

## 第參章 研究方法

本章區分五節，第一節主要說明本研究的設計，第二節介紹本研究所設計的教材，第三節討論本研究的對象，第四節說明本研究所使用的測驗工具，第五節說明本研究的步驟、過程與研究成果的限制。

### 第一節 研究設計

對於如何發展幫助學生從尋求數量樣式的關係，過渡到建立函數概念的教材及教學策略，並開發相關評量工具？本研究的主要想法是希望能引導學生觀察探索數量樣式的規律，並且藉由尋找數量關係，用公式表示規律，如何在坐標圖上畫出（函數）圖形，……等步驟，學生在對於探索規律進行進一步的練習，並利用「公式」中獨立變數與應變數之間的關係，初步形成函數概念。並探討藉由數量樣式引入函數教學時，學生在連結並轉換數量（形）樣式且對於函數多重表徵之間能否進行轉換，最後經由測驗與訪談探究學生作答的錯誤類型與迷思概念。

函數這個概念對國中學生而言是很抽象的，研究者以往的教學經驗中，在函數單元的教學時，若是直接就介紹函數的定義『對於任意給定的一個  $x$  值，都恰有一個  $y$  值與之對應，則稱  $y$  是  $x$  的函數』，對國中生而言是很難理解的。但學生對於數量樣式的課程卻有較感興趣，最主要的原因是學生能藉由自己動手操作模型來找出樣式的規律，所以設計出一份關於數量樣式與函數的教材，讓學生能由較感興趣的操作過程，先行學到函數的多重表徵與其之間的關係，並知道表徵間是如何進行轉換，而數量樣式中的『編號』與所對應到的『圖案（或數量）』也隱含了函數對應關係的概念，則當函數定義引入時，也許可以讓學生更容易感受到函數的對應關係。

## 第二節 研究教材設計

本研究中因應當時學校教學情況設計了兩份教材，分別進行了一次的教學試驗與一次教學實驗，第一次教學試驗的實施時間為 94 年 10 月(九年一貫暫行綱要實施階段)，而第二次教學實驗的實施時間為 95 年 6 月(屬於九年一貫正式綱要的實施階段)。在第一次教學試驗之國中所使用的教材為「南一」版，其教材中含有關於「樣式」之內容，但沒有與「函數」相關之內容；而第二次教學實驗之國中所使用的教材為「部編」版，其教材中含有關於「函數」之內容，但對於「樣式」相關之內容卻又很少。本節研究者首先針對這兩次教學試驗與實驗的實施期間，該校所使用之教材與本研究所設計教材之內容進行分析比較。

(一)「南一」版、「部編」版與本研究設計的教材之差異：

### 1. 「南一」版教材：

93 年入學九年一貫暫行綱要中「南一」版教材中關於「樣式」課程內容之簡介

版本	單元名稱	單元重點
南一	第一冊(七上) 三、樣式與規律 3-1 數量的樣式與規律 3-2 圖形的樣式與規律	1. 運算規律(交換律、結合律、分配律) 2. 利用磁磚探索奇數的樣式 $2k+1$ 、偶數 $2k$ 3. 平面圖形的面積(公式) 4. 有規律的數列(找規律、求數列的和)

對於生活周遭之數量、圖形的樣式與規律，南一版教材透過圖示的情境，結合學過的運算規律(交換律、結合律、分配律)及面積公式，讓學生理解這些規律或公式的由來。並且利用等面積的變形計算不容易算的形狀之面積，讓學生對圖形仔細地觀察，提高對圖形的分析能力。

由於暫行綱要中並未明列關於「函數」概念的能力指標，而所謂的「數量樣式與數量樣式之間的關係」雖然隱含著「函數的對應關係」，但各家版本的教科書中都未提及的函數概念，學生並無法理解「函數」概念。

暫綱課程中並沒有直接列出數列與級數的能力指標，但各家版本的教

科書中在數量關係與數形關係的單元中都出現了等差數列的問題，一般情形是要學生觀察某些數之間的關係，察覺這些數之間有固定差值，並利用這個固定的差值推論後續的數值，同時也會有要學生將這些數相加起來的問題，相當於是提供等差數列與等差級數的經驗。但這些數列可能是一些生活中的具體情境（例如門牌號碼、座位編排、排隊的次序等），或是一些隱含某種關係的表格，學生是在給定有限的數值中尋找關係（例如奇數、偶數、相鄰項都差 3 的數列等），因此學生或許能以逐項遞迴的方式思考解題，但對於首項、項數、一般項的概念可能都未實質建立，因而不必然有項數與數值對應的概念。

## 2. 「部編」版教材：

94 年入學九年一貫綱要中「部編」版教材中關於「函數」之課程內容簡介

版本	單元名稱	單元重點
部編	第二冊（七下） 四、函數與直角座標 4-1 函數 4-2 直角座標 4-3 函數圖形 4-4 二元一次方程式的圖形	1.了解正比、反比是一種特別的數量關係：函數 2.了解平面座標系的性質 3.了解一次函數與常數函數的圖形是一直線 4.將二元一次方程式改寫成一個一次函數並畫出圖形

部編版教材是透過比例的情境來引入函數的觀念，在日常生活的情境中，有許多問題會牽涉到比例與比值，例如：

若有一處水管每 3 分鐘可注入 10 公升的水，則用此水管將 200 公升的浴缸裝滿水，則需幾分鐘？

希望學生能透過這類問題建立比例的觀念，並求出這個問題的唯一解答。但其實針對問題的第一句話，學生可以建立一個表格，顯示注滿不同容量的器皿所需的時間分別為何，並發現容量與時間的關連，建立一個相關的等式。

對於函數的探究，則是將問題改變成由未知數代替確定的數字來作答，如：

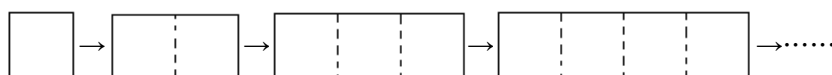
有一車子固定以等速行駛 3 小時，若車行速率為每小時  $x$  公里，則車行距離為多少公里？

這類比例情境問題的圖形，大多是經過原點的直線，學生將發現這些直線的斜率也是兩個變數之間的比值。將一次函數（如： $y = 2x + 3$ ）看成一種特殊的二元一次方程式（二元一次方程式的標準式為  $ax + by = c$ ），反過來說，大部分的二元一次方程式也可以想成一次函數，透過將二元一次方程式改寫成一個一次函數，並藉由繪製一次函數圖形的方法，來繪製二元一次方程式的圖形。

