

數學解題訓練第四、五期參考答案

鄭金塗 劉賢建

臺北市立士林國民中學

《解題訓練—第四期參考答案》

(1) 

經觀察，土地及道路皆要均分給四個兒子

土地面積餘三個小正方形 → 每人可得 $\frac{3}{4}$ 個正方形

道路有六小段 → 每人可得 $\frac{6}{4}$ 段道路

由道路來劃分可得左圖。(其餘自推)

(2) (i) 首先考慮 1~9 中，兩兩相乘能夠得到的數 (不能重複)

$$\begin{cases} O + O = O \\ O - O = O \\ O \times O = O \end{cases}$$

(a) $2 \times 3 = 6$ (b) $2 \times 4 = 8$

(ii) 若 $2 \times 3 = 6$ → 剩下 1、4、5、7、8、9

將之分為兩組使一組中兩數相加等於另一數

可分為：1 + 7 = 8、4 + 5 = 9

$$\therefore \text{可得} \begin{cases} 4+5=9 \\ 8-7=1 \\ 2 \times 3=6 \end{cases}, \begin{cases} 4+5=9 \\ 8-1=7 \\ 2 \times 3=6 \end{cases}, \begin{cases} 1+7=8 \\ 9-4=5 \\ 2 \times 3=6 \end{cases}, \begin{cases} 1+7=8 \\ 9-5=4 \\ 2 \times 3=6 \end{cases}$$

(iii) 若 $2 \times 4 = 8$ → 剩下 1、3、5、6、7、9 → 無法分成兩組。

(3) 若要平衡，左右兩盤必須等重。

$$122 + 215 + 125 + 148 + 207 + 211 = 1028$$

$$121 + 136 + 103 + 160 + 201 + 175 = 896$$

$$(1028 - 896) \div 2 = 66 \rightarrow \text{找出左盤中兩數}$$

和比右盤兩數和

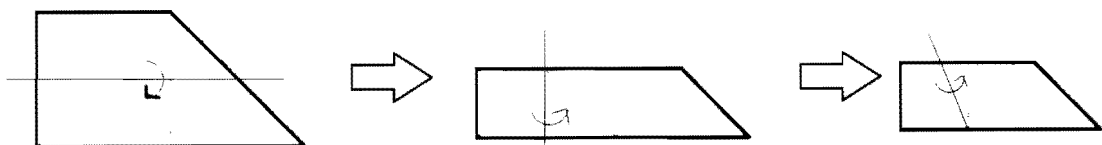
大 66 之四數

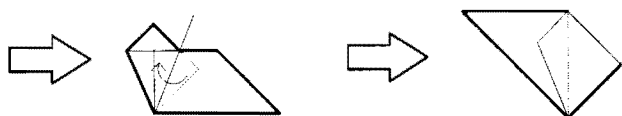
$$\text{由右表知：}(122 + 207) - (103 + 160) = 66$$

\therefore 將 122、207 與 103、160 對調即可平衡。

	122	215	125	148	207	211
121	1	94	4	27	86	90
136	-14	79	-11	12	71	75
103	19	112	22	45	104	108
160	-38	55	-35	-12	47	51
201	-79	14	-76	-53	6	10
175	-53	40	-50	-27	32	36

(4) 想像：





摺成如左圖後，從中間虛線剪開即可。

(5) 參考數學解題訓練第一期參考答案(1)

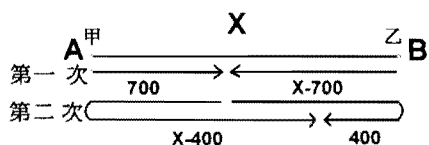
$$12345678987654321 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$$

$$= 111111111^2 \times 9^2 = (999999999)^2 \quad \therefore x = \pm 999999999$$

(6)

設兩地距離 x 公尺，出發後經過 t_1 秒第一次相遇，

又經過 t_2 秒第二次相遇



$$\text{甲的速率} = \frac{700}{t_1} = \frac{x - 700 + 400}{t_2} \rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{x - 300}{700}$$

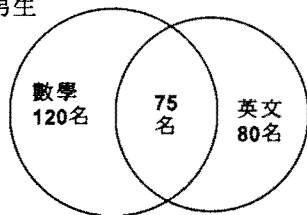
$$\text{乙的速率} = \frac{x - 700}{t_1} = \frac{700 + x - 400}{t_2} \rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{x + 300}{x - 700}$$

$$\therefore \frac{x - 300}{700} = \frac{x + 300}{x - 700} \quad \text{得 } x = 0 \text{ (不合) or } 1700$$

