

從 數學難、數學美 談 數學教育

李政貴

臺北市立第一女子高級中學

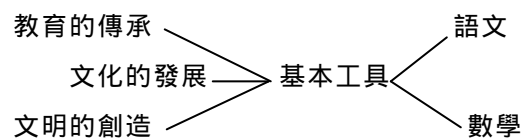
九十一年度由行政院大陸委員會主辦，為促進海峽兩岸數學與自然課程與教材統整之交流，於九月十日在師大科教大樓所舉辦的海峽兩岸數學與自然課程與教材統整教學研討會，本人能參與這個盛會，並受邀做專題報告，殊感榮幸。下面從“數學難、數學美”談“數學教育”是當天的報告內容稍加補實而成，期先進與專家惠於指教。

今年7月8日北一女中數學科邀請中央研究院數學研究所長劉太平院士給本校高一新生作專題演講，劉所長以“數學難、數學美”為題，談“學數學”。我們常有的經驗是：一群人在一起聊天時，談到中學階段學數學的經歷，七八成以上的人都是一場夢魘。有時候大夥兒在一起自我介紹時，說到：我是數學老師，大家都會拋出異樣的眼光，這是為什麼呢？數學真的這麼難學嗎？數學的學習真的都是痛苦的經驗嗎？下面就以個人學習的經驗和任教高中三十年的經歷與心得，作個粗淺的分析和探討。首先談數學學習，然後再以“數學難、數學美”來談“數學教育”。

一、教育、文化、文明的基本—語文與數學

我們可以說：凡是研究現實世界裡的數量關係與空間形式的學問都是數學的內涵。

因此，我們可以說：“大自然中自有數學”。數學的起源與應用比語言還要早，還要長。數學與人類文明同樣地古老，有文明就必須有數學，也可以說：缺乏數學就不可能有科學的文明。不過，數學的表達，數學的傳遞與應用必須靠語言與文字。因此，語文與數學都是人類社會溝通不可或缺的工具。由下面一個簡表可以說明語文與數學的重要性。



我們再以東西方兩項既有的事實與現況來看：

孔子的教育內涵：(六藝)

禮、樂、射、育、書、數

其中：書與數就是語文與數學

美國進大學必須考 S.A.T. (Scholastic Aptitude Test)

主要的科目：語文、數學

由此可知東西方對知識的基本認知是一樣的。東西方對人類生活與社會的發展的基本認識是一樣的，既語文與數學是不可或缺的。理性與感性的思想概念，都必須透過語

文的傳述和表達，而對大自然與生活周遭的現象，則需藉著數學來表達。

如：萬有引力 $F = G \frac{M_1 M_2}{R^2}$

如：自由落體運動 $S = \frac{1}{2} g t^2$

如：人口的成長 $p(t) = k a^t$

義大利物理兼數學家伽利略曾說：自然界中偉大的書是用數學語言寫成的。物理定律與科學的許多最基本的原理，甚至於經濟學的基本原理，如：萬有引力、自由落體運動都是用數學來表達，沒精確的數學是難以表達的。因此，數學創造科學的文明是無可置疑的。

二、數學難、數學難學

1. 眾人都說數學難—數學本質是難的

(a)概念的認知是難的

數學新概念的認識，必須利用自己已有的知識與經驗作為建構的基礎，並與具體化的事物相結合，方能確實的體認新的概念，並應用之。

如：函數概念：當我們介紹了函數的概念之後，我們常會請同學們舉例說明。可是，同學們的回答常會有很大的困惑，或不知所云？雖然函數的概念，函數的定義，可以用簡短的一些字或幾句話來表達，可是它的內涵卻不是一時間可完全體認的。

(b)理論的建立是難的

我們從下列兩個歷史性的發展來說明

b-1 從解方程式的發展歷史看：(注 1)

(1)一次方程式的解

希臘數學家 Diophantus of Alexandria (約西元 250 至 275 年)，在“算術”書中，詳述了一次式的解法。

(2)二次方程式的解

阿拉伯數學家 al-Khowarizmi Mohammed Ibn Musa (約 783 至 850 年) 在 820 年左右的“代數學”書中，系統地給出解二次方程式的一般公式。

