

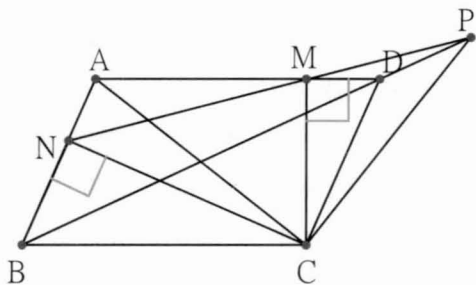
# 中學生通訊解題第八十一期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

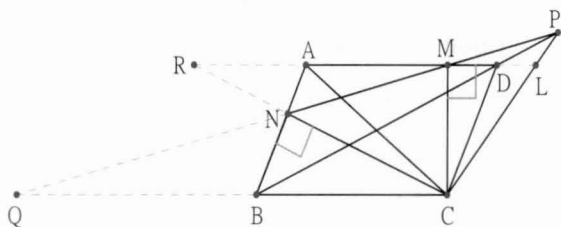
8101

已知平行四邊形  $ABCD$ ， $C$  在  $\overline{AD}$ 、 $\overline{AB}$  上的射影分別是  $M$ 、 $N$ ， $\overline{MN}$  延長後與  $\overline{BD}$  的延長線交於  $P$ ，求證： $\overline{PC} \perp \overline{AC}$



參考解答：

延長  $\overline{AD}$ ，交  $\overline{PC}$  於  $L$ ，則  $\overline{PC} \perp \overline{AC}$   
 $\Leftrightarrow \triangle ACM \sim \triangle CLM \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{ML} = \overline{CM}^2$



證明  $\overline{AM} \cdot \overline{ML} = \overline{CM}^2$ ：

延長  $\overline{MN}$ ，交  $\overline{CB}$  延長線於  $Q$ ，又延長  $\overline{CN}$ ，交  $\overline{DA}$  延長線於  $R$ ，則

$$\frac{\overline{ML}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{AM}}$$

於是  $\overline{MD} \cdot \overline{RM} = \overline{ML} \cdot \overline{AM}$

$\therefore$  平行四邊形  $ABCD$ ， $\overline{CM} \perp \overline{AD}$ ，

$\overline{CN} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{CR}$ ，得  $\overline{MD} \cdot \overline{RM} = \overline{CM}^2$

故  $\overline{AM} \cdot \overline{ML} = \overline{CM}^2$ ，得證。

解題評註：

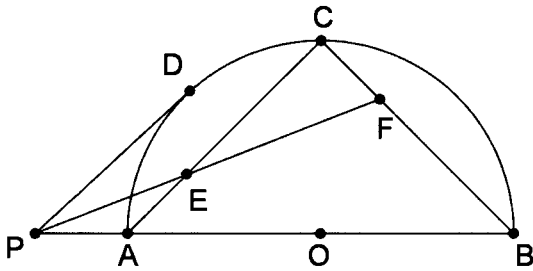
1. 此題利用直角三角形母子相似性質得到所要證明的一個充要條件  $\overline{AM} \cdot \overline{ML} = \overline{CM}^2$ ，以及由題意得出  $\overline{CD} \perp \overline{CN}$  性質，因此適當作出如解法中的補助線。
2. 這一題作出補助線，方能順利清楚的證明出此題。同學應學習如何從題意中抽絲剝繭作出適當的補助線。作出適當的補助線，往往是幾何題的關鍵。
3. 使用數學軟體的確可以幫助了解題意，檢驗兩幾何物件的關係，例如兩幾何物件的交點有幾個；但是在數學的證明上應將來龍去脈嚴謹說明。
4. 此題亦可用解析幾何的方法證明。

問題編號

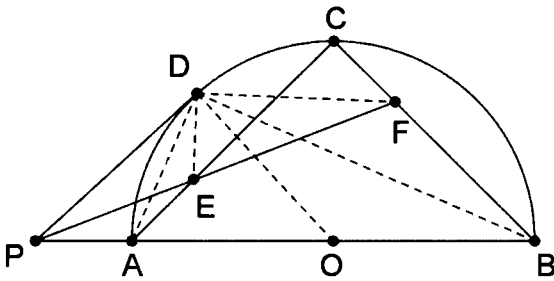
8102

以  $A$ 、 $B$  為直徑兩端點的半圓(如圖)， $O$  為

$A$ 、 $B$  的中點， $C$  為半圓弧的中點， $P$  為直徑  $AB$  延長線上一點，過  $P$  作半圓的切線， $D$  為切點。 $\angle DPB$  的平分線分別交  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$  於  $E$ 、 $F$  兩點。證明： $\overline{OE} \perp \overline{OF}$ 。



參考解答：



連接  $\overline{DO}$ ,  $\overline{DA}$ ,  $\overline{DB}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\overline{DF}$

(1)  $\angle DPB = 90^\circ - \angle DOP = \angle COD$

(2)  $\angle DPF = \frac{1}{2} \angle DPB = \frac{1}{2} \angle COD = \angle CAD$

因此  $A, P, D, E$  四點共圓

$\angle DPF = \angle CAD = \angle CBD$

因此  $B, P, D, F$  四點共圓

(3)  $\angle CED = \angle DPA$  (因為  $A, P, D, E$  四點共圓)  
 $= \angle CFD$  (因為  $B, P, D, F$  四點共圓)

