我在計租金。

訪談者： 在計租金前，是不是要先計幾多條船呢？

學生： 是。

訪談者： 怎樣計呢？

(靜默 17 秒)

學生： 沒有回答。

訪談者： 我看見你計 $25 \div 6$ ，為甚麼又劃了它。

學生： 我覺得如果 $25 \div 6$ ，租金會比較貴，要十元。

訪談者： 怎樣知道會比較貴呢？

(靜默 8 秒)

學生： 直覺...。

(靜默 73 秒, 嘗試列式 $25 \div 6 \times 10$ 。)

學生: 我想問如果我計這一條式, 可不可以沒有數字?

訪談者: 隨你喜歡用你想的方法。

(靜默 92 秒, 寫下 $25 \div (6 \times 3) \times 10 + 4 \times 2 \times 8$, 但劃掉了。)

學生: 始終也不懂。

訪談者: 你剛才劃了 $25 \div (6 \times 3) \times 10 + 4 \times 2 \times 8$, 是甚麼意思?

(學生沒有回答。)

訪談者: $25 \div (6 \times 3)$ 是甚麼意思呢?

(學生沒有回答。)

訪談者: 3 是甚麼意思呢?

學生: 我想用 6 來除 25, 但我不想像 6 除全部 25。我在想如果 18, 剩下 7 人, 再坐小船, 如果這樣乘起來...我覺得會比較便宜。

訪談者: 你現在是不是在想幾多人坐大船, 幾多人坐小船呢?

學生: 是。

訪談者: 怎樣分呢? 有沒有策略呢?

學生: 如果剩下 7 人, 用小船來載他們, 只需要 2 條...雖然還剩下一個空位。

訪談者: 即是用 2 條小船來載剩下的 7 人?

學生: 是。

訪談者: 即是幾多人上了大船?

學生: 18 人。

訪談者: 為甚麼要用 18 人坐大船。

學生: 因為 18 上大船, 剩下 7 人, 如果用 2 條小船來載這 7 人會差不多載了全部人。

訪談者: 你是用直覺想 18 人坐大船? 還是有其他方法下決定呢?

學生: 沒有。

訪談者: 直覺?

學生: 也不是完全直覺。

訪談者: 你當我是另一個小朋友, 我想不到 18, 希望你解給我聽怎樣想呢。為甚麼要 18? 12 可以嗎?

(靜默 28 秒)

學生: 沒有特別想法。

訪談者: 18 人即是多少條大船呢?

(靜默 4 秒)

學生: 三條。

(寫下 3 艘大船。)

訪談者：你先寫下，幾多條小船？

(寫下 2 艘小船)

訪談者：題目問租金是多少，你想到嗎？

(寫下 30、16)

訪談者：所以共需多少錢呢？

(寫下 46 元。)

[分析]

由以上我們看到，「我想用 6 來除 25，但我不想像 6 除全部 25」，說明「學生思路很矛盾。分析上下文，可發現矛盾在於學生想通過列式湊出『18』」這個答案。而列式 $25 \div 6 \times 10$, $25 \div (6 \times 3) \times 10 + 4 \times 2 \times 8$, $25 \div (6 \times 3)$ 亦令人費解，列式思路不暢。當訪談者問怎樣計時，學生沒有回答。我們看到學生的無語，某種意義上，這正是評核和理解“不能整合的兩張皮”，分道揚鑣的尷尬局面的縮影。

這一學生問「列式可不可以沒有數字」，說明學生受了「列式不可以沒有數字」這「經驗空間」的局限，潛意識中評核的指標是「帶有數位的式子」。與上面的個案一樣，但研究者告知「隨你喜歡用你想的方法」時，我們看到學生迅速得出答案。

肆、討論與啟示

以上數據，使我們看到，部分學生被平日評核要求列式所深深困擾和禁錮。我們看到學生在腦中列式和數學理解并未「接合」在一起，當評核的列式和學生的理解不一致時，學生「屈服」於列式所導致的結果——為列式而列式。學生為迎合評核而列式，這時已不能幫助理解，評核的標準在一定程度上「規定了學習的問題解決模式，亦禁錮了學生的數學理解」，當然“對列式的需要”對數學學習和思維發展，也不完全是負面，Cai (1998) 對中美數學教學比較也說明瞭這一點。