(3)三次四次方程式的解

義大利數學家 Tartaglia Niccolo (約 1499 至 1557 年) 在 1541 年得到一般三次式的解法。義大利數學家 Cardano (約 1501 至 1576 年) 在 1545 年出版“大法”一書中公開了三次與四次方程式的一般解。(四次式其實是 Cardano 的學生 Ferrari (1522 至 1565 年) 求得一般解)

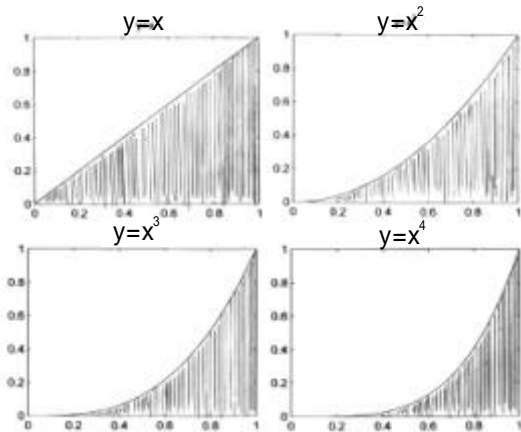
(4)五次及五次以上方程式

挪威數學家 Niels Henrik Abel (1802 至 1829 年) 在 1824 年證明“一般五次方程式的不可解性”(即一般的五次方程式不可能用根式求解) 從上面四個階段的發展歷程，至少經歷了近一千八百年的時間才較完整的處理一般方程式的解的理論基礎。所以，我們可以說：數學理論確實是不容易的。

b-2 從求面積的發展歷史看：(注 2)

如下列的圖形：曲線 $y=f(x)$ 下與 x 軸所圍面積

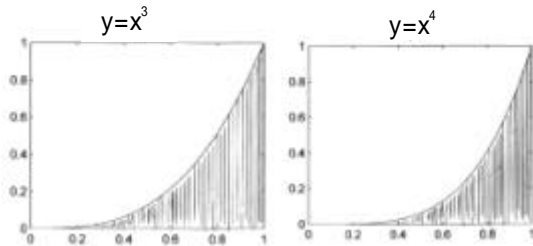
(1)利用中國古書“周髀算經”(大約是西漢時代,公元前一百多年之作)中的



勾股定理與古希臘數學家 Pythagoras (約公元前六世紀)的畢氏定理即可求得 $y=x$ 下的面積

(2)希臘數學家阿基米德 Archimedes (西元前 287 至 212 年)利用“窮盡法”求得 $y=x^2$ 下的面積

(3)英國數學家牛頓 Isaac Newton (1642 至 1727 年) 德國數學家來布尼茲 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 至 1716 年)發明了“微積分”之後，才求出 $y=x^3$ ， $y=x^4$ 的曲線下面積，也解決了 $y=x^n$ 曲線下的面積。而旋轉體積與表面積至 20 世紀才解決。



由上面三個階段的發展歷史我們看到：至少經歷了兩千年以上，才較完整的解決曲線所圍的區域面積。

所以，從歷史的沿革可以看到數學理論是難的，也就是數學的本質是難的。

2. 數學學習之道—數學難學主要不在本質的困難，而是基礎觀念學得太快，無法去深刻體認，然後去克服學習數學的難。下面提出個人對學習數學的基本看法：

(a)在無疑處存疑：這是追根究底與研究的原動力。

一般人在學習之際，常直接接受習以為常的東西，而不質疑它是否為必然或可行。偉大的思想家、科學家常在無疑處存疑，慎密地去思維，以發現新的問題追根究底，解決問題。

如：劉太平所長小學二年級學九九乘法的經驗談中， $5 \times 9 = 45 = 9 \times 5$ ， $56 \times 78 = 4368 = 78 \times 56$ ，而 $a \times b = b \times a$ 必成立嗎？作乘法時，兩個數互換，其乘積的結果，必然相同嗎？乘法運算必然可交換嗎？為了這樣的問題，他被老師罰坐在教室裡一個下午。後來在矩陣代數與幾何變換中，對於乘法運算的不可交換性就完全解決了他的疑惑。事實上，很多地方，乘法是不可交換。見微知著，劉所長在數學上的成就不是偶然的。