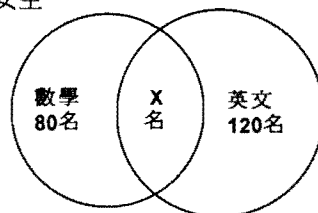
\therefore 兩地距離 1700 公尺

(7)

男生



女生



設女生兩科都參加的有 x 名。

$$(\text{男生}) 120 + 80 - 75 = 125$$

$$(\text{女生}) 260 - 125 = 135$$

$$120 + 80 - x = 135$$

$$x = 65$$

$$80 - 65 = 15$$

\therefore 參加數學競賽而沒有參加英文競賽的女生有 15 名

(8) 首先，張開眼睛沒有人舉手看到的帽子為「二花一黑」或「三花」

過了一會沒人說話，再過一會小林就猜出來了。

小林的想：從第一個結論：「"二花一黑" 或 "三花"」 \rightarrow 黑帽最多一頂

如果我戴黑帽，一定有人知道自己是花帽而立刻說出，但沒有人說話，所以我一定不是黑帽，因此我一定是戴花帽。

(9) 設吳姓住戶訂 x 種報紙 ($x \geq 1$)，"F 報" 有 y 家訂戶 ($y \leq 6$)

六戶人家訂的報紙總數 = 六種報紙訂戶總數

$$\therefore 2 + 2 + 4 + 3 + 5 + x = 1 + 4 + 2 + 2 + 2 + y \quad \text{得到 } y = x + 5$$

$$\because x \geq 1, y \leq 6 \quad \therefore x = 1 \text{ 時, } y = 6 \text{ 為唯一答案}$$

因此吳姓住戶訂 1 種報紙, "F 報" 有 6 家訂戶。

(10) (i) 1、2、2、3、4、6、9、……

觀察奇偶變化：奇、偶、偶、奇、偶、偶、奇、偶、偶、…… 三項一循環

$$1234 \div 3 = 411 \dots\dots 1$$

\therefore 第 1234 項與第 1 項同為奇數

(ii) 1、3、3、5、7、11、17、……

考慮個位數的變化： 1、3、3、5、7、

1、7、7、3、9、

1、9、9、7、5、

----- 1、5、5、9、3、----- \rightarrow 20 項一循環

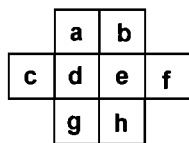
1、3、3、5、7、

$$100 \div 20 = 5 \dots\dots 0$$

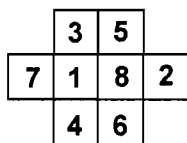
\therefore 第 100 項的個位數字與第 20 項的個位數字同為 3。

《解題訓練—第五期參考答案》

(1)



圖一



圖二

從左圖一中可以看出：與 d、e 相鄰的位置（含共頂點）各有六個，而與 1、8 不相鄰的數恰有六個，所以 d、e 中可分別填入 1、8，而與 1、8 相鄰的 2、7 就只能填入 c、f 中了。依此規則，我們便能輕易完成此表格（如左圖二）。

(2)

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	10	12
3	3	12	

(i) 左邊表格為乘法試算表，

觀察：“ 2×2 ” 應該等於“4”，結果表格中卻出現“10”，因此我們可以假設這些數可能為 4 進位。

(ii) 檢驗： $2 \times 3 = 6 \rightarrow 12$ （4 進位）

$3 \times 2 = 6 \rightarrow 12$ （4 進位），與表格相符，

因此最後一格應填入： $3 \times 3 = 9 \rightarrow 21$ （4 進位）

（4 進位：當數字遇到 4 時，就往前進一位，成為二位數）

(3) (i)

1		5
2	3	4

 (ii)

2		5
3	1	4

 (iii)

2	5	4
3		1

 (iv)

5	3	4
2		1

(v)

	5	3
2	1	4

 (vi)

2		5
1	4	3

 (a)

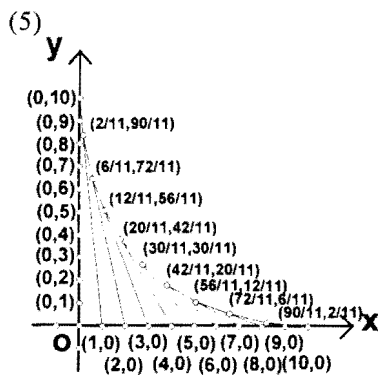
2		5
1	3	4

經由操作，最後得到(vi)的情況，發現後四格再怎麼轉，都不可能變成(a)的情況。

因此此題無解。

(4) 直接用天秤將 63 件物品一一比較其重量，依重量的大小順序排列，就可以知道每一件物品的重量了。

所以不需要砝碼即可將物品的重量秤出。



如左圖，網狀部分面積可以看成十個三角形面積，而這十個三角形的底恰好都是 1，因此只要算出頂點坐標，將 y 坐標相加除以 2 即可。

10 條直線方程式：

$$y = -10x + 10, y = -\frac{9}{2}x + 9, y = -\frac{8}{3}x + 8, y = -\frac{7}{4}x + 7,$$

