

第5章 結論

在對杜知耕的生平、算學著作與算學風格有深入研究之後，我們不難發現《數學鑰》是一部會通中西的算學著作。杜氏身處在「西學精矣，中土失傳」的時代背景下，遺留下來算家諸書中所載的九章之法多「只言其法而不言其義」或「不得其理而強爲之解」，使後之學者大都習之而不察其弊，或株守成法而不知其道。

杜知耕積多年研究中西數學之經驗，以其「度算合一」與「形數合一」的中心思想爲基礎，從傳統的九章算題出發，並加入當時所傳入西學線、面、體三部的概念、題目及邏輯推理的論證方式，用圖文並陳之方式講明古九章算法的原理。此種「會通中西」的方式，對當時政界與學界的人士來說，無論從情感或方法上都是容易接受的。因此不論在當時或後世，許多學者都予以該書極大的肯定與評價。²²²梅文鼎就曾於《勿庵歷算書目》中對此書作過高度評價，他說：

近代作者如李長茂《算海詳說》亦有發明，然不能具九章，惟方位伯《數度衍》於九章之外蒐羅甚富。杜端甫《數學鑰》圖注九章頗中肯綮，可為算家程式，其說固不誣矣。²²³

其次，與杜知耕亦師亦友的李子金也對此書作出中肯的評語，他說：

世所傳算家諸書皆備載九章之法而不言其義，故使後之學者多習矣不察其弊。惟唐荊川先生著有《六論》，欲講明九章之法，可謂有功此道。然考其所言，或止得其似而未得其真者有之；或止得其當然而未得其所以然者有之。終不若端甫之書，臚列井井，明白而易曉，使人由淺入深，因博為天下賢、智、愚、不肖無不能讀，可以行天下後世而無弊也。²²⁴

再者，錢寶琮在論及《幾何原本》的邏輯推理體系對清初算學家的影響時曾說：「《幾何原本》中邏輯推理的論證方式在徐光啟《測量異同》、《勾股義》與杜知耕的《數學鑰》等著作中都有反映。」²²⁵這種與徐光啟著作相題並論的評價，正可說明杜知耕及其《數學鑰》在清初「中西會通」時期中所處的重要位置。²²⁶

²²² 參見高宏林，〈杜知耕與《數學鑰》〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系—第七卷》，頁214。

²²³ 參見梅文鼎，《勿庵歷算書目》。

²²⁴ 參見李子金，〈杜端甫數學鑰序〉。

²²⁵ 參見錢寶琮，〈明清之際西方數學的傳入〉，收入《李儼、錢寶琮科學史全集》第五卷，頁263。

²²⁶ 參見高宏林，〈杜知耕與《數學鑰》〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系—第七卷》，頁214。

《數學鑰》全書六卷，凡例 43 則，題目 264 個，附 5 個分法的問題，共記 312 則。題目內容包括《算法統宗》、《幾何原本》、《測量全義》、《同文算指》、《大測》、……等書，闡述詳細且附有圖解。茲將《數學鑰》的算學特色說明如下：

1、以九章名目為體例，但各章所討論的重點則與《九章算術》略有出入。茲將不同處列表如下：

名目	《數學鑰》	《九章算術》
方田	直線類、曲線類圖形求面積及反求邊、徑、周（含開平方法）。	分數論（分數四則運算）、幾何圖形求面積。
少廣	立體圖形求體積及以體積反求邊、徑、周（含開立方法）。	開平方法、開立方法、幾何圖形以積（面積或體積）反求邊、徑。
商功	計算勞動力（人數）、工作量問題。	立體圖形（含柱體、錐體、錐臺）求體積，及以體積反求邊、徑、周。計算勞動力（人數）、工作量問題。

顯見杜知耕將方田章定義為平面幾何圖形的求面積與反求邊長問題。而為了使整章的內容較為一致及完整，符何其原先設定，因此其將原屬少廣章之幾何圖形以面積反求邊、徑問題移於此，並將分數的四則運算移至第三卷粟布章、衰分章之後討論。其次我們可看出，少廣章顯然被定義為立體幾何圖形的求體積與反求邊、徑、周問題。而商功章則被簡化，只討論計算勞動力（人數）、工作量問題。

- 2、《數學鑰》內容安排是由易而難、由淺入深，循序漸近的。且所用之概念、定理、公式交互引用。並於各卷卷首仿照《幾何原本》中的「界說」的體例，列凡例數則以介紹該卷中題目所需用到的數學名詞及概念。
- 3、不論凡例或問題解答皆巧妙的運用圖形說明或論證解法理論，充分表現「數非圖不明」的形數結合思想。且可看出部份凡例或題目的文字說明若捨去圖形後並不明確。這或可當為其形數合一數學思想與研究方法的另一「明證」。
- 4、一題一公式、一公式一題，並無同一公式數個例題的情形。
- 5、據筆者比對之結果，《數學鑰》全書 269 個題目中與《算法統宗》類似的有 129 題，而連題目數據都相同的有 17 題。其中粟布、衰分、商功、均輸、盈朒、方程等章同質性尤高。除此之外，方田章的開平方法證明所附之圖形及少廣