愛因斯坦 (Einstein) 三歲時還不會講話，九歲時還結結巴巴。四、五歲時，有一次臥病在床，對爸爸送

給他的羅盤質疑：「一定有什麼東西深深地隱藏在事情後面」。一連幾天，他都想知道：「為什麼它能指南？」小時候，他看到地上的螞蟻在忙碌地搬運食物時，他就會觀察半天不動，在那兒細聲的對螞蟻說話。同學們就給他取個外號：「方塊」，罵他笨頭笨腦的；但他卻是廿世紀科學界的代表人物。1921 年 11 月 10 日榮獲瑞典科學院頒發的物理諾貝爾獎（注 3），最引人注意的是他提出相對論的質量與能量互相轉換的質能關係：

$$E = mc^2$$

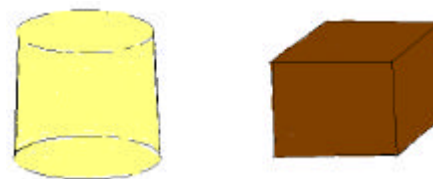
他常告誡學生「不要選擇輕鬆的途徑」、「研究的目的是追求真理」。

(b)欲速則不達

學數學要慢，不能稍遇困難就想用簡便方法而忽略它的根本。越是基礎性的概念，越要花更多時間，才能徹底的瞭解其根本的道理，進而類比之，並應用之。

如：時鐘問題，流水問題，兩個的本質都是賽跑的追趕問題。而雞兔問題、父子年齡問題也是同質的代數題。這些問題徹底的瞭解，就能解決更一般的應用問題了。

又如：體積的應用（9 等分蛋糕）圓柱型蛋糕 9 等分，大家都覺得很容易，但是要 9 等分方形蛋糕要如何？這是不是很難呢？只要想一想體積的原理就可知道了。



(c)同儕同好的互動學習

同儕互動可以解除疑惑、增進情誼，同好激勵更能激盪出智慧的火花。

如：懸疑三百多年的「費瑪最後定理」（Fermat's Last Theorem）

費瑪（1601-1665 生於法國波蒙特）大約在 1637 年他珍藏的奧幻特斯所著的《算術》一書的某一頁邊寫下：除了平方之外，一個 n 次方數不能表示成兩個 n 次方數的和（ $x^n + y^n = z^n$ ）。我已經為這個命題找到了一個非常美妙的證明，然而這裡的篇幅不足以讓我寫下這個證明。

費瑪最後定理先後經過了尤拉、高斯、傅立葉、庫麥拉梅、科西的努力，尚無法解決。到了 90 年代，再由龐加萊、莫德爾的努力，亦未能克服困境。三百多年來，數學家們前仆後繼地為解決「費瑪最後定理」而努力；到了 1950 年後，谷山豐、志村五郎提出關鍵性的谷山-志村猜測，再梅哲、弗維、里貝特在掀起研究的高潮；最後，1993 年 6 月 23 日，英國數學家安德魯懷爾斯（A.Wiles）在一個研討會上宣稱破解了谷山-志村測，但有一些邏輯上的漏洞。直到 1995 年，懷爾斯在 5 月出版的數學年鑑（Annals of Mathematics）上刊登了新的證明，才被確認解決了費

瑪最後定理。這份榮耀不僅是懷爾斯的成就，更是為解決這問題而努力的數學家所共有的。

如：錢展望老師指導學生的例子：

錢老師早期是小學的體育老師，可是他對數學教學很有興趣，他去應徵中學數學老師；進入湖北省武漢市武鋼三中後，除了一般的教學之外，還從事數學超常訓練（即資優學生輔導課）；錢老師指導學生時，提供充分的問題給學生思考，鼓勵學生互相討論 - 常有一些問題是經由學生討論之後才得到解答，在錢老師的指導下他的學生因互動學習而培養了超強的實力，在 1997 年及歷年來 IMO 國手選拔中都有非常傑出的表現。錢老師的教學更是受了大家的讚揚與肯定，因此，錢老師被任命為中國數學奧林匹克高級教練員。