### 3. 本教學實驗所設計的教材與「南一」版、「部編」版教材之比較

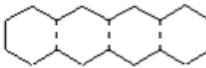
「南一」版七年級教材中並沒有正式介紹函數的概念（事實上在暫綱階段各家版本都沒有介紹函數的概念），且整個國中數學課程中至多只探討兩個變量間的關係（例如和不變、差不變、積不變、商不變等），並沒有正式形成一個量由另一個量唯一確定的函數概念，因此雖然學生可能可以寫出像函數關係的數學式子，但本質上應該都只是方程式關係的表述，而不是真正有函數的概念。本研究所設計的教材是希望透過擴展樣式規律，讓學生學習函數；在這個學習過程中，學生要學習兩個重要的事項：一是兩種變量之間對應關係的函數概念，另一則是一個函數可以有公式、表格、圖形、……等重要的表徵方式，來表示此函數的規則，例如：

若一正方形的周界有 4 個邊，二個連接在一起之正方形所形成的長方形之周界有 6 個邊（中間的共用邊都不算），三個連接在一起之正方形所形成的長方形之周界有 8 個邊，以此類推，對於一連串  $n$  個連接在一起之正方形所形成的長方形之周界，有幾個邊？



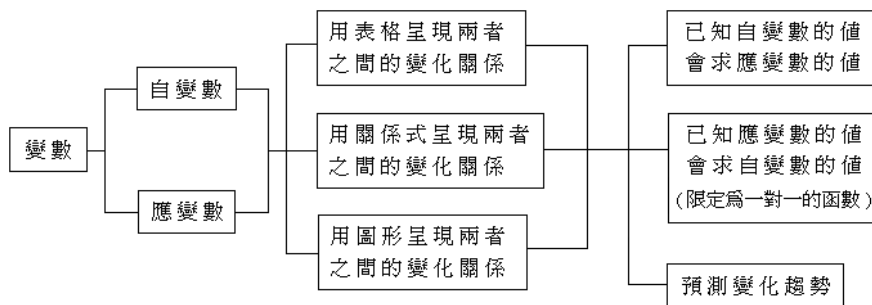
此例是希望學生藉由連接在一起的正方形的圖像，發展出一個表格，在表格中記錄所找的正方形個數與周界邊數，得到「每增加一個正方形，周界就會增加 2 個邊」的關係，對於連接在一起正方形的周界，找出它們的規則或公式。

正方形個數	1	2	3	4	5	...
周界邊數	4	6	8	10	12	...

這裡代表連接在一起正方形的個數及其周界邊數關係在坐標平面上之圖形，是在一條直線上的一些點，它們沿著這條直線向上延伸，且每增加一個正方形就上升 2 個單位。若換成不同種類的正多邊形（如：.....），則關係圖是在不同坡度（比例）直線上的點。運用這些表徵，讓學生瞭解到「一串連接在一起的正多邊形周界的邊數被這些正多邊形的個數依照某種特定規律所支配」。稍後學生學習函數的定義後，將知道「兩個變量，其中一個變量  $y$  是隨著另一變量  $x$  按照某種規律來決定時， $y$  就稱為  $x$  的函數」。

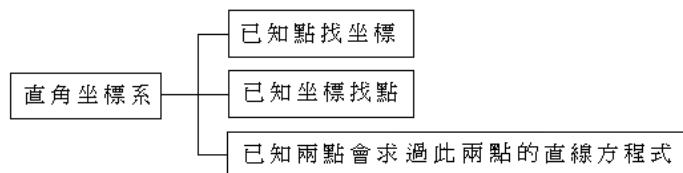
(二) 本研究所設計教材中希望學生能學習到的知識結構網絡

1. 探索具體問題中的數量關係



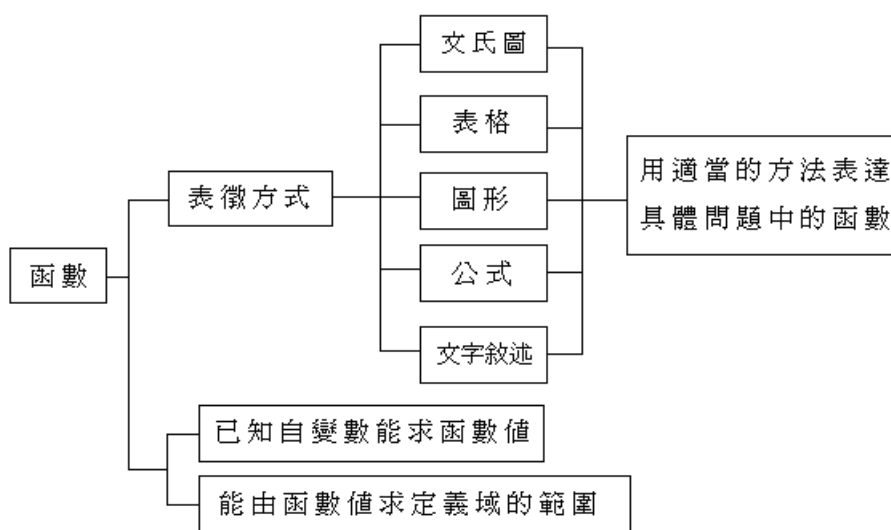
【圖 3-2-1 變數的知識結構】

2. 圖形與座標



【圖 3-2-2 直角坐標系的知識結構】

### 3. 初步的函數概念



【圖 3-2-3 函數的知識結構】

#### (三) 本研究所設計教材之內容

在九年一貫的數學領域中，重點在培養學生有思考的習慣，以及解決問題的能力，發展學生的自然潛能並與實際生活的結合，使數學不再只是書本裡的知識，而是處處可見，處處可用的知識。但一個數學教育工作者，又該如何因應九年一貫的課程改革呢？吳柏林、葉倩亨（2001）在教學經營上提出了以下幾點建議：

##### 1. 以「生活化布題」為原則

數學之所以常讓學生望之怯步，主要是數學中有很多抽象符號與思考的概念，這些常與生活無關。如果能讓學生了解數學是可以幫助他們發現及瞭解自然生活中的規律，那麼學習數學將變成一件有趣的事了。

##### 2. 融入遊戲與活動於數學課堂中

數學課如果能融入相關遊戲，必能增加學生對數學的興趣，並體會數學與生活間的密切關係。引導學生藉由小組內的討論、觀摩與競爭方式，使每位學生成為學習活動的主角。

### 3. 多元智慧的評量取向

在教學時，教師應有適時適性互動處理（*aptitude treatment interaction*）的觀念，沒有放諸四海皆準的單一教學法，只有依情境、學生特質的多元智慧適性教學才是最佳的教學。教師在課程設計上應強調真實性與互動，鼓勵小組合作，探索情境中的資訊，進行有意義的學習。

### 4. 營造開放、尊重與包容的學習情境

學生是學習的主體，老師則做為一個開放、尊重、包容的學習情境經營者，學生在開放的學習環境中主動去建構知識，老師則為催化者和引導者。老師應提供一些開放性的問題，激發學生的創造力。

