

---

# 從幾所墨爾本市公立中學的數學教學 反思數學該教什麼？ 與該怎麼教？

劉祥通

國立嘉義大學 數學教育研究所

## 前言

感謝國科會的贊助與嘉義大學的支持，使我有機會到澳大利亞墨爾本大學（University of Melbourne）做短期進修，旁聽他們的一些課，也參與修教育學程的墨大學生到中學做數學教學的實習。且二位小女也轉學到墨爾本念公立高中，分別就讀 11（高二）與 10 年級（高一），她們放學後互相交換上課感想，也特別跟我述說她們數學課的種種情形。因此我將「所見所聞」轉化成與同道分享的素材，這些「所見所聞」又是「省思」數學這一學科，該教什麼？與該怎麼教？的泉源。以下分成「所見所聞」與「省思」二方面探討。

## 壹、所見所聞

澳大利亞私立中學收費高，故吸引了高社經背景的學生，相對的這些私立學校對老師也要求比較嚴，情況自是不一樣。以下這些見聞並未涵蓋私立中學的現象，只是從少數樣本蒐集得到，可說是「以管窺天，以蠡測海」，恐有失之偏頗之虞，因此更期待能獲得教育先進的指教。

筆者將「所見所聞」分成「教學時數」、「教學重點」、「教學互動」、「考試與評量」，以及「數學遊戲與專題研究」等方面做說明。

## 一、教學時數

墨爾本市公立中小學每天上課時間是從 8:30 到 15:05，共有 6 堂課，沒有早自修，上課總時數，國小 30-32 堂，國中 25-30 堂，高中只有 20-22 堂（開始有選修課），所以高中生有的學生享受到週休三日（星期三沒有安排課程），可能是教育部門主張學生應該要有更多的時間自己探索知識。

高中每週的數學堂數是 4 節，一堂課 40 分鐘，實際上課只有 5-10 分鐘，其他時間給學生做習題，老師只是在行間走動以回應學生的問題。反觀我國老師大概用足了 40 分鐘，以「演講法」居多。老師耳提面命，少給學生討論與發問的互動機會。

教師請假既沒有人代課，也沒有特別交代進度，好像相信學生會自動利用時間溫習功課（恕作者不能指明哪一所中學）。有位墨大的教授告訴作者，他們的教育單位也認為家庭作業對學生不見得有益，例如，做作業會剝奪親子溝通的機會，會減低關心時事與社會的熱忱。反觀，我們的老師就是不放心，所以交代很多的作業與習題，唯恐學生不夠用功，甚至強調放假後要小考或抽考，以繃緊學生的神經。

論上課總時數只是台灣的一半而

已；論數學課時數可能只有三分之二或一半；再論老師上課的角色只是輔導，不是教導。往積極面想，他/她們可能認為學生才是學習的主體，所以給學生更多的時間自主學習。往消極面想，他們沒有那麼認真地看待家庭課業對於基礎功夫的重要性，也沒有像國人那麼重視學業與升學。

## 二、教學重點

比起台灣的數學教學，澳大利亞的教學時數明顯不足。另外教學重點也是一個重要的原因。以澳大利亞的老師解  $3^x = 10$  為例，學生無法體會指數函數的意義以及它與對數函數的關係，有些老師竟然只教他們如何從計算機獲得答案，此答案只是小數的答案而已。再舉一例， $\sqrt{8}$  是什麼？ $\sqrt{8}$  應該從方程式  $X^2 = 8$  去體會，也可以從「面積是 8 的正方形它的邊長是多少？」的觀點去理解，或是從  $2\sqrt{2}$  做連結的方向去著手。若是只告訴學生如何從計算機得到 2.828... 是不夠的。是因為老師認為要這些學生知其所以然難度太高，只好教他們從計算機獲取答案的方法？還是老師並未察覺只給小數答案並未盡其功？實不得而知。

筆者認為，這樣簡略的教學，老師並沒有「渡」學生。換句話說，並未幫助學生從有理數的領域跨越到無理數的領域。到底是師資養成教育不夠？還是他們認為中學的數學學習這些已足夠了？不管如何，利用計算機只是要幫助了解，不是最重要的教學目標，教學目標應為「到底  $\sqrt{8}$  是