章之開立方法證明所附之圖形，也分別與《算法統宗》上的「一方四廉兩隅演段圖」及「開立方廉隅圖」相類似。再以當時有關九章古算的流傳性來看，筆者認為《算法統宗》應是《數學鑰》一書參考九章算法的主要依據。

- 6、與《九章算術》或《算法統宗》的題目敘述相較，《數學鑰》的題目敘述簡捷而清楚，基礎問題以條件與所求為敘述之主體而不重題目之情境描述。此種寫法與今日之教科書類似。
- 7、題目所用之數據組顯是經過設計，與《九章算術》或《算法統宗》所用並不相同。且大部份題目，只要是屬於同概念或近似概念互相推導而出的，所用的數據組皆相同，顯見杜知耕在乎的並非題目所用之數據及答案，數據及答案應只是其用來顯示該題數學概念與公式所借用之「傀儡」而已。
- 8、從方田章、少廣章、勾股章等討論平面或立體的幾何圖形題目中可看出，除題目所蘊涵的數學概念與公式交互引用外，勾股章之公式及概念廣為另二章所引用。此與方中通的「西學歸九章」、「九章皆勾股所生」或梅文鼎的「幾何即勾股」說法有異曲同工之妙。
- 9、廣泛吸收《幾何原本》等西洋傳入的數學概念、公式及邏輯推理的論證方法，全面反映中西會通時期的數學研究特徵。²²⁷我們可從底下幾點得到驗證：
 - (1)「凡例」、「問題」、「法」、「解」的體例與《幾何原本》的「界說」、「題」、「法」、「論」體例類似，尤其「凡例」的寫法與《幾何原本》的「界說」類似。
 - (2)從《數學鑰》的目錄中可看出，西洋傳入的題目有 11 題。如第一卷第 8 題的「象目形求積」、第二卷第 16 題的「橢圓求積」、……等，皆屬此類。
 - (3)從題目的「解」中可看出原屬傳統題目，但利用西洋傳入的知識及概念解題或證明的則有 15 題。且從其「解」中的註記可看出所引用大多是《幾何原本》、《測量全義》、《同文算指》、《大測》、《割圓八線表》、等書的概念。
 - (4)本書第六卷勾股章中之勾股定理的證明所採用的是《幾何原本》第一卷第 47 題的證明，而非《九章算術》劉徽的證法。
 - (5)本書所用之圓周率為 $\frac{22}{7}$ ，而非 3。而於第二卷方田章曲線類所載求圓周率之法與阿基米德在《圓的度量》一書的命題 3 完全相同。

²²⁷ 同上注，頁 212。

(6)《數學鑰》的幾何類題目約占全書的 69.9%，其中方田章直線類與曲線類二卷合起來約占全書的 37.8%。顯見杜知耕的重點在幾何問題。此與《九章算術》著重粟布章、衰分章等比例分配的算術問題有很大的不同。

10、大量運用曲線轉化為直線的數學轉化思想，不僅將題目的難度變易，並加強了新舊知識的連繫。如第二卷第 6 題的圓積求徑、第 8 題的圓環求積，皆先利用圓積與方積比例轉化為方積求邊與求方環積的題目。

綜合上述特色，我們可發現《數學鑰》不僅是一本會通中西的數學著作，且題目的收集與安排處處顯現出杜知耕個人的巧思與其形、數、理三者合一的中心思想。此外，其內容的安排依九章的體例，且題目的難度與所用的概念由易而難、由淺入深，循序漸近，概念、定理與公式亦交互引用。並用圖文並陳之方式附予古九章算法新意。顯見杜知耕作《數學鑰》的目的除了致力於古九章算法之普及外，也希望此書成為一本容易入門的數學書。此外，就其題目的編排方式、題目的敘述方式與所用之數據組合來看，《數學鑰》或可說是《九章算術》向現代教科書形式過渡的一部著作。

清初算學家在西方數學的研究及中西數學的會通方面，最具代表性人物應屬梅文鼎。然而，杜知耕以其對中算、西算的了解，致力於九章算法的整理及論證，完成《數學鑰》一書。其後並以此書作為基礎，將原《幾何原本》，「就其原文，因其次第，論可約者約之，別有可發者，以己意附之解。已盡者節其論，題目自明者併，節其解務簡省文句期合題意而止。又推義比類，復綴數條于末，以廣餘意。」²²⁸進而完成《幾何論約》一書。此種將中國的《九章算術》的算法與西洋傳入《幾何原本》的概念連結，並設法普及傳統中算及西算的努力，對於中國古算的傳承功不可沒，對會通中西的貢獻亦不容忽視。在本論文深入探討之後，我們不僅對杜知耕及其算學研究有了全面而深入的了解，同時也勾勒出清初「會通中西」算學家研究的風貌。

²²⁸ 引自杜知耕，〈《幾何論約》自序〉。