### 5. 以合作學習方式為學生搭建數學學習的鷹架

教師安排學生透過合作學習方式完成任務，彼此搭建學習的鷹架，不僅有助於提升學生的人際智慧，更可經由不同同學彼此觀點的交換與分享，提升其認知的層次。

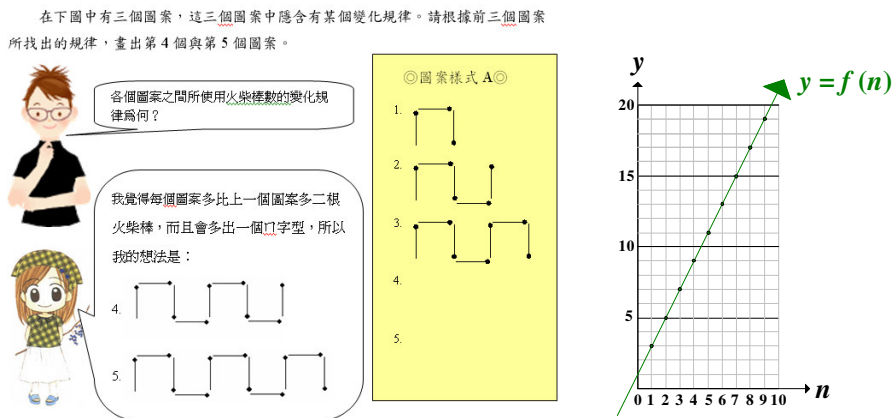
根據吳柏林、葉倩亨（2001）在教學經營的幾點建議，與研究者這幾年在國中的教學經驗，發現學生在學習函數課程中仍存在著許多的困難，且函數是代數領域中最重要的概念之一，其概念貫穿整個中小學的數學課程，所以若能讓學習變得更有趣，更有意義，也許有助於發展學生的函數知識。為了能讓學生體會到函數能夠反應實際事物的變化規律，教學過程中應該讓學生積極參與探索事物的數量關係、變化規律的過程。

本研究根據以上的理念作為設計教學活動流程的依據，研究者希望能藉由利用表格、圖形、……等不同的方式，協助引導學生探索具體問題中的數量關係與變化規律，最後學生能利用變數和公式等數學語言來表徵這個具體情境問題，且能運用樣式與函數來表徵情境或解決生活上的問題。

研究者針對所要實施的教學試驗與實驗，發展教材（含學習單）、教案，各階段的教材設計分為以下三個活動：

1. 活動一：尋找數與形的規律（圖案樣式與數樣式）。

(1)活動目標：以解決問題為導向，提出八個圖案樣式與數樣式的問題，如下圖所示，希望讓學生從中找出規律，進行比較與歸納，並臆測接下來第  $n$  個圖案，且用公式來表徵樣式規律，並能說明猜想的過程。藉由探索規律，透過一些常見的圖案和具體問題的操作演示，讓學生把『圖案』、『表格』、『圖形』與『公式』結合在一起。

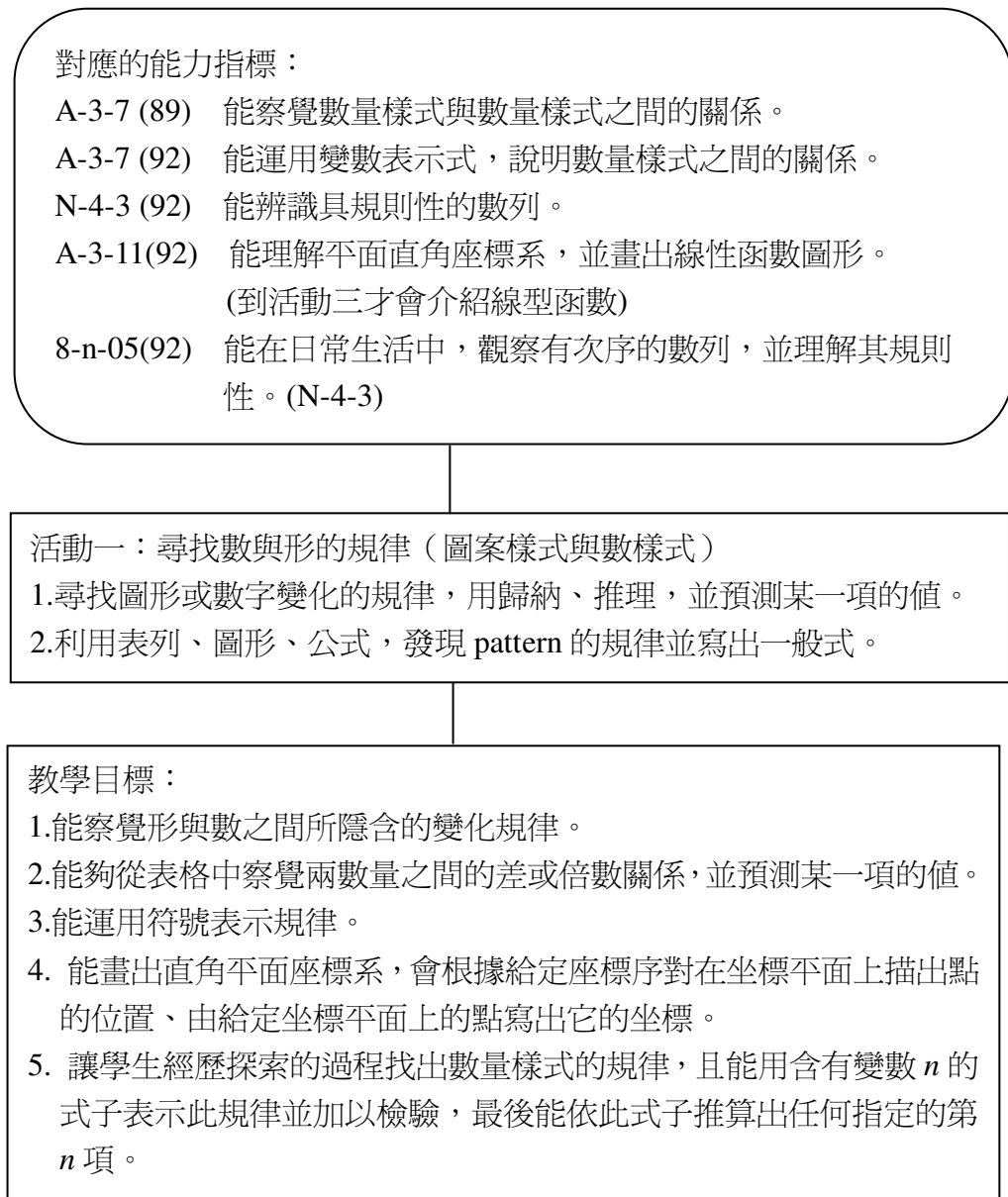


【圖 3-2-4 本研究的教學素材】

在樣式規律尋求的學習中，探索過程應該是有趣的，但學生普遍對於一般化的能力還是不夠，此時教學策略為：若學生無法在樣式規律的題目中觀察出抽象的規律時，教學者可適時提供具體情境，讓學生透過具體實物的操作，察覺出數量對應關係，並引導學生從計數策略變成辨識出存在情境中一般化的關係。學生若能找出規律，並辨識出存在於情境中一般化的關係，以及將情境中數量與符號具體表徵為對應關係，則也能培養函數對應關係的經驗。