三、數學美

1. 數學的表達簡明清晰精確，而且有易懂之美

如：商高定理（畢氏定理）

若直角三角形 ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ，則

$$c^2 = a^2 + b^2。$$

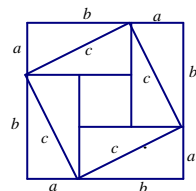
由右圖即可知

$$c^2 = 4(1/2)ab + (b-a)^2$$

$$\text{即 } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{同樣地，} (b+a)^2 = 4(1/2)ab + c^2$$

$$\text{亦即 } c^2 = a^2 + b^2$$



畢氏定理將幾何與代數緊密的結合，它是解決面積問題的根本，也是處理距離與長度的基石。不論在東方或西方，不論在中國、希臘、印度、古埃及、巴比倫，都對它有深入且廣泛的研究。

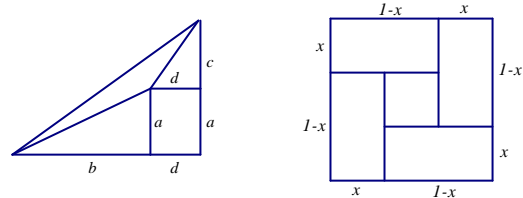
又如下面兩個代數不等式：

(1) 若 a, b, c, d 為四個正數，且 $a/b < c/d$ ，則

$$a/b < (a+c)/(b+d) < c/d。$$

(2) 若 $0 < x < 1$ ，則 $x(1-x) \leq 1/4$ 。

利用代數推論需要花點功夫，但用幾何圖形表示就不言而喻，如下：



2. 數學有規律、有變化、是多采多姿的，而且有勻稱之美

如：幾何中， G 為 $\triangle ABC$ 的重心時， $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = 0$ ，同樣的， G 為四面體 $ABCD$ 的重心時， $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} + \vec{DG} = 0$ 。

如：科西不等式（Cauchy-Schwarz inequality） \vec{u}, \vec{v} 為兩向量，則 $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ 在處理不等式時，它扮演著重要的角色。

應用：

設 p_1, p_2, \dots, p_n 為 $1, 2, \dots, n$ 的任一排列

試證

$$\frac{1}{p_1 + p_2} + \frac{1}{p_2 + p_3} + \dots + \frac{1}{p_{n-2} + p_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-1} + p_n} > \frac{n-1}{n+2}$$

又如：直線 AB 與直線 CD 相交於 P ，而圓 O 交直線 AB 於 A, B ，交直線 CD 於 C, D 時 $AP \times BP = CP \times DP$ 不論 P 在任何位置。

(A 與 B、C 與 D 均可重疊)

3. 數學難，但是如果能夠深刻的體認它的難，就會欣賞到它的美。

數學常藉著概念符號與關係來表達抽象的東西，若沒有真正理解，它會是很冰冷而且不容易體會的，正如古詩詞是抽象的。但當我們領略到它的意境，那結構之美，文辭之美，便浮現在腦海裡，正如同一幅藝術精品，呈現在眼前。

諾貝爾物理獎得主李政道博士在為前中研院院長吳大猷九十歲大壽（科學與藝術）的演講中，以藝術大師李可染的“鬥牛圖”（如文後之附件）來解說“高能物理的世界”。

李政道院士對“鬥牛圖”（如文後之附圖）：

圖中的兩隻牛看來只是頂在一起，但兩對牛角所蓄積的位能，卻是驚人的。這就是“相對論”的重離子碰撞，核子如重牛，對撞出新生態。

他也以南宋詞人蔣捷的“一剪梅”（原題「舟過吳江」）中的一段詞（如下文）——「流光容易把人拋，紅了櫻桃，綠了芭蕉」說：在藝術裡，光是留不住時間的。他也藉此推導出“時間與速度的關係”。

一剪梅：

一片春愁待酒澆，江上舟搖，樓上帘招。
邱娘渡與泰娘橋，風又飄飄，雨又蕭蕭。
何日歸家洗客袍，銀字笙詞，心字相燒。
流光容易把人拋，紅了櫻桃，綠了芭蕉。

在數學上，戰國末年時公孫龍所提的一句話：

一尺之棰，日取其半，萬世不竭。

更可說是「極限」最貼切的註解。

數學固然起源於人類對日常生活現象的觀察，但它絕不簡單，有一定的難度，需要時間去演練、把玩並體會它的意涵。德國數學家閔可夫斯基（H. Minkowski）將數論比喻為：