什麼？」，「它與 8 的關係是什麼？」，「它與  $2\sqrt{2}$  的關係又是什麼？」，「 $\sqrt{8}/2$  與  $\sqrt{8}$  的關係又是什麼？」，以上這些才是教學重點所在。

話題拉回到「使用計算機」，若是老師妥善使用計算機於數學課室，計算機其實可以幫助發展數學概念，但是若只是將計算機用來獲取答案，那麼計算機可能害了學生的計算能力，也妨礙了數學概念的發展。因此有許多人怪罪且不希望學生使用計算機，而多少冤枉的帳因此算在計算機的頭上，筆者不禁要替計算機感到委屈與無奈，計算機何罪之有？

有份調查澳洲數學教學的研究報告 (Norton, McRobbie, & Cooper, 2002) 指出，關於數學教學的目標到底是概念性 (conceptual) 取向？還是在於計算性 (computational) 取向，結果在九位中學的數學老師中有七位認為對於比較沒有能力的學生 (less able students) 來說，學習數學的目標只要設定在計算性取向的問題就可以了。關於教學策略方面，到底要用「探索式 (investigate)」呢？還是直接「演示 (show) 與講述 (tell)」呢？有八位老師認為對於較沒有能力學習數學的學生來說，教學方法只要用演示法與講述法就可以，探索式是徒勞無功的。

由這份研究可以約略發現，老師對於比較沒有學習能力學生的教學期望與教學方法為何。當然，教學目標與策略取決於老師本身的數學教學信念與過去的實際教

學經驗。值得提醒讀者的是，對於較沒有學習能力的學生，多數老師認為只要授與計算性的內容，且只用演示法與講述法即可，後果將可能造成那些學生永遠無法獲得數學的概念。

### 三、教學的互動

國內外學者都鼓勵合作學習與社會互動等教學方式以促進數學學習，例如老師與全班互動、或學生小組互動等方式。筆者一時興起就問小女，「你們數學課是否有分組討論？」她們都說「沒有」，「是否有很多學生與老師互動，例如問問題啦！」，她們說都會，好學生問不懂的問題，但是差的學生故意問些與數學無關的問題，希望離開數學問題，把數學課拖延掉。反觀國內，也是少有分組討論，多半是老師與全班互動的方式，但是值得注意的是，「多半是老師問問題，少數優秀學生回答而已」，有學生回應老師，老師往往就繼續的上課，很少關照其他沒有回應的同學，如此等於將沒有回應的學生視為沒有問題，老師問學生「有問題嗎？」，很多時候問「這個教過了嗎？」；「你們懂嗎？」，不懂的學生怎麼敢說「不懂」呢？

因此，老師應該學習怎麼「提問」學生問題以幫助學習，避免只是問些「裝飾性」的問題（Brissenden, 1988）。其實，如何利用高程度的學生分擔老師的教學責任，給高程度的學生從「教」的過程中獲得更精緻的學習，也發揮團體動力的功效。此等是老師值得研究的教學議題。

### 四、考試與評量

考試的目的是要了解學生學習的情形，考試的另一個目的是用來督促學生學習。國內教師唯恐學生不夠用功，所以有很多的考試，除了例行的考試外，還多了小考、隨堂考與晨考等名目。

在墨爾本的公立中學，考試就少了很多，段考時間也是受課老師各自為之，不是集中二天完成，考試當天，若是多數學生說尚未準備完畢要求考試延期，老師也可能會接受。再者，考試之前，學生還可以將數學公式抄在一張紙上當做參考，以備不時之需（公式忘了），此種作法把公式與定理當作工具，期待學生能利用公式與定理理解題就好，殊不知基本的公式與定理不夠熟悉，會廢弛了基本功，也妨礙了解題能力的發展。因此學生面對考試，不像國內學生緊張兮兮。學校利用家長訪校日將考試的結果，提供給家長參考。成績報告不只是一個分數而已，各科的成績都分得很細，可以說是學習情形的說明。

### 五、數學遊戲與專題研究

跟隨準數學老師到中學觀察他們的實習教學，發現到實習學生喜歡找數學遊戲在課室實踐，中學生玩得津津有味，實習老師也從學生的回饋獲得快樂與滿足。但是，實習老師是否了解數學遊戲深層的數學原理呢？學生是否從遊戲中探索出數學原理呢？數學遊戲是否配合教學目標呢？依筆者的判斷，以上答案都是否定的。