(2)活動設計架構：

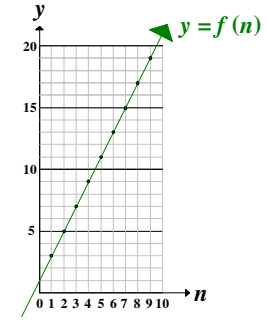


【圖 3-2-5 活動一的設計架構圖】

(3)擬強調的教學方法與注意事項：

◎這個活動的目的是讓學生找出規律，所以對於每一個題目，學生可能有許多不同的想法，而這時教師應該鼓勵學生從多方面不同的角度進行思考，讓他們發表自己的想法，與同學溝通分享，只要能合理說明出自己所發現的規則，都應該算對。例如：

數樣式 D (1、2、4、\_\_\_\_、\_\_\_\_、.....)，部分學生會回答下一個數是前一個的 2 倍，所以第四個數是  $4 \times 2 = 8$ ，也有部分學生會回答第一、二個數相差 1，第二、三個數相差 2，所以第四個數應與第三個數相差 3，所以是  $4 + 3 = 7$ ，這兩種回答都應該可以接受。此外，對

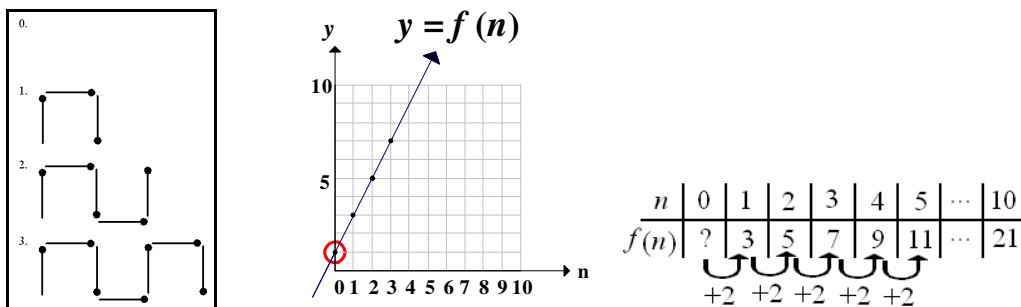


於數樣式 D (不論是使用  $f(n) = 2^{n-1}$  或  $f(n) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ ) 或對於圖案樣式 D ( $f(n) = n^2$ ) 所對應的函數均不是線型函數 (請參見附錄四)，學生在畫圖時可發現所描繪的點並不在一直線上，故在尋找代數式表徵時對學生而言，將較其他題目來的困難，但可讓學生感受一下並非所有樣式題目的 (函數) 圖形 (離散的點) 都會在一直線上。

◎ 因活動一教材中所提供的圖案樣式皆為離散型，在座標平面上描點時，本不該用直線相連，但為讓學生更容易觀察變化的趨勢，所以還是用直線將這些點連起來，但教學時必須對學生**強調說明**：此直線只是用來指出方向 (變化趨勢)，而非  $y = f(n)$  的圖形。

◎ 關於  $y = f(n)$  在  $n = 0$  時的意義，教師可引導學生思考討論，讓學生注意到不同情況下的意義。如：

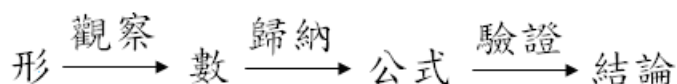
若有一個圖形的編號為 0，排在編號 1 的圖形之前，請想想看它應該是什麼圖案，或是提示學生觀察剛剛所畫出來的圖形，並配合表列讓學生觀察。



【圖 3-2-6  $y = f(n)$  當  $n = 0$  時在各表徵間所代表的意義】

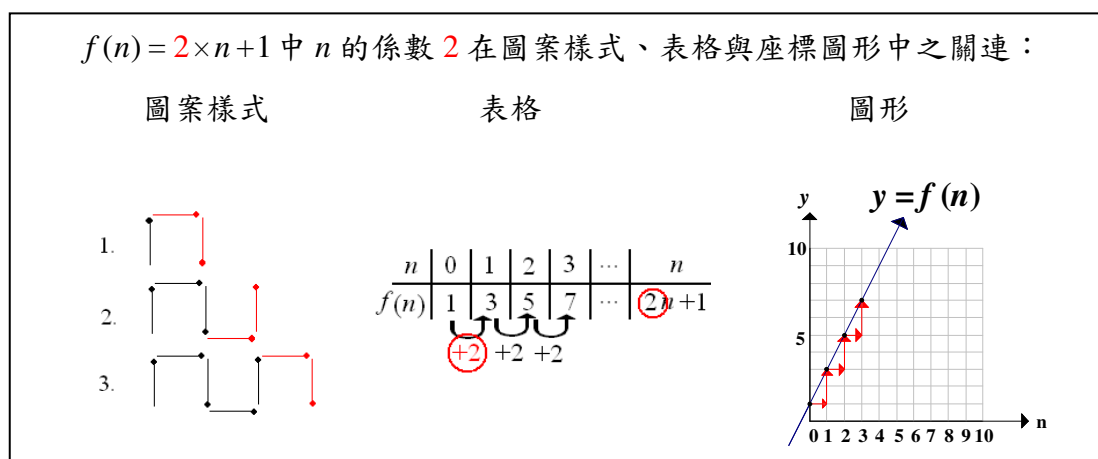
- ◎ 探索規律的一般要有：觀察、比較、歸納、猜想、驗證等幾個步驟，所以教師在引導學生尋找規律時的步驟應為：1.尋找數量關係，2.用代數式表示規律，3.驗證規律(能說明自己所找到的規律，並檢驗不大的數字  $n$  時，圖案中對應的數量確實符合這個規律)。

