第五章《測圓海鏡分類釋術》與《測圓海鏡》的比較分析

《測圓海鏡分類釋術》是顧應祥依據《測圓海鏡》所寫成的，而其內容及重點所在之處，是否與原書相同，顧應祥爲何將《測圓海鏡》重新編排，編排後是否更能幫助讀者瞭解，這是本章將兩書作比較的原因所在。在比較前須先瞭解《測圓海鏡》一書，故本章先介紹《測圓海鏡》，再比較兩書之異同及其優勢所在之處。

第一節　李冶與《測圓海鏡》

李冶是金、元之際著名的數學家，[1]字仁卿，號敬齋，祖籍真定府欒城(今河北欒城)人。金明昌三年(1192)生于大興(今北京)，元至元十六年（1279）卒于河北元氏。李冶的父親李遹是位博學多才的學者，曾在大興府尹胡沙虎手下任推官。李冶原名治后改爲冶。改名的原因，大概是爲了避免與唐高宗同名。[2]

李冶認爲，學問比財富更可貴。他說「積財十萬，不如薄技在身。」又說：「金壁雖重寶，費用難貯蓄。學問藏之身，身在即有餘。」[3]李冶在青少年時期，對文學、史學、數學、經學都感興趣，曾與好友元好問（1190~1257）外出求學，拜文學家趙秉文（1159~1232）、楊雲翼（11701228）爲師，受益匪淺。楊雲翼不僅精於文學，而且通曆算，曾在司天台任職，並有數學著作。李冶在他的門下，受到不少的數學教育。[4]正大七年(1230)，李冶在洛陽考中詞賦科進士。同年得鈞州(今河南禹縣)知事官職。李冶爲官清廉，一絲不苟。開興元年（1232）正月，蒙古軍隊攻破鈞州。李冶不願投降，只好北渡黃河避難，期間，李冶四處流浪，生活貧困，也因此結識各地學者。

[1] 有關於李冶生平事蹟，主要是參考以下書籍：孔國平，《李冶朱世杰與金元數學》，收錄於王渝生、劉鈍所主編的《中國數學史大系》(石家莊，河北科學技術出版社，2000)，頁 36~61。孔國平，《測圓海鏡導讀》(湖北，湖北教育出版社，1995)，頁 3~6。洪萬生，〈十三世紀中國數學家李冶〉，《孔子與數學》(台北市，明文，民 88) 頁 251~256。
[2] 轉引自孔國平，〈李冶生平〉，《測圓海鏡導讀》，頁 3~6。
[3] 轉引自注 3，頁 39。
[4] 參考孔國平，《李冶朱世杰與金元數學》頁 41~42。

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

李冶北渡黃河之後，便流落於山西忻縣、淳縣之間，過著『飢寒不能自存』的生活。[5]根據藪內清的研究，「李冶在山西流浪之時，受到當地出現的數學之影響。金元之際，習算之人主要集中在山西南部汾河流域地區。其中平水是金朝時代出版最盛行的地方，平陽是元代道藏刊行的地方。天元術產生之處，可以說在汾河流域。」[6]此外，山西在當時也是全真道觀數目僅次於陝西、河北與河南的地方，因此，李冶在流浪時寄寓道觀，是即有可能的。之後他放棄功名、仕途的意念，全力進行科學研究。與他年代相近的硯堅說他是：「世間書凡所經見，靡不洞究，至於薄物細故，亦不遺焉。」[7]

大約在 1240 年，他得到洞淵的一部算書，內有九容之說，主要講的是勾股容圓的問題。因此，李冶把主要的精力放在數學研究上。經過多年的努力，他對勾股容圓的問題，進行了有系統的整理，並以「天元術」來解答容圓的問題，並且在 1248 年完成了中算史上，非常重要的著作《測圓海鏡》。他在自序中提到，他的算學生涯中，曾出現許多的疑難。得到洞淵九容之說之後，「日夕玩繹」，經過長時間的浸淫後，「向之病我者，使爆然落去而無遺餘」。[8]

1251 年，他結束流浪生活，如願回到元氏縣外封龍山下隱居教學，開始授徒講學。他不僅講解儒家經典，文學知識等，數學也是重要的部分。爲了教學上的需要，他又繼續著手編寫了一本普及天元術的著作，於是有了《益古演段》之作。它是根據北宋蔣周的《益古集》「再爲移補條段，細皤圖式」而成。「演」是推演的意思，「段」是條段的簡稱。李冶在序言中說：「使粗知十、百者，便得入室啗其文，顧不快哉！」[9]這清楚的說明了這本書，他的寫作目的，就是讓稍有數學知識的人能夠看懂此書，並且掌握天元術的要領他治算的從容自得溢於言表之情，是無庸置疑的。自序中也提到：

---

[5] 轉引自孔國平，《李冶朱世杰與金元數學》，頁 43

[6] 轉引自洪萬生，〈全真教與金元數學—以李冶（1192~1279）爲例〉，收入王秋桂主編，《金庸小說國際學術研討會論文集》（台北：遠流出版社，1998），頁 67~83。