如果國內實習老師玩的數學遊戲，沒有配合教學目標，該班的任課老師是否因

為顧忌進度而阻止呢？在國內，數學老師向其他科目借課來趕數學進度是常有的事情，怎麼會輕易讓您玩這些與進度無關的數學遊戲呢？但是這裡的人就是那麼無憂無慮又輕鬆自在的玩起遊戲了。

在國內給學生玩數學遊戲，資優班是較常見到的。資優生玩了幾回遊戲之後，分組討論「為什麼？」，然後各組輪流發表遊戲底下埋藏的「數學原理」，最後給學生當作「專題研究」的題材。數學理論往往就在遊戲中被重新「發現」，老師的任務只是從旁「監測」而已。如果一般班級的教師教到相關的數學原理時，也能找些相關的數學遊戲以增強學生對原理的認識，或是給學生先玩數學遊戲，然後儘可能讓學生發現數學原理，這樣強調「連結」與「解題」的數學教學，相信一定會給學生不一樣的體驗與效果。當然老師就得準備材料，並思考數學遊戲與教學目標以及教學進度的相關性。

## 貳、省思

從上述「所見所聞」，筆者不思淺陋，針對數學教育提出兩點省思，分成「該教什麼內容？」與「該怎麼教？」兩方面來探討。

### 一、數學！該教什麼內容？

由以上述的分析，我們可以發現，澳大利亞的多數學生並未擁有基本的數學能力，以致於他們的無法解很多數學問題，以及他們日後無法研修高等的數學課程，某種程度上多少會影響了科學與技術人才的人口。

反觀我國，太過強調精熟練習，盲目地解數學問題，並未有時間反思數學問題的來龍去脈，不知數學內容的精髓在哪裡？連結到哪裡？應用到哪裡？老師也未有時間討論數學內容的地位與重要性，老師在忙什麼？幫忙蒐集考古題嗎？唯恐漏掉了一些問題，以致於學生不精熟。於是盡量教，參考書也是盡量充實內容，盡可能包羅所有的題型。筆者過去指導小女七年級的功課，發現在圓的單元裡有這樣的問題，「圓上相異點 20 點，任兩點連成一個線段，請問可以連成幾條線段？」天啊！這是排列組合問題，不是圓的問題，組合問題是高二、高三才學的內容，現在放在國一、二的單元裡，對學生來說當然很難。若是教這個問題老師應該簡化問題成爲「圓上相異點 5 點，任兩點連成一個線段，請問可以連成幾個幾條線段？」俟學生解出之後，才回到原來的問題。老師的教學應該如此，否則學生挫折之餘，只能尋求補習班的援助。

再舉一例，因數教學的單元裡，360 的正因數有多少個？化成質因數相乘  $360=2^3 \times 3^2 \times 5$ ，答案是  $(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24$  個，爲什麼要用指數加一後相乘，沒有學過獨立事件的組合，當然不易了解，若是再問「爲什麼要化成質因數相乘？」，又是算術基本定理（質因數分解式的唯一性），對於國中生這是很深的數學原理。雖說有些聰明的學生可以經由老師的說明而理解，但所佔的比例可能很小。國中參考書最好不呈現上述不合宜的教材，若參考

書既已存在，那麼老師就應該幫助學生過濾掉這種教材，日後再學也不遲。筆者認為，未具備先備知識，要求學生解答問題，如同「不教而驅之戰」，一樣是罪過。

至於該教什麼？數系、代數、幾何、實測、統計等都是中學該教的內容，限於篇幅，無法一一說明。但是更應思考教材是否配合教學目標，教材是否符合學生的先備知識？不能「抓到籃子就是菜」般的草率，參考書有很多題目超出範圍，縱使刪掉 1/3 的題目也不為過。雖然一些老師有不同於筆者的看法，認為刪掉那麼多學生要做什麼？過去數學老師常說，「看得多，不如做得多」，筆者借用此話改說「做得多，不如省思得多」，留給學生「反思」的時間，相信每個學生都是能「思考」的個體，如此可能就有意想不到的成果呢！