而學生理解的過程應如下：

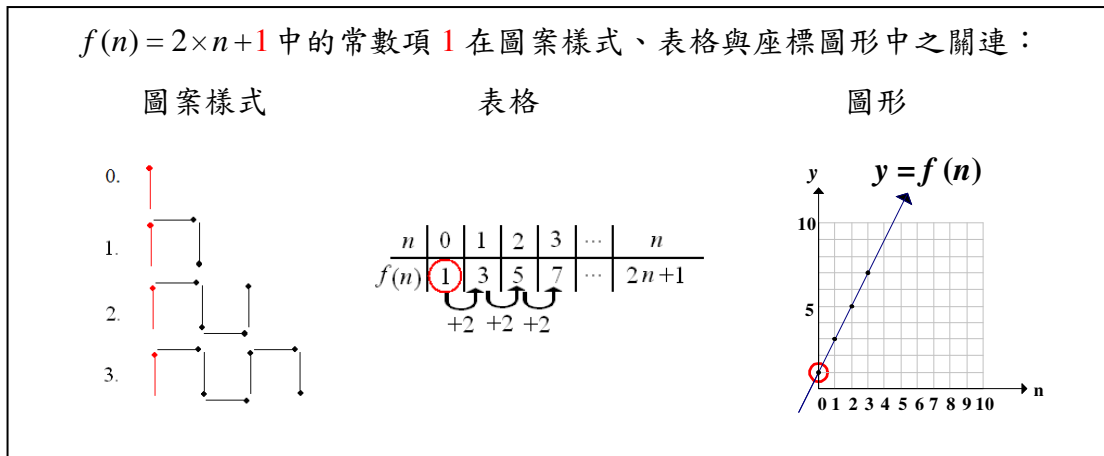


2. 活動二：樣式  $f(n) = an + b$  中係數  $a$  (斜率)、 $b$  (縱軸交點) 在表格與圖形之關連。

- (1) 活動目標：比較一次方項係數  $a$  (斜率) 在圖案樣式、表格形式與 (函數) 圖形中之關連；與常數項  $b$  (縱軸交點的位置、截距) 在圖案樣式、表格形式與 (函數) 圖形中之關連，如下【圖 3-2-7】、【圖 3-2-8】所示。



【圖 3-2-7 斜率在公式、圖案樣式、表格形式與圖形中之關連】



【圖 3-2-8 截距在公式、圖案樣式、表格形式與圖形中之關連】

讓學生在直角座標平面上畫出一次函數的圖形，並根據函數的圖形及關係式  $f(n) = an + b$ ，引導學生注意  $a$ 、 $b$  值改變時，對應的圖形有何變化，如：係數（斜率） $a > 0$  時，直線為左低右高； $a < 0$  時，直線為左高右低； $a$  值相同時，兩直線互相平行等。

根據活動一的圖案樣式畫在坐標平面上的圖形，讓學生觀察這些點之間的關係，發現每往右邊 1 格時 ( $n \rightarrow n+1$ )，再往上  $a$  格時 ( $f(n) \rightarrow f(n)+a$ )，就可以從某一個點 ( $n, f(n)$ ) 前進到下一個點 ( $n+1, f(n)+a$ )，在此讓學生對於斜率  $a$  所代表的意義有初步的理解。本來圖案樣式在坐標平面上的圖形是離散型的，所描的點本不應該是直線相連，但直線能讓初學者更容易看到線型函數變化趨勢，並且在同一坐標平面中比較不同的函數圖形時也會比較清楚，所以在此教學者應說明此直線只是用來指出線型函數變化趨勢的方向。希望學生藉由不同的圖形，比較其代數式  $y = f(n) = an + b$  的差異，此時學生不再針對單一的表徵概念，而是去分析不同表徵之間的關係。

(2)活動設計架構：

能力指標：

- A-3-7 (89) 能察覺數量樣式與數量樣式之間的關係。
- A-3-7 (92) 能運用變數表示式，說明數量樣式之間的關係。
- A-3-11(92) 能理解平面直角座標系，並畫出線性函數圖形。
- 7-a-14(92) 能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形。(A-3-11)
- 7-a-15(92) 能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。(A-3-11)

活動二：樣式  $f(n) = an + b$  中係數  $a$  (斜率)、 $b$  (縱軸交點) 在表格與圖形中之關連

- 1.探索  $f(n) = an + b$  的圖形、表格與關係式之間的關連，並瞭解係數  $a$  在這三種表徵中分別的意義。
- 2.觀察一次方項係數  $a$  (斜率) 與常數項  $b$  (縱軸交點) 在 pattern、表格與圖形中的關連。

教學目標：

- 1.對於直線的斜率  $a$  能有初步的理解：當直線上的點每往右邊一單位，再向上  $a$  單位時，就可以前進下一個點，此時  $a$  就代表該直線的斜率。
- 2.透過 pattern 中第 0 個圖案與表格中  $n = 0$  所代表的值，找出常數項  $b$ ，並對照圖形中直線與縱軸的交點座標  $(0, b)$ 。
- 3.能瞭解 (函數的) 各種表徵方式，以及彼此間的關係，並能在不同表徵間進行轉換。

【圖 3-2-9 活動二的設計架構圖】

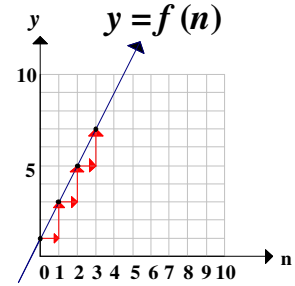
(3)擬強調的教學方法與注意事項：

- ◎ 這份教材所舉的原本數量樣式的值大都為整數，如：從  $(0, 1) \rightarrow (1, 3)$ ，橫坐標增加 1 單位時，縱座標增加 2 單位；從  $(0, 1) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 5)$ ，橫坐標增加 2 單位時，縱座標增加 4 單位；從  $(0, 1) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (3, 7)$ ，橫坐標增加 3 單位時，縱座標增加 6 單位。這些關係中含有與「比例」有關的概念，可提醒學生注意，加強他們對

於（橫坐標增加的量）：（縱坐標增加的量）=2 的印象。

例如：以  $f(n)=2n+1$  的圖形來說明：

若橫坐標  $n$  從 0 開始逐漸增大時，每增加 1 單位時，縱坐標  $f(n)$  就隨著增加 2 單位。所以從 (0, 1) 開始，到這條直線上任一點  $(n, f(n))$ ，可發現：
$$\frac{\text{縱坐標改變的量}}{\text{橫坐標改變的量}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \dots = 2。$$



我們稱直線上的任意兩點間縱坐標改變的量與橫坐標改變的量之比值為此直線的『斜率』，也就是說：

$$\text{直線的『斜率』} = \frac{\text{縱坐標改變的量}}{\text{橫坐標改變的量}}。$$

所以那條直線的斜率與其關係式  $f(n)=2n+1$  中  $n$  的係數都是『2』。

### 3. 活動三：函數與一次函數。

(1)活動目標：能知道函數是一種特殊的對應關係，能用符號表示函數關係，並求出函數值，知道線型函數、一次函數與常數函數的意義與分別，且能畫出所對應的函數圖形。雖有給函數的一般定義，但受限於試驗學生的程度，教學仍以一次函數與線型函數為主。

透過實際日常生活中的問題，讓學生理解函數的定義與函數的各種表徵，包含表格形式、函數圖形、公式表徵、函數機器……等，並解決關於線型函數的問題。

(2)活動設計架構：

能力指標：

A-3-7 (92) 能運用變數表示式，說明數量樣式之間的關係。

A-3-11(92) 能理解平面直角座標系，並畫出線性函數圖形。

7-a-12(92) 能認識變數與函數。(A-3-7)

