中學生通訊解題第五十三期題目參考解答與評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
5301

已知 x, y 是實數，

且 $\begin{cases}(x-11)^5+15(x-11)=5\\(y-4)^5+15(y-4)=-5\end{cases}$，則 $x+y=?$

參考解答：

令 $\begin{matrix}x-11=a\\y-4=b\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}a^5+15a=5\\b^5+15b=-5\end{cases}$，$\therefore a>0, b<0$

$\because$函數 $f(t)=t^5+15t=t(t^4+15)$ 在實數範圍下

$t>0 \Rightarrow f(t)=t^5+15t=t(t^4+15)>0$　；

$t<0 \Rightarrow f(t)=t^5+15t=t(t^4+15)<0$

又 $(a^5+b^5)+15(a+b)=0$

$=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+15)$

$\because a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+15>0$

$\therefore a+b=0 \Rightarrow x+y=15$

[另解]這是高三學生的好解法，

令 $f(t)=t^5+15t$

$\because f(t)=t^5+15t=t(t^4+15)$ 爲嚴格增函數，

又 $f(x-11)=5, f(4-y)=-(-5)$

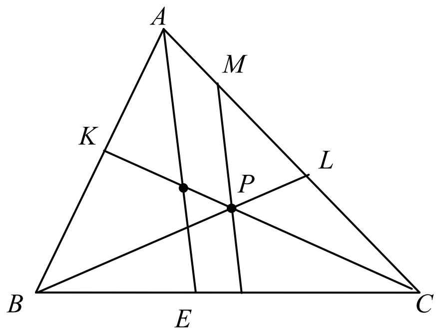
$\therefore f(x-11)=f(4-y)=5$

$\therefore x-11=4-y \Rightarrow x+y=15$

※ 若函數 $y=f(x)$ 爲嚴格增函數，$x_1, x_2 \in D, f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$

問題編號
5302

ΔABC 中，$\angle BAC$ 的角平分線交 BC 邊於 E 點，在 AB 與 AC 邊上分別取 K、L 兩點，使得 $\overline{BK}=\overline{CL}$。設 P 點爲 CK 與 BL 的交點，過 P 點作 AE 的平行線交 AC 於 M 點，試證：$\overline{AB}=\overline{CM}$。



參考解答：

證明一：

設 D 點爲 CK 與 AE 的交點，過 P 點作 AE 的平行線交 BC 於 Z 點。由孟氏定理知

$\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \cdot \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{ED}}{\overline{DA}}=1$，$\dfrac{\overline{ML}}{\overline{LC}} \cdot \dfrac{\overline{CB}}{\overline{BZ}} \cdot \dfrac{\overline{ZP}}{\overline{PM}}=1$

因 $AE \,//\, MZ$，得 $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{DA}}=\dfrac{\overline{ZP}}{\overline{PM}}$，

加上 $\overline{BK}=\overline{CL}$ 知 $\dfrac{\overline{AK}}{\overline{ML}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BZ}}$ 。

也可得 $\dfrac{\overline{AK}}{\overline{ML}}=\dfrac{\overline{CZ}+\overline{ZE}}{\overline{BE}+\overline{ZE}}$ ……(1)

另外，因 AE 是$\angle BAC$ 的角平分線，

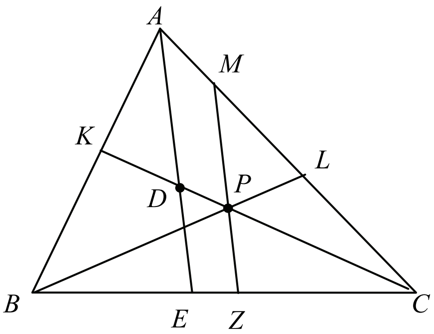
所以 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ 。

又 $AE \,//\, MZ$，得 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\dfrac{\overline{MC}}{\overline{CZ}}$ 。

因此 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BE}}=\dfrac{\overline{MC}}{\overline{CZ}}$ 即 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MC}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CZ}}$ ，

也可得 $\dfrac{\overline{AK}+\overline{KB}}{\overline{ML}+\overline{LC}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CZ}}$ ……(2)

若 $\overline{AK}>\overline{ML}$ ，由(1)知 $\overline{CZ}>\overline{BE}$ ；
由(2)與 $\overline{BK}=\overline{CL}$ 知， $\overline{ML}>\overline{AK}$ ，矛盾。
同理若 $\overline{AK}<\overline{ML}$ ，亦可得矛盾。
故知 $\overline{AK}=\overline{ML}$ ，所以 $\overline{AB}=\overline{CM}$ 。