## 二、數學!該怎麼教?

數學化的五種「過程」：解題、溝通、推理、連結、表徵 (NCTM, 1989; 2000)。以上五種數學化的過程，大家對解題、推理與表徵可能比較熟悉。限於篇幅，本文只從溝通與連結的觀點談數學該怎麼教。

數學本身是一種語言，若老師能將數學語言轉換成學生較易懂的方式溝通，可以幫助學生在數學概念上的理解。例如，方程式  $7+6=\square+5$  就是一種數學的符號語言，方框代表什麼？有些學生不懂直接就回答 13，因為他們直接將左式的結果寫在  $\square$  內，將「等號」視為「結果是」，所以有  $\square=13$  的答案。他們不懂得等號兩邊是「等價」的關係性思考。教學時，

老師若改問學生「什麼數加 5 會與  $7+6$  的結果一樣？」如此學生可能會思考「等式兩邊的結果」相等的問題。所以掌握精確的語言溝通，是幫助學生數學化的一個重要途徑。再以「 $39-15=41-\square$ 」為例，若是學生忙著計算  $39-15=24$ ，接著再處理  $24=41-\square$  的問題，縱使獲得正確答案，卻是未必真正掌握關係性的理解。假如有的學生說 41 比 39 多 2，所以  $\square$  應該比 15 多 2，從比較兩邊的數據的行動來看，此生可說是已到達理解關係式的目標了。如果教學目標訂在關係性的理解，老師應提問「減多少？」或「減哪個數？」會與「 $39-15$  的結果」一樣？

從以上二例看來，藉著回應學生的解題，老師投入持續性的「溝通」不僅幫助學生的數學化發展，也可以發展老師個人的教學專業。這樣的教學是較人性化的，不能以趕進度為藉口，忽視精確溝通的重要性。

再以解  $3^x=10$  為例介紹「連結」的過程，教學生解這個問題時，老師應該再次幫助學生連結指數函數與對數函數的（連結）關係，有些計算機不能直接計算出  $x=\log_3 10$ ，老師就應幫助學生認識  $\log_3 10$  與  $\log_{10} 3$  的倒數（連結）關係，給學生從  $\log_{10} 3$  獲得  $\log_3 10$  的機會，獲得的答案  $x=2.09\dots$ ，老師更應進一步給學生體會指數  $2.09\dots$  次方與 2 次方的（連結）關係。當學生看到所學的題材與其他經驗相連結，才容易理解數學與重視數學的價值。

國內廣設高中、大學與研究所已行之

有年，升學已不像以前那麼競爭，考上了高等學府，已不稀奇，求學的年限也拉長了，套句俗話「戰線拉長」了。既然學生的戰線拉長，老師教導學生的戰略也改變了嗎？「明星學校就只有這幾個！還是很難考，所以繼續『填鴨』是不得已的！」這句話已不具說服力了，應該思考如何給學生不一樣的學習才是教育工作者的任務。

我們應該思考怎樣的教學能幫助學生發展數學能力？也就是解題能力，怎樣從溝通中獲得數學概念？怎樣幫助學生利用數學的思維來溝通？怎樣發展學生的推理能力，以奠定學生追求高深學問的基礎？怎樣利用推理活動讓學生看到數學的威力？數學題材之間的關聯性，又該利用什麼活動讓學生發現？數學與其他學科或生活的關聯性，如何引入教學活動以發展學生學習數學的興趣？

作者並未走訪很多所墨爾本市的公立高中，所見所聞難免以偏蓋全也不宜做過渡推論，然「他山之石」總是可以提供我們省思的機會。「數學！該教什麼，與該怎麼教？」是數學老師與數學教育工作者該常常省思的問題，作者不揣淺漏提供上

述看法，希望國內教師從雙方的「差異」，不斷的省思與評估我們的努力是否正確？投資是否值得？

**誌謝：**本文是國科會計畫（NSC95-2918-I-415-002）的部分成果，感謝國科會的贊助，但本文僅是作者的拙見，並不代表國科會的立場。另外，也感謝匿名審查人的寶貴意見。

### 參考資料：

- Brissenden, T. (1988). *Talking about mathematics*. Oxford, England: Basil Blackwell.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematic.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematic.
- Norton, S., McRobbie, C., & Cooper, T. (2002). Teachers' responses to an investigate mathematics syllabus: Their goals and practices. *Mathematics Education Research Journal*, 14 (1), 16-36.