7-a-13(92) 能舉出例子說明一次函數是一種特殊的比例對應關係。  
(A-3-7, A-3-11)

7-a-14(92) 能在直角座標平面上描繪一次函數的圖形。(A-3-11)

活動三：函數與一次函數

1.透過日常生活中常見例子，從「功能」與「對應」的觀點，初步掌握函數概念。

2.理解一次函數的關係式，學會函數值的求法與函數圖形的畫法。

教學目標：

1.經歷一般規律的探索過程，初步建立線性關係的概念，發展學生的符號感與抽象思維能力。

2.能根據所給定的條件，寫出一次函數的關係式。

3.對給定的一次函數  $f(x)$  與指定的  $x = a$ ，能求出其函數值  $f(a)$ 。

4.能熟練畫出線型函數的圖形，並知道其圖形是一直線的特性。

5. 能利用變數和公式等數學語言來表徵具體情境問題，且能運用樣式 (pattern) 與函數來解決此問題。

【圖 3-2-10 活動三的設計架構圖】

(3) 擬強調的教學方法與注意事項：

◎透過本活動教材一開始所舉的四個例子，它們是四種不同類型的函數，表徵的方式有表格、公式、圖形等，就性質而言有連續型與非連續型的函數，讓學生想想在日常生活中有哪些情境也滿足函數定義(此時尚未正式定義函數)的對應關係。

◎函數的概念較為抽象，必須讓學生在問題情境中理解、掌握，有些問題需

以表格、關係式、圖形中獲取訊息，所以在教學中應給學生足夠的時間進行觀察、思考、探究與交流，學習從「規則與對應」的觀點來理解函數，且能辨識並描述這些樣式或對應關係。

- ◎學生藉由函數的多種表徵方式：表格、圖形、公式、文字敘述（口語）等，能更深入理解函數的概念，建立了函數概念之後，需讓學生對實際問題中判斷兩變量之間是否具有函數關係進行判斷，以加深學生對函數概念的認識，並利用最適合的方式解決情境問題。表格可以清楚、直接地表示出自變數與應變數之間的數值對應關係。函數的圖形可以直觀地表示出函數的變化過程和變化趨勢。而函數的公式可以比較全面、簡潔地表示出變量之間的關係。

教學試驗課程教材的編製是根據研究者所定之教學目標，且針對課程編寫教案，並且在教師（研究者）進行教學活動時，利用錄影的方式記錄教學實況，最後根據教學目標來分析教學實況與學生概念成長的過程。

### 第三節 研究對象

教學試驗與教學對象分為兩階段：

1. 第一階段教學試驗：94年10月，參與教學試驗為台北市某國中93年入學之八年級上學期學生，人數6人，有效樣本6人，為實施九年一貫暫綱的最後一屆。因限於學校本身教材進度的影響，故從研究者所任教之同一班級中挑選自願參加的六位學生，則該六位學生在班上的數學成績分屬上(全班36人當中，前10名內)、中(全班36人當中，前11~20名內)與中下(全班36人當中，前20~25名內)。
2. 第二階段教學實驗：95年6月，參與教學試驗的學生為台北市某國中94年入學之七年級下學期學生，一班共35位，有效樣本35人，為實施九



年一貫正式綱要的第一屆。此班的學生是研究者從國中入學後就教起的，與研究者的相處時間約為一年左右，所以較能掌握學生的學習行為與狀況。該實驗班級所屬學校所使用之教材為部編版七上、七下數學教材，在進入樣式與函數的單元時，該班與同一間學校另外未進行教學實驗的 2 個班級的學生都已經學習過基礎代數的課程，包括：以符號代表數、一元一次方程式、二元一次方程式、直角坐標系等。在進行實驗教學之前，此三個班級在七年級上下學期共計五次的段考全班數學平均成績，其中實驗班級的五次段考平均成績為 76.93 分，而兩個對照班級的五次段考平均成績分別為 76.96 分與 77.74 分。當實驗班級進行教學實驗時，對照組二班則同時進行部編版第四章函數教學。教學實驗結束後，七下最後一次段考三個班級的數學平均成績分別為，實驗班級 70.53 分，對照二班為 69.41 分與 70.31 分。並且三個班級於八年級上學期開學後一個月內同時進行後測測驗。

#### 第四節 研究測驗工具

根據本研究的理論架構與教學目標，為了解學生對於數量樣式、線型函數概念與各種表徵間互換的理解，編製三份樣式與函數的測驗卷，在完成教學後則對所有的學生進行學習評量，用以觀察學生的學習成效（第一份用於第一階段教學試驗之後，第二份 A 試卷與第三份 B 試卷用於第二階段的教學試驗之後）。測驗卷的編製是根據原來國編版與九年一貫各家出版社之教科書中有關樣式規律與函數的內容，收集國內外相關的文獻，並參考市面上的測驗題庫，最後與研究者所任教國中的數學老師與指導教授討論後確定題目與各題之測驗目的後，完成教

學評量工具。

首先針對第一階段參與教學試驗的 6 位國二學生進行施測，了解學生學習的狀況，並分析學生的錯誤類型與迷思概念，依此改進第二階段教材設計與教學，並修改試題，在隔年第二階段的教學試驗後，除了該試驗班級之外，另外找 2 班使用部編版教材之班級一同進行施測，又因考慮到學生作答時間，該階段的後測試卷分成 A、B 兩部份，在一週的時間內分別施測完畢，接著分析學生的答題狀況並比較實驗班級與另外 2 班的學習差異。

第一階段後測試題的題目設計區分類型如【表 3-4-1】所示，而各題的測驗目標如【表 3-4-2】所示：(題目請參見附錄三)

【表 3-4-1 第一階段後測試題的區分類型】

表徵	對應之數學內容	對應之題號
樣式規律	1.察覺數量關係 2.以符號表徵樣式規律	1(1)、4(1)、4(2)、 4(3)
表格	1.根據 $x$ 變動之規則，求出對應之 $y$ 值 2.根據 $x$ 列、 $y$ 列之關係列出一般式	1(2)
圖形	1.在坐標平面中描點、畫圖 2.找出直線的斜率與截距	1(3)、1(4)、2(1)、 2(3)、5(2)、7
代數式	1.代入求值 2.由圖上兩點求代數式	1(5)、1(6)、1(7)、 2(2)、3、8(1)、 8(2)
文字敘述	1.根據情境列出關係式 2.根據情境區分函數的正例與非例	5(1)、6(1)、6(2)、 6(3)
※表徵轉換	1.樣式規律與轉表格表徵	1(2)
	2.表格表徵與圖形表徵	1(3)
	3.圖形表徵與代數式表徵	1(5)、2(2)、3、 5(2)
	4.樣式規律與代數式表徵	4(1)、4(2)、4(3)
	5.情境表徵與代數式表徵	5(1)、