以柔美的旋律演奏出強而有力的數論音樂。

在數論中有很多的性質是那麼地明顯，可是要證明它們卻異常地困難，正是這種可望又不可得的美麗的真理吸引了眾多的天才數學家，使他們讚嘆，使他們傾心。數學本質是難的，所以學數學要有一定的進度，要不時的感覺它，深刻地體認它，才能發現數學的美就在其中，並享受做數學苦盡甘來後的樂趣。簡單、清晰、易懂、對稱就是數學之美。法國數學家龐加萊（Jules Henri Poincare）說：數學家們非常重視他們的方法和理論是否優美，這並非華而不實的作風。那麼，到底是什麼使我們感到一個解答、一個證明是優美的呢？那就是各個部分之間的和諧、對稱、恰到好處的平衡。換句話說井然有序，統一協調，從而使研究者對整體以及細節能有清楚的認知和理解，這正是產生偉大成果的地方。

四、數學教育

數學是一門思維的科學，也是一種文化和藝術。數學知識和方法具有基礎性、工具

性、和廣泛的應用性。數學學習的目標首重培養學習者的思維能力與解決問題的能力與創造力；因此數學教育的理念與實踐，就要針對學習者的目標。

1. 中學數學教育的目標基本上有下列幾項：

- (a)使學生具有正確的邏輯思維能力
- (b)使學生具有一定的空間想像能力
- (c)使學生具有正確迅速的運算及推理及診錯能力

二十世紀的八十年代，美國數學教育界大力倡導“問題解決 (problem solving)”的理念與口號。“問題解決”的內涵不僅包括了綜合已學的知識與方法去解決問題，更需重視創造力的開發。“問題解決”的核心工作，不在於各種特殊的解題方法與技巧，而應該重視一般性的思維能力的培養。國民教育階段，數學教育的目標是發展學生對“數”的感覺，也就是使學生具有應用數字來表示具體的“數據”與“量”的關係的能力，以及能夠判定各種算術運算的意義。中學階段，數學教育的目標在發展學生對“符號”的感覺，使學生具有應用符號來表示數學問題與解決問題的能力。科技資訊時代，電腦是強而有力的工具，但人不能完全依賴電腦而沒有計算能力。今年七月當選中央研究院的數學家姚鴻澤教授，就是靠著演算能力，花一年左右的時間，解開了現今一位數學大師與研究助理利用最先進的電腦並花了多年時間仍無法解決的「相對論性的物質穩定性」的數學式。

2. 數學教育的內涵

數學教育的內涵，至少包含下列幾項最基本的內容：

- (a)數學課程與教材
- (b)數學教學法與原理、原則
- (c)學生的學習與身心發展
- (d)教學評量
- (e)教育制度與政策

根據教育主管當局訂定的課程綱要(或課程大綱)，選擇適當的教材，作為教學活動與學生學習的具體素材。依據數學教學的原理原則，引導學生正常的學習，並注意學生身心發展與個別輔導，充分發揮教師的責任心與專業自主的能力。在教學的過程中，藉著各種必要的評量方式，瞭解學生學習的成就，以診斷學生學習的困難給予適時的輔導。除外，完善的教育制度與政策更是教育成敗的原動力。

3. 目前國內數學教育問題的癥結

國內高等教育學校不斷的擴充，一般大學也廣設教育學程，以培育中小學師資，並提供教師進修的機會，因此，中小學師資素質普遍提昇。但是教學的過程中仍存在一些傳統上的缺失：

- (a)教材進度操之過急，不能因材施教
- (b)考試文化與補習現象
- (c)數學教育理論研究與教學實踐不能契合
- (d)急功近利，缺乏宏觀視野

姚鴻澤教授在當選院士後，建議學生：多接觸各學科，慢慢找到自己的方向，別跟

著潮流走，去選擇自己的方向。他鼓勵理科學生，要多接觸文學與藝術，因為「真正的科學家，對文化有影響，若對文化不瞭解，眼界會狹窄。」

今年七月當選院士的生物統計學家梁廣義教授說高中生物唸得很差，在清華大學數學系四年，也沒有生物課程。但他認為：組合統計應該可以實際應用，深入生活，赴美深造攻讀生物統計，踏入了生物統計領域。他建議學生：數學是作生物統計很重要的工具，對科學要有好奇心。要多看書，增加人文素養。