證明二：

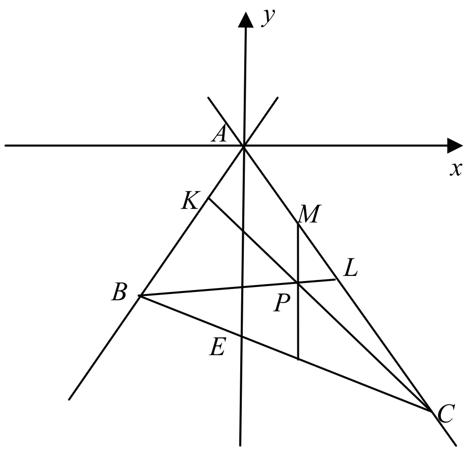
以 A 點爲原點，將角平分線 AE 與 y 軸重合，則可假設直線 AB 的方程式爲 $y = mx$，直線 AC 的方程式爲 $y= -mx$(如圖 $m > 0$)。設 B 點坐標爲$(-x_1,-mx_1)$，C 點坐標爲$(x_2,-mx_2)$，另因 $\overline{KB}=\overline{CL}$ ，故假設 K 點坐標爲($-x_1+t, -m(x_1-t)$)，L 點坐標爲($x_2-t, -m(x_2-t)$)，所以直線 BL 的方程式爲

$$y + mx_1 = \frac{m(x_1-x_2+t)}{x_1+x_2-t}(x+x_1)，$$

直線 CK 的方程式爲

$$y + mx_2 = \frac{m(x_1-x_2-t)}{x_1+x_2-t}(x-x_2)，$$

聯立求解得 P 點 x 坐標爲 x_2-x_1，此亦爲 M 點 x 坐標，因此 A、B 兩點的 x 坐標差等於 M、C 兩點的 x 坐標差，所以 $\overline{AB}=\overline{CM}$ 。



證明三：

因 A、B、C 三點不共線，我們可以用 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 作一組基底，設 a、b、c 分別爲 BC、AC、AB 三邊邊長(如原圖 $b> c$)，爲了簡化符號我們使用「斜角坐標」(1,0)、(0,1)分別代表 B 與 C 點，因此$\angle BAC$ 的角平分線是 A 點與斜角坐標$(\frac{b}{c},1)$的連線。

設 $\overline{BK}=\overline{CL}=k$ ，則 K 點的斜角坐標爲$(\frac{c-k}{c},0)$，L 點的斜角坐標爲$(0,\frac{b-k}{b})$。

所以直線 BL 上的點其斜角坐標$(x,\ y)$均滿足 $x+\dfrac{b}{b-k}y=1$，直線 CK 上的點其斜角坐標(x,y)均滿足 $\dfrac{c}{c-k}x+y=1$，聯立求解得 P 點斜角坐標爲$\left(\dfrac{c-k}{b+c-k},\dfrac{b-k}{b+c-k}\right)$。

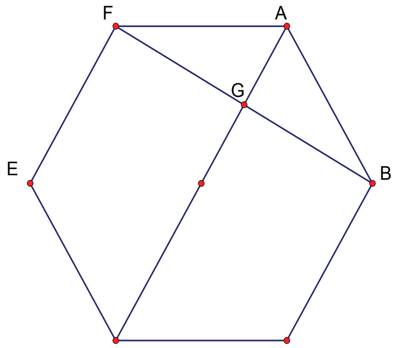
取線段 AC 上 M 點其斜角坐標爲 $\left(0,\dfrac{b-c}{b}\right)$，因此 $\overline{AB}=\overline{CM}$ 而向量 MP 其斜角坐標爲$\left(\dfrac{c-k}{b+c-k},\dfrac{c(c-k)}{b(b+c-k)}\right)$，此與 $\angle BAC$ 的角平分線平行，故得證。此結果若用 GSP 可更清楚看出，無論 k 值爲何，P 點的軌跡是一直線，且此直線與$\angle BAC$ 的角平分線平行。

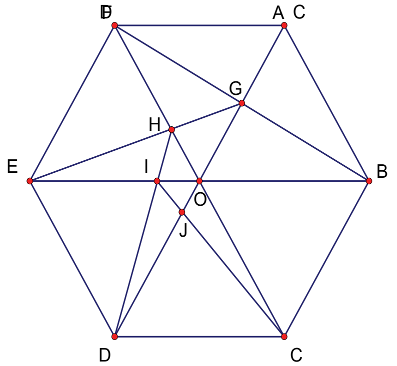
解題評註：

本次徵答僅有一位同學來信，使用了證明二的解析方法（以三角函數的形式表達），表現得很好。老師特別列出證明一的幾何解法、證明二的向量解法，這些都是高二會學到的方法。

問題編號
5303

已知一邊長爲 1 的正六邊形,請只用直尺作出長度爲 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$ 的線段(例如：連 AD 及 BF,交點爲 G,則 $\overline{AG}=\frac{1}{2}$)





參考解答：

連 $\overline{FC}$ 交 $\overline{EG}$ 於 H，

$\because\ \overline{HO}\ //\ \overline{ED}$

$\therefore\ \overline{HO}:\overline{ED}=\overline{GO}:\overline{GD}=\frac{1}{2}:(\frac{1}{2}+1)=1:3$