【表 3-4-2 第一階段後測試題的測驗目標】

題號	測驗目標	備註
1 (1)	能否由給定的前 3 個圖案，找出圖案樣式規律，並畫出接下來的第 4 與第 5 個圖形	
1 (2)	能否將圖案樣式轉換為表格表徵	
1 (3)	能否將表格形式轉換成 (函數) 圖形表徵	
1 (4)	能否藉由圖形找出 $n = 0$ 時，所對應的 (函數) 值 ( $f(0) = ?$ )	
1 (5)	能否將 (函數) 圖形轉換成代數式 ( <i>formula</i> ) 表徵	
1 (6)	能否由給定的 $n$ ，求出對應的 (函數) $f(n)$ 值	
1 (7)	能否由給定的 (函數) $f(n)$ 值 $n$ ，解出對應的 $n$ 值	
2 (1)	能否由圖形中找出 $n = 0$ 時，所對應的 (函數) 值 ( $f(0) = ?$ )	
2 (2)	能否將函數圖形表徵轉換成代數式 ( <i>formula</i> ) 表徵	
2 (3)	能否找出線型函數圖形的斜率與代數式中一次方項係數相同	
3	能否在給定通過的兩點，找出線型函數的代數式	
4 (1-3)	能否將所給定的圖案樣式，寫出函數代數式	
5 (1)	能否由所給定的文字敘述，觀察出兩變數之間的對應關係並寫出關係式	
5 (2)	能否由上述關係式，找出符合其狀況的圖形	
6 (1)	能否根據函數的定義，判斷兩變數之間是否具備有函數關係	一對一
6 (2)	能否根據函數的定義，判斷兩變數之間是否具備有函數關係	多對一
6 (3)	能否根據函數的定義，判斷兩變數之間是否具備有函數關係	一對多
7	能否由所給定某函數圖形上的點坐標，找出該點 $x$ 坐標所對應的函數值 $y (= f(x))$	
8 (1)	能否瞭解一次函數的定義，並由給定的 2 組函數值找出函數式	
8 (2)	能否根據上述之函數式，並根據給定之 $x$ 值找出對應的 $y$ 值	

第二階段後測試題的題目設計區分類型如【表 3-4-3】所示，而各題的測驗目標如【表 3-4-4】、【表 3-4-5】所示：（題目請參見附錄六）

【表 3-4-3 第二階段後測試題的區分類型】

表徵	對應之數學內容	對應之題號
樣式規律	1.察覺數量關係 2.以符號表徵樣式規律	A-5(1)、A-5(2)、A-5(3)、 A-5(4)、A-6、B-6(1)、 B-6(2)、
表格	1.根據 $x$ 變動之規則，求出對應之 $y$ 值 2.根據 $x$ 列、 $y$ 列之關係列出一般式	B-3(1)、B-3(2)、B-4(1)、 B-4(2)、
圖形	1.在坐標平面中描點、畫圖 2.找出直線的斜率與截距	A-1(1)、A-2(1)、A-2(2)、 A-2(3)、A-7、B-2(1)、 B-2(2)、
代數式	1.代入求值 2.由圖上兩點求代數式	A-1(2)、A-3(1)、A-3(3)、 A-8(1)、A-8(2)、A-8(3)、 B-1(2)、B-7(1)、B-7(2)、 B-9(2)、
文字敘述	1.根據情境列出關係式 2.根據情境區分函數的正例與非例	A-3(2)、A-4(1)、A-4(2)、 A-4(3)、B-1(1)、B-5、 B-6(3)、B-8(1)、B-8(2)、 B-8(3)、B-9(1)、
※表徵轉換	1.樣式規律與表格表徵	A-5(1)、A-5(2)、A-5(3)、 A-5(4)、A-6、B-3(1)、
	2.表格表徵與圖形表徵	A-1(1)、A-7
	3.圖形表徵與代數式表徵	A-1(2)、A-2(1)、A-8(1)、
	4.表格表徵與代數式表徵	B-3(2)、B-4(1)、B-4(2)、
	5.情境表徵與代數式表徵	A-4(1)、A-4(2)、A-4(3)、 B-1(1)、B-9(1)

【表 3-4-4 第二階段後測試題試卷 A 的測驗目標】

題號	測驗目標	備註
A-1 (1)	能否根據每個表格中的數對找出對應的圖形	表格配圖形
A-1 (2)	能否根據圖形找出符合圖形的代數式	圖形配式子
A-2 (1)	能否根據所給定的函數式繪製一次函數的圖形	畫直線
A-2 (2)	能否根據斜率定義求出三條直線的斜率	算斜率
A-2 (3)	能否比較三條直線的斜率與其所代表的一次函數的 $x$ 項的係數之關係	比大小
A-3 (1)	能否根據所給定的輸入與輸出值，求出未知數	求係數
A-3 (2)	能否根據所求出的一次方項係數與常數項，寫出函數機器中所代表的函數式	函數式
A-3 (3)	能否根據給定的 $x$ 值，求出對應的函數值 $f(x)$	求函數值
A-4 (1)	能否根據文字敘述寫出關係式，並判斷是否為一次函數	判斷一次函數
A-4 (2)	能否根據文字敘述寫出關係式，並判斷是否為一次函數	判斷一次函數
A-4 (3)	能否根據文字敘述寫出關係式，並判斷是否為一次函數	判斷一次函數
A-5 (1)	能否找出給定數列的規律，並求出下一項	找規律
A-5 (2)	能否找出給定數列的規律，並求出下一項	找規律
A-5 (3)	能否找出給定數列的規律，並求出下一項	找規律
A-5 (4)	能否找出給定數列的規律，並求出下一項	找規律
A-6	能否找出圖案變化的規律	找規律
A-7	能否根據函數圖形上的點座標，找出相對應的函數值	求函數值
A-8 (1)	能否根據函數圖形找出關係式	求函數式
A-8 (2)	能否根據所找出關係式，求函數值	求函數值
A-8 (3)	能否比較兩種電信通話費率	比較大小

【表 3-4-5 第二階段後測試題試卷 B 的測驗目標】

B-1 (1)	能否根據文字敘述寫出關係式並改寫成函數式	寫出關係式
B-1 (2)	能否求出函數 $f(x)$ 在 $x = 3$ 時的函數值	求函數值
B-2 (1)	能否根據斜率的定義，判斷出直線斜率的大小	求直線斜率
B-2 (2)	能否根據所給定的兩條直線，判斷何者斜率較小	比斜率大小