因此  $C, D, E, F$  四點共圓

(4)  $\angle COD = \angle DPA = \angle DPA$

因此  $C, D, O, F$  四點共圓

(5) 由(3),(4)可知  $C, D, E, F, O$  五點共圓

因為  $\overline{CE} \perp \overline{CF}$ ，所以  $E, F$  是

$C, D, E, F, O$  五點共圓的直徑兩端點

因此  $\overline{OE} \perp \overline{OF}$

解題評註：

本題可以使用的幾何性質，常見的有【圓內接四邊形】。

問題編號

8103

設  $n$  為正整數，如果存在一個完全平方數，使得在十進制表示下此完全平方數的各位數字之和為  $n$ ，則稱  $n$  為好數(例如 13 是一個好數，因為  $7^2 = 49$  的各位數字之和等於 13)。問：在  $1, 2, \dots, 2010$  中有多少個好數？

參考解答：893。

① 對  $x \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \pmod{9}$  分別計算，可得  $x^2 \equiv 0, 1, 4, 0, 7 \pmod{9}$ ，利用十進制下，一個數與它的數字和  $\pmod{9}$  同餘，可知滿足條件的  $n \equiv 0, 1, 4, 0, 7 \pmod{9}$ ，即  $n \equiv 0 \pmod{9}$  或  $n \equiv 1 \pmod{3}$

② 由  $1^2 = 1$ ， $2^2 = 4$ ，可知  $n = 1, 4$  是好數。當  $n = 3m + 7$ ， $m$  為非負整數時，由  $\underbrace{33\dots3}_{m\text{個}3}5^2 = \underbrace{11\dots1}_{m\text{個}1}\underbrace{22\dots2}_{m\text{個}2}25$ ，可知  $n = 3m + 7$  是好數。

③ 由  $(10^m - 1)^2 = 10^{2m} - 2 \times 10^m + 1 =$

$\underbrace{99\dots98}_{m-1\text{個}9}\underbrace{00\dots01}_{m-1\text{個}0}$  可知  $n \equiv 0 \pmod{9}$  是好

數。

- ④ 由①②③可知  $n$  是好數  $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{9}$  或  $n \equiv 1 \pmod{3}$  所以在  $1, 2, \dots, 2010$  中好數的個數為  $223 + 670 = 893$  個

解題評註：

1. 此題利用正整數的性質『設  $n$  為正整數， $n$  除以 9 的餘數等於  $n$  的各位數字之和除以 9 的餘數。』，因此滿足條件的好數  $n$  必須  $n \equiv 0 \pmod{9}$  或  $n \equiv 1 \pmod{3}$
2. 但是  $n \equiv 0 \pmod{9}$  或  $n \equiv 1 \pmod{3}$  是否為充要條件呢？是的。也就是說，要再說明  $n \equiv 0 \pmod{9}$  或  $n \equiv 1 \pmod{3}$  都能滿足條件，都是好數。參與徵答的同學中有一位在這部份有說明清楚，非常好！

問題編號

8104

已知數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = 1, |a_{2k}| = |a_{2k-1} + 1|, |a_{2k+1}| = |a_{2k} + 2|$  ( $k$  是自然數)，試求  $a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \dots + a_{2009} + 2a_{2010}$  之最小值及最大值。

參考解答：

$$\begin{cases} a_1^2 = 1 \\ a_{2k}^2 = a_{2k-1}^2 + 2a_{2k-1} + 1 \\ a_{2k+1}^2 = a_{2k}^2 + 4a_{2k} + 4 \end{cases}$$

將  $k=1, 2, \dots, 1005$  代入，以上各式相加得

$$a_{2011}^2 = 1 + 2(a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \dots + a_{2009} + 2a_{2010}) + 5025$$

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \dots + a_{2009} + 2a_{2010} \\ &= \frac{1}{2}(a_{2011}^2 - 5026) \end{aligned}$$

由各項的奇偶性可推得  $a_{2011}$  為偶數

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \dots + a_{2009} + 2a_{2010} \\ &= \frac{1}{2}(a_{2011}^2 - 5026) \geq \frac{1}{2}(0^2 - 5026) \geq -2513 \end{aligned}$$

事實上若取

$$\begin{aligned} & a_1 = 1, a_2 = -2, a_3 = 0, a_{4k} = a_{4k+1} = -1, \\ & a_{4k+2} = 0, a_{4k+3} = -2(k = 1, 2, \dots, 501) \end{aligned}$$

$$a_{2008} = -1, a_{2009} = 1, a_{2010} = -2, a_{2011} = 0, \text{ 則}$$

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \dots + a_{2009} + 2a_{2010} \\ &= -2513 \end{aligned}$$

為最小值。另一方面  $a_1 = 1$ ，取

$$a_2, a_3, \dots, a_{2010} \text{ 皆為最大值，即}$$

$$\begin{aligned} & a_{2k} = 3k - 1, a_{2k+1} = 3k + 1(k = 1, 2, \dots, 1005), \\ & a_{2011} = 3016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \dots + a_{2009} + 2a_{2010} \\ &= \frac{1}{2}(a_{2011}^2 - 5026) = \frac{1}{2}(3016^2 - 5026) = 4545615 \end{aligned}$$

為最大值。