通過以上我們看到“評核的標準通過規定了學習的解題模式禁錮學生的數學理解，數學思考，恰恰違背了數學最重要、最根本的思想”。千百年來，作為人類精神的產物——數學，因去掉減法、除法、開方的限制，引進了負數、分數、無理數，

使各運算無限制的進行，思考的絕對自由建立了數系。其最重要最根本的思想是“數學在於思考的充分自由”（米山國藏，1986），

綜上所述：由以上我們發現了數學學習研究中最平凡、最微弱、最普通、但同時也是最有代表性的聲音，看到外部評核對數學理解，數學學習的負面影響，找到“鮮活的”外部評核制約數學理解的特質：評核的標準間接規定了學生的問題解決模式，被評核的指標體系影響了學習的發生方式，而且也看到評核的標準加劇僵化數學觀的塑造，和先前研究結果相一致（黃和孫 2002；黃毅英，2002；Wong, Marton, Lam, & Wong，2002）。

評核的指標，「列式」間接規定學生的問題解決模式，規定了數學成功的內涵、學習數學成功的方式、已經慢慢形成一種“型化”、“僵化”的數學觀念，而這種數學觀念，束縛了學生對數學理解的建構。正如 Stenmark（1992）所指出「我們所測試的，就是我們所得到的」（頁 175）——因為，學生依據你的評核標準去努力，設置方向和計畫，調節和執行學習。學生迫于「迎合」這樣的評核方式，去調控自己的內在學習「機制」，評核一定程度上成了教育體系一隻隱形的「手」，以其潛在的力量牽動、調節學生整個學習過程。

誠然，外部評核的列表徵是數學的基本表徵之一，基本要求之一，我們的教材、課程內容要求學生更多以嚴謹、演繹的數學邏輯體系的表徵要求，但是兒童的數學理解更可能有“距離”，但我們的數學教學，如何兼顧外部評核與數學理解，兩者的平衡，一方面，評核應該允許兒童的有自己的語言解題，表達解題方法，評核應該允許不用列式的解題模式，另一方面，習題設計方面，也應該包含不靠列式的數學理解題目，或許幫助形成正確的數學觀念，是未來教學與評核可能的發展方向。

參考文獻

- 米山國藏著，毛正中、吳素華譯（1986）。《數學的精神思想和方法》。四川：四川教育出版社。
- 黃毅英（2002）。數學觀研究綜述。《數學教育學報》11卷1期，1-8。
- 鄭毓信（1993）。《問題解決與數學教育》。南京：江蘇教育出版社。
- 鄭毓信（2001）。開放題與開放式教學。《中學數學教學參考》3期，1-3。
- 黃毅英和孫旭花（2002）。學生數學觀的個案刻畫。《基礎教育學報》2期，頁15-34。
- Cai, J. (1998). An investigation of U.S. and Chinese students' mathematical problem posing and problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 10(1), 37-50.
- Mathematics Sciences Education Board. (1989). *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- Mathematical Sciences Education Board. (1991). *For Good Measure: Principles and Goals for Mathematics Assessment, Report of the National Summit on Mathematics Assessment*. Washington, DC: National Research Council.
- Mathematical Sciences Education Board. (1993). *Measuring What Counts*. Washington, DC: National Academy Press.
- National Commission on Testing and Public Policy. (1990). *From Gatekeeper to Gateway: Transforming Testing in America*. Chestnut Hill, MA: Boston College Press.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematics beliefs and behavior. *Journal for research in mathematics education*, 20(4), 338-355.
- Stenmark, J. K. (1992). *Mathematics Assessment Myths, Model, Good questions, and Practical Suggestions*. Reston, VA: Author.
- Webb, N.L. (1993). *Assessment in the Mathematics Classroom* (1993 Yearbook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Wong, N. Y., Marton, F., Wong, K. M., & Lam, C. C. (2002). The lived space of mathematics learning. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 25-47.