B-3 (1)	能否根據圖案的規律，完成表列	完成表列
B-3 (2)	能否列出一般式	求一般式
B-4 (1)	能否根據表列的值，找出第 $n$ 項的一般式	求一般式
B-4 (2)	能否根據表列的值，找出第 $n$ 項的一般式	求一般式
B-5	能否根據文氏圖，判斷出何者不具有函數關係	判斷函數
B-6 (1)	能否根據題目給定的循環小數，求出指定位數的值	找規律
B-6 (2)	能否根據題目給定的循環小數，求出指定位數的值	求函數值
B-6 (3)	能否判斷循環小數第 $n$ 位所代表的數是否為 $n$ 的函數	判斷函數
B-7 (1)	能否根據所給定的函數值，求出一次方項係數 $a$ 與常數項 $b$	求係數
B-7 (2)	能否求出函數 $f(x)$ 在 $x = 0$ 時的函數值	求函數值
B-8 (1)	能否根據題目的敘述，列出 $a$ 與 $t$ 的關係式	找關係式
B-8 (2)	能否根據 $a$ 與 $t$ 的關係式，判斷 $a$ 與 $t$ 是否成反比	判斷反比
B-8 (3)	能否判斷 $t$ 是 $a$ 的函數	判斷函數
B-9 (1)	能否根據文字敘述求出 $y$ 與 $x$ 之間的關係式	找關係式
B-9 (2)	能否根據給定 $y$ 值的範圍，反求出 $x$ 值的範圍	定義域與值域

## 第五節 研究過程步驟與研究成果限制

本研究的研究過程分成兩個階段，每個階段再細分成以下幾個步驟：

### 1. 準備階段

蒐集相關文獻，發展教材(含學習單)、教案及後測試題等相關教學工具。

### 2. 第一次教學試驗

94 年 10 月進行第一階段的教學實驗，學生人數共 6 人。所有的教學過程，都以錄影的方式記錄下來。

### 3. 第一次後測

94 年 11 月進行第一階段的後測試驗，學生人數共 6 人。

### 4. 訪談

94 年 11 月針對參與第一階段教學試驗的 6 位學生，除了作答紀錄的資

料分析外，全面進行訪談，以了解學生的想法。

5. 結果分析與修改研究工具

將上課與訪談的內容逐字轉成文字稿，進行資料分析，並修改教材、後測試卷。

6. 第二次教學實驗

95 年 6 月進行第二階段的教學實驗，學生人數共 35 人。所有的教學過程，都以錄影的方式記錄下來。

7. 第二次後測

95 年 10 月進行第二階段的後測試驗，測驗對象為一個參加教學實驗的班級，與二個未參與教學實驗的對照班級，共計三班 105 人。

8. 資料整理與分析

進行資料分析與撰寫論文。

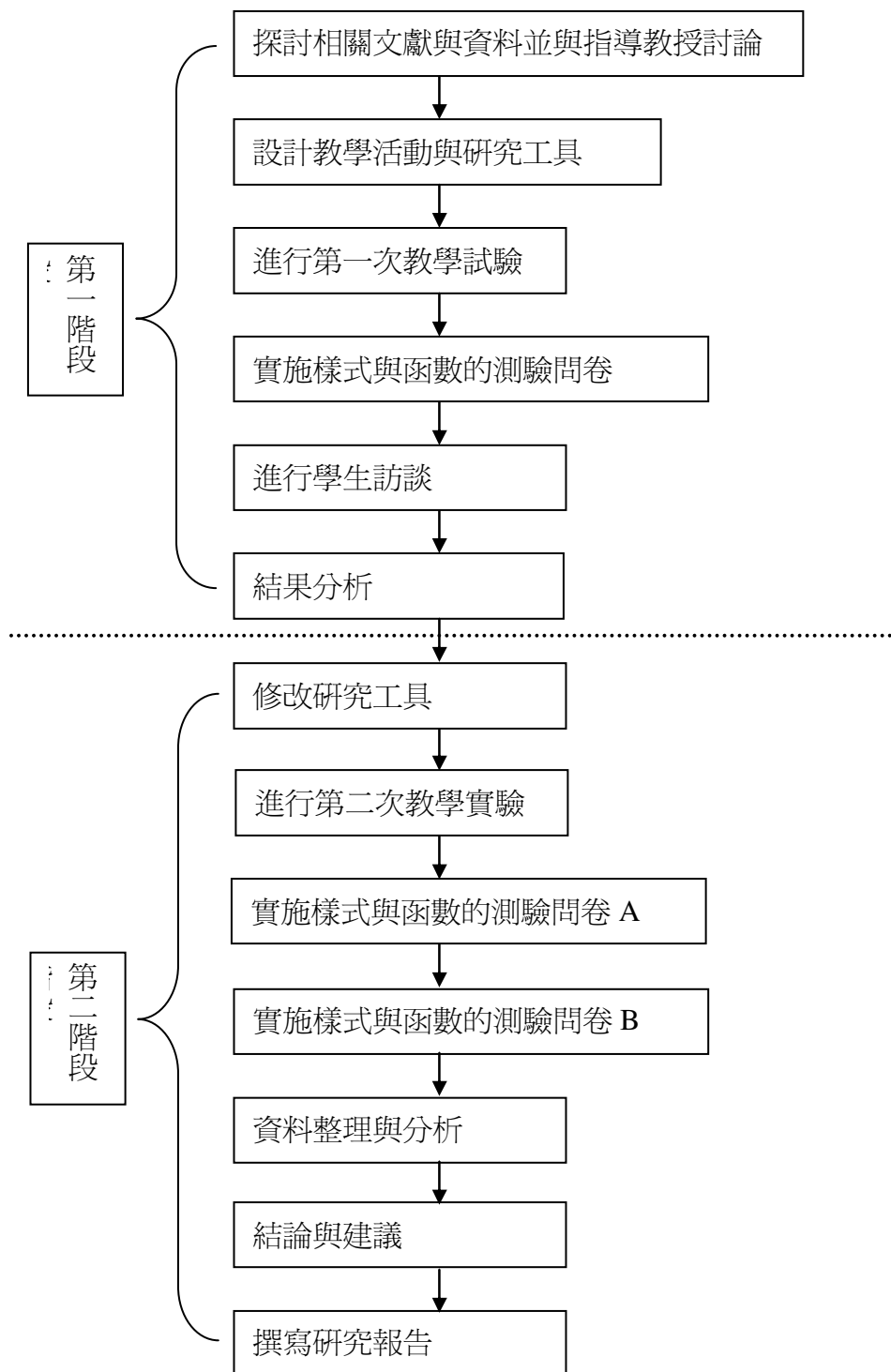
各項研究工作所需的時間及進度安排的時程，如下【表 3-5-1】所示：

【表 3-5-1 各項研究工作所需時間與進度的時程圖】

預定進度 工作項目	94 年					95 年												96 年							
	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	
擬定研究計畫																									
探討相關文獻																									
收集資料																									
資料分析																									
論文撰寫																									

由於本研究的樣本選自台北市某國中的學生，受限於地區環境、學校特質與實施九年一貫暫行綱要與正式綱要之不同的區別，樣本缺乏整體的代表性，因此在結果及引用上，可能僅能推論至與本研究樣本背景相同的學生上。

整個研究過程大致如下【圖 3-5-1】所示：



【圖 3-5-1 研究過程流程圖】