前國立暨南國際大學校長李家同博士，在一次頒獎典禮中，闡釋科學獎競賽的精神，那就是創意建築在學問之上，對人類科學有極大貢獻的人，都是飽學之士，唯有不斷的讀書，吸取新知，開拓視野，未來的創意才比現在的創意更有價值。

教育的目的是發揮人類的天賦，服務全人類。科學教育不只是創造發明，更要人文關懷。高中階段，數學確實學好，數學與自然科學的統整是很自然的。生物、物理、化學、統計都越來越依賴數學。把數學學好，並加強人文、藝術的素養，才能培養出宏觀的視野，並建立研究發展的良好基礎。不僅如此，社會科學教育也不能脫離數學與自然科學教育，否則就不能適應多元社會的需要。教育要重視本質，不能本末倒置。否則不僅事倍功半，更可能造成教育的反效果。

五、結語

1. 有志者事竟成

(1)華羅庚(1905年生於江蘇省)小時候，因父親家業不順，生活窮困，十歲進小學，但個性寡言少歡的他，雖然肯動腦筋，但平時喜歡到處遊蕩，以致功課不佳，小學沒拿到畢業證書。進初中後，初二開始勤奮讀書，漸露數學天分。(此時，就發現並指正一篇大學數學教授文章中錯誤的解答。)初中畢業，就讀於私立中華職業教育社附設補習學校。兩年後，因家裡沒錢供他繼續讀書，於是輟學回家幫助父親經營小店生意。這時候，由於他對數學產生強烈的興趣，所以勤奮的自習數學。1929年12月發表了第一篇論文“Sturm 氏定理”的研究。1931年被清華大學數學系主任延攬至清華大學數學系當助理、助教。一年後，就升任講師正式開課。1936年7月榮膺國民政府徵派到英國深造，到倫敦的劍橋大學進修，不到三年就學成歸國，並被譽為二十世紀四十年代全世界五大頂尖數學家之一。華羅庚憑自己的意志，追求心中的理想，立身世界頂尖數學家之林，堪為世人的典範。

(2)趙忠堯(1902至1998)(第一屆中研院院士，也是中國科學院院士)自幼對數理化十分感興趣，中學畢業後，進入南京高等師範學校就讀化學系，1924年轉至東南大學，而後，到美國追隨諾貝爾物理獎得主密立根博士作研究。1931年返國後，任教清華大學、雲南大學、西南大學。1945年應聘為重慶中央大學物理系主任，也建立

原子研究室。1946年6月，應邀參觀美國在太平洋的比基尼島上的原子彈試爆。於是前往美國實地瞭解核子物理研究的新進展，並購買核物理研究設備。為了獲得加速度和製造的細節知識，出生入死穿梭在各研究機構。返國時，在「威爾遜總統號」艦上，被駐日美軍最高司令逮捕入獄。獲釋後，1950年底，帶著大批加速器資料和關鍵設備回到中國大陸。五年後，完成了中共第一台質子靜電加速器，展開中國原子物理研究的新紀元，並奠定了核子高能物理研究的基礎。

2. 數學教育成功之道

朽木與枯枝常是插花或造景藝術家手中的素材，化腐朽為神奇，這是藝術家的本領與睿智。凡人，天生我才必有用，在老師的引導下，每個學生都有可造就的一面。數學教育涵蓋的層面很廣，而從事教育工作者「教

師」是其成敗最重要的關鍵。如果每位教師都能以教育的成敗為己任，時時吸取好的教學經驗，不斷地配合實際需要研究再創新，日益精進，以適應學生和社會的需求；那麼，不僅可以提升教育品質，也許可以影響應興應革的大環境。目前，數學課也許不是最受歡迎，但每個數學教師若能以「我可以成為一個最受歡迎的老師」自許，相信數學課會越來越受學生歡迎的。數學教育的成功，自然是指日可待。

注1. 王幼軍、金之明編著，著名數學家和他的一個重大發現，凡異出版社，89年11月初版，(第140頁至177頁)。

注2. 谷超豪主編，數學辭典，建宏出版社，1995年1月初版刷(第659頁至694頁)

注3. 菲利浦 法蘭克著，張聖輝譯，Einstein His Life & Times 愛因斯坦傳，志文出版社，1996年1月再版。

