

第一章 緒論

黑洞有一個特徵的聲音嗎？也就是說，黑洞有一個振盪的模式嗎？數值研究發現 Schwarzschild 黑洞的微擾有一種振盪的模式，在一段時間間隔之中，初始微擾的演變被阻尼單頻振盪所控制，這些振盪的頻率和阻尼只與 Schwarzschild 黑洞的質量有關，而與引起這些振盪的初始微擾無關。圖 1.1 初始微擾產生於兩個黑洞的正向碰撞，這是使用由 Misner 發現的 constraint 方程式的一個解。從圖 1.1(b) 我們可以很清楚地看出 Regge-Wheeler 波函數隨時間演化只有單頻振盪，但是稍後我們將看到一個黑洞實際上擁有多數的特徵頻率，這些特徵頻率對應於所謂的 quasinormal modes (QNMs)。

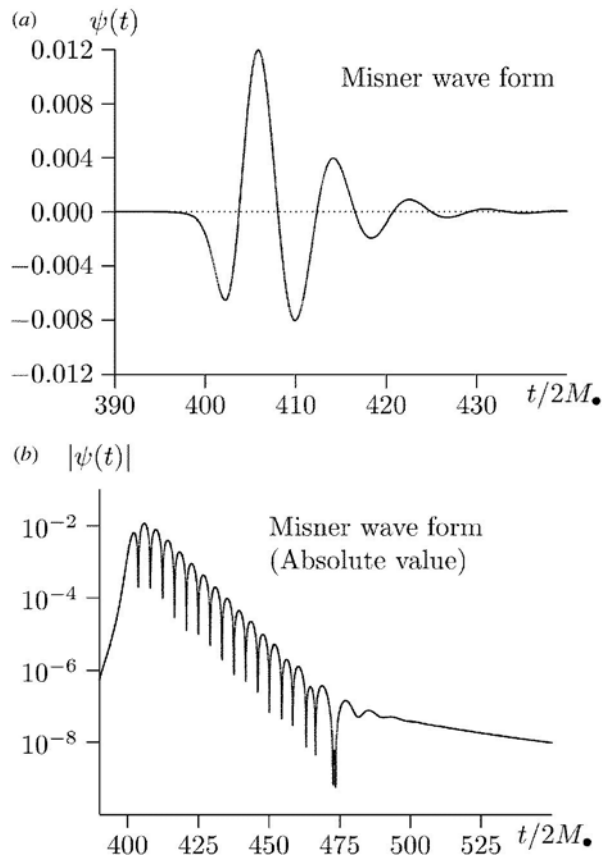


圖 1.1 : ($l = 2$) Regge-Wheeler 波函數隨時間演化 (a) 橫軸座標以線性表示；(b) 橫軸座標以對數表示。觀察者位在 $r_{obs} = 400 \times 2M$ 。
(作者為 Hans-Peter Nollert)

對於一顆星球以某種頻率振盪是不奇怪的，因為這些振盪是由組成這顆星球的流體所攜帶的。然而，一個黑洞並沒有任何物質可以造成這樣的振盪，即使一個黑洞的視界有時被當成一種薄膜 (membrane)，但是它也不是這些振盪的主要

載體。我們將看到這些振盪本質上牽涉到黑洞視界之外的時空度規。在廣義相對論之中，時空不僅是物理過程發生的場所，更確切地說，時空本身就是動力學實體，就像是一顆星球的流體一樣。

QNMs 首先被 Vishveshwara 在計算 Schwarzschild 黑洞的重力波的散射時所指出，而由 Press 創造 quasi-normal frequencies。在廣義相對論的架構之中，QNMs 由黑洞時空的微擾而產生。黑洞微擾的研究最早是由 Regge 和 Wheeler 在 1950 年代末期開始，他們研究了 Schwarzschild 黑洞的 axial 微擾，之後 Zerilli 研究了較為複雜的 polar 微擾。Regge 和 Wheeler 的初始目標是去研究在小幅微擾之下黑洞的穩定性，而不將微擾與天文物理關聯起來。一般而言，粒子掉入黑洞之中，或一顆星球塌縮成一個黑洞，或兩個黑洞互相碰撞，這些情況都可能使得黑洞產生微擾，也就可能產生 QNMs 的振盪。這些 QNMs 的振盪一般相信可能攜帶有重力波的資訊，所以重力波發射的振盪頻率可能是 quasi-normal 模式，也就是複數頻率的振盪，其實部代表振盪的真實頻率，而虛部代表阻尼。H. P. Nollert 的研究指出 Schwarzschild 黑洞的 QNMs 有如下情況

$$\omega_n M \sim 0.0437123 - \frac{i}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

S. Hod 注意到這個數值結果似乎有如下關係

$$\text{Re } \omega M \rightarrow \frac{\ln 3}{8\pi} \quad \text{as } |\text{Im } \omega| \rightarrow \infty$$

這個關係被 N. Andersson 與 C. J. Howls 基於 WKB 近似法的研究所確認

$$\omega_n M = \frac{1}{8\pi} \ln 3 - \frac{i}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

雖然 QNMs 是數學上的概念，但是一般認為 QNMs 支配著重力波的資訊。近年來，數個大型的重力波偵測器被建構，不過至今我們仍然未能偵測到重力波的存在，主要的原因是星球發射重力波非常微弱，如果我們能從 QNMs 的理論分析中掌握一些有關於重力波的有效資訊，或許對於早日發現重力波會有幫助。另外使用 QNMs 去獲得有關中子星的質量和半徑等資訊的可能性，或者去分辨黑洞和中子星，這些都是 QNMs 這個數學概念在天文物理上可能的應用。

在這篇論文裡，我們將討論黑洞的振盪（微擾），所使用的方法是考慮線性化的 Einstein 方程式。稍後我們也將看到黑洞的 QNMs 的產生，是由於我們所選取的邊界條件的關係，為了確認重力波的產生只與初始微擾有關，這迫使我們必須選取 out-going 邊界條件，但是若選取 out-going 解的邊界條件我們會發現這將會產生 QNMs 的振盪模式（頻率為複數）。我們將選取另一種邊界條件來研究 axial 重力微擾在不同頻率值的反射率與透射率。