$$y = -\frac{6}{5}x + 6, y = -\frac{5}{6}x + 5, y = -\frac{4}{7}x + 4, y = -\frac{3}{8}x + 3,$$

$$y = -\frac{2}{9}x + 2, y = -\frac{1}{10}x + 1$$

10 個頂點坐標： $(0, 10), (\frac{2}{11}, \frac{90}{11}), (\frac{6}{11}, \frac{72}{11}), (\frac{12}{11}, \frac{56}{11}), (\frac{20}{11}, \frac{42}{11}), (\frac{30}{11}, \frac{30}{11}),$
 $(\frac{42}{11}, \frac{20}{11}), (\frac{56}{11}, \frac{12}{11}), (\frac{72}{11}, \frac{6}{11}), (\frac{90}{11}, \frac{2}{11})$

$$\therefore \text{網狀面積} = \frac{1}{2} \times (10 + \frac{90}{11} + \frac{72}{11} + \frac{56}{11} + \frac{42}{11} + \frac{30}{11} + \frac{20}{11} + \frac{12}{11} + \frac{6}{11} + \frac{2}{11})$$

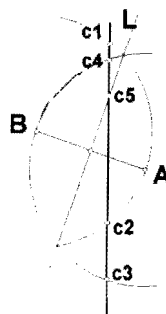
$$= 20$$

(6) 如右圖所示，以 B 為圓心， \overline{AB} 為半徑，得 $c1$ 、 $c2$

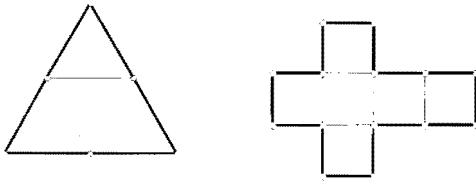
以 A 為圓心， \overline{AB} 為半徑，得 $c3$ 、 $c4$

作 AB 中垂線，得 $c5$

所以最多可以找到 5 個點。



(7)



在正四面體與正六面體的展開圖中發現下列規則：

(i) 連接線 3 條 → 因四個面有 3 個間隔；連接線 5 條 → 因六個面有 5 個間隔。

(ii) 周長 6 單位 → $4 \times 3 - 3 \times 2 = 6$ (三角形有 3 個邊，共有 4 個三角形，減去 2 倍的連接線)

周長 14 單位 → $6 \times 4 - 5 \times 2 = 14$

(iii) 黏合 3 次 → $6 \div 2 = 3$ (因為兩個邊黏 1 次，將周長除以 2 即為黏合次數)

黏合 7 次 → $14 \div 2 = 7$

∴ [正十二面體]：連接線 → $12 - 1 = 11$ (條)，周長 → $12 \times 5 - 11 \times 2 = 38$ (單位)

黏合 → $38 \div 2 = 19$ (次)

[正二十面體]：連接線 → $20 - 1 = 19$ (條)，周長 → $20 \times 3 - 19 \times 2 = 22$ (單位)

黏合 → $22 \div 2 = 11$ (次)

(8) ∴ C 說：「如果把你們兩個心中想的數字相乘，所得到的積不是 8 就是 16。」

→ A、B 兩位數學家心中的數可能為：1、2、4、8、16

A 說：「我不知道你的數。」 → A 不是 16

B 說：「我也不知道你的數。」 → B 不是 1、16

A 說：「請你給我一點提示。」 → A 不是 1、8

B 說：「不，請你給我一點提示。」 → B 不是 2、8

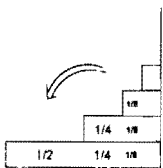
∴ B 數學家心中所想的數為 4。(A 數學家所想的數可能為 2 或 4)

(9) 從機率的角度來看，剛開始三張牌的機率都是 $\frac{1}{3}$ ，當阿亮將其中一張「銘謝惠顧」給 JACKY

吳看的時候，這張牌中獎的機會已經變成 0，而剩下兩張牌的全機率還是 1，也就是說剩

餘兩張牌的機率都變成了 $\frac{1}{2}$ ，機會還是一樣，所以說換或不換都一樣的。

(10)



$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	

由左圖的變化可以發現：

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots = 2$$