又 $\overline{ED}=1\Rightarrow\overline{HO}=\frac{1}{3}$

連 $\overline{EB}$ 交 $\overline{HD}$ 於 I，

$\because \overline{IO}\ //\ \overline{DC}$

$\therefore \overline{IO}:\overline{DC}=\overline{HO}:\overline{HC}=\frac{1}{3}:(\frac{1}{3}+1)=1:4$

又 $\overline{DC}=1 \Rightarrow \overline{IO}=\frac{1}{4}$

連 $\overline{CI}$ 交 $\overline{AD}$ 於 J，

$\because \overline{OJ} \,//\, \overline{BC} \therefore \overline{OJ}:\overline{BC}=\overline{IO}:\overline{IB}=\frac{1}{4}:(\frac{1}{4}+1)=1:5$

又 $\overline{BC}=1 \Rightarrow \overline{OJ}=\frac{1}{5}$

解題評註：

有一位同學用 Ceva 定理證明，雖然精神可嘉，但用在國中程度的通訊解題，仍給人”殺雞焉用牛刀”的感覺。有一些同學沒有證明，應特別注意。

問題編號
5304

是否存在三個整數 a,b,c，同時滿足

$$\begin{cases} a\cdot b\cdot c+a=2007 \\ a\cdot b\cdot c+b=20072007 \\ a\cdot b\cdot c+c=200720072007 \end{cases}$$

參考解答：

由題意知 $\begin{cases} a(bc+1)=2007 \\ b(ac+1)=20072007 \\ c(ab+1)=200720072007 \end{cases}$

易知 a,b,c 皆為奇數

$\Rightarrow (bc+1)$ 為偶數　$\Rightarrow a(bc+1)$ 為偶數

與 $a(bc+1)=2007$ 矛盾，故 不 存在三個整數 a,b,c，同時滿足

$$\begin{cases} a\cdot b\cdot c+a=2007 \\ a\cdot b\cdot c+b=20072007 \\ a\cdot b\cdot c+c=200720072007 \end{cases}$$

解題評註：

本題利用整數的奇偶性，不難迎刃而解。

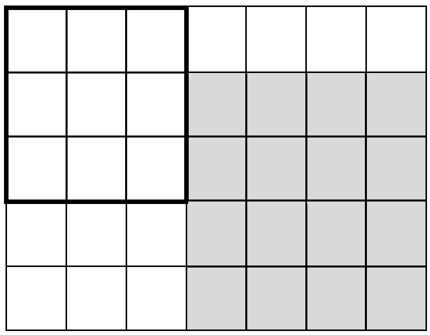
問題編號
5304

(1) 試將 0 和 1 兩種數字填入 5×7 的表格中，且滿足下列三條件：

(α) 表格中的數字不可全為 0 或全為 1

(β) 所有 3×3 子表格的數字和均相等

(γ) 所有 4×4 子表格的數字和均相等



註：5×7 的表格中，共有 15 個 3×3 子表格（如圖左上角黑框部分），以及 8 個 4×4 子表格（如圖右下角陰影部分）

(2) 將上題 5×7 的表格換成 6×6 的表格，且滿足同樣的三條件。

參考解答：

(1)

A	B	C	C	B	A
B	D	E	E	D	B
C	E	F	F	E	C
C	E	F	F	E	C
B	D	E	E	D	B
A	B	C	C	B	A

(2) 無法建構滿足此三條件的 6×6 表格。若能滿足此三條件，6×6 的表格中，共有 16 個 3×3 子表格，及 9 個 4×4 子表格。右圖中，將 16 個 3×3 子表格數字相加，每個 A 處的數字恰只算過 1 次，每個 B 處的數字恰算過 2 次，每個 C 處的數字恰算過 3 次，每個 D 處的數字恰算過 4 次，每個 E 處的數字恰算過 6 次，每個 F 處的數字恰算過 9 次。假設每個 3×3 子表格數字的和爲 p，且 A 處數字的和爲 a，B 處數字的和爲 b，C 處數字的和爲 c，D 處數字的和爲 d，E 處數字的和爲 e，F 處數字的和爲 f，因此 $16p = a + 2b + 3c + 4d + 6e + 9f$。相同的狀況發生在 9 個 4×4 子表格，設每個 4×4 子表格數字的和爲 q，得 $9q= a + 2b + 3c + 4d + 6e + 9f$。所以 $16p = 9q$，因 p、q 均不等於 0（否則表格中的數字全爲 0)，得 p 是 9 的倍數，q 是 16 的倍數。因每格數字最大值是 1，這導致表格中的數字全爲 1，矛盾。

0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0

解題評註：

第 1 小題中，答題的同學給的答案，都有極高的對稱性。在說明第 2 小題時，若是想用操作的方法說明不可能建構出符合條件的表格時，往往無法說明清楚，得到滿分的同學皆使用與解答相同的方法。