[7] 李冶，〈益古演段硯堅序〉，《益古演段》。

[8] 李冶，〈測圓海鏡自序〉，《測圓海鏡》。

[9] 李冶，〈益古演段自序〉，《益古演段》。

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

今之為算者未必有劉（徽）、李（淳風）之工，而偏心跼見不肯曉然世人，惟務隱互錯糅，故為溟悻黯甚，惟恐學者窺其彷彿也。不然則又以淺近犄俗無足觀者，致使軒轅隸首之術，三五錯綜之妙，盡墮於市井沾沾之兒及夫荒郊下里蚩蚩之民，殊可憫悼。

從這本書，我們也可以瞭解到他治算的理念。

在講學之餘，他與元好問、張德輝過從甚密，常一起遊封龍山，時人因稱之爲『龍山三老』。[10]由於張德輝曾在真定史氏家族手下爲官，得忽必烈的信任，派任真定學校，遂受託舉荐漢人學者，因此，元好問、李冶先後應召與忽必烈會面。[11]李冶提出了一些開明的政治建議，並強調：「爲治之道，不過立法度、正紀綱而已。紀綱者，上下相維持；法度者，賞罰示懲勸。」[12]

1261年，忽必烈聘他作翰林學士知制誥同修國史，但李冶以老病婉拒。1265年，忽必烈再召他出任同一官職，他不得已勉強就職，但一年後他又以老病辭，理由是「翰林非病叟所處，寵祿非庸夫所食。官謗可畏，幸而得請投跡故山。」[13]其實，真正的原因是他後來透露的：

翰林視草，惟天子命之；史館秉筆，以宰相監之。特書佐之流，有司之事耳，非作者所敢自專而非非是是也。今者猶以翰林史館為高選，是工諛譽而善緣勢者為高選也。我恐議者羞之。[14]

這種隱而不仕的態度，與他的學術事業應該是極有關係的。大概在晚年時，李冶研究數學頗有自信，儘管在完成《測圓海鏡》之後，他面對理學家對『九九賤技』的鄙視，不無自我解嘲的心情：「覽吾之編，察吾苦心，其憫我者當百數，其笑我者當千數，乃若吾之所得，則自得焉耳，寧復為人憫笑計哉？」[15]

---

[10] 洪萬生，〈十三世紀的中國數學中心〉，《孔子與數學》，頁 171。
[11] 轉引自洪萬生，〈全真教與金元數學—以李冶〈1192~1279〉爲例〉。
[12] 轉引自孔國平，〈李冶生平〉，《測圓海鏡導讀》，頁 3~6。
[13] 同注 12，頁 76。
[14] 同注 13，頁 76
[15] 李冶，〈測圓海鏡序〉，《測圓海鏡》

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

《測圓海鏡》是目前流傳下來，最早討論天元術的著作，是李冶經過多年努力，對「勾股容圓」的問題，進行了有系統的整理之後，而以「天元術」爲手段來解答容圓的問題。《測圓海鏡》總共十二卷，第一卷爲全書容圓問題的理論基礎，之後各卷爲問題的計算。第一卷的開始是「圓城圖式」，之後是「總率名號」、「今問正數」，列出了十五個勾股形的定義以及這些勾股形的和較數值。第一卷中最重要的就是「識別雜記」，闡明了各個勾股形的邊長與容圓徑之間的關係。「識別雜記」共分成「諸雜名目」、「五和五較」、「諸弦」、「大小差」、「諸差」、「諸率互見」、「四位相套」、「拾遺」等項目，總共有六百多條，每一條都可以視爲一個幾何定理或幾何公式。可以說是中算史上「勾股容圓」問題的集大成。

在「識別雜記」中的「諸雜名目」項下的最後十條，可說是全書的最基本的公式。假設容圓的直徑爲 R，半徑爲 r，各勾股形的勾、股、弦分別爲 a、b、c。[16]茲整理這些式子如下：

1、大小差相乘爲半段徑冪。$\frac{R^2}{2}=b_8\times a_9$

2、大差勾小差股相乘爲半段徑冪。$\frac{R^2}{2}=a_8\times b_9$

3、虛勾乘大股得半段徑冪。$\frac{R^2}{2}=a_{11}\times b_1$

4、虛股乘大勾得半段徑冪。$\frac{R^2}{2}=b_{11}\times a_1$

5、邊股叀股相乘得得半徑冪。$r^2=b_2\times a_{13}$

6、明勾底勾相乘得半徑冪。$r^2=a_{12}\times a_3$

7、黃廣股黃長勾相乘爲徑冪。$R^2=b_4\times a_5$

8、高股平勾相乘得半徑冪。$r^2=b_6\times a_7$

9、明弦明股并與叀弦叀勾并，相乘得半徑冪。$r^2=(c_{12}+b_{12})\times(c_{13}+a_{13})$

10、明弦明勾并與叀弦叀股并，相乘得半徑冪。$r^2=(c_{12}+a_{12})\times(c_{13}+b_{13})$

[16] 各個邊長的足碼，參照文論本第三章第二節〈《測圓海鏡分類釋術》的內容介紹〉之中的說明。

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

這些式子在解決求容圓問題上，是非常重要的，李冶就直接或間接的透過這些式子，來建立天元式。李冶在解題的中心思想，應該是勾股容圓的知識，如何運用「識別雜記」中的資料，透過設「天元一」作為未知數，根據問題的已知條件，列出兩個相等的多項式，經相減後，得出一個高次方程。

《測圓海鏡》第二卷到第十二卷是算題。第二卷中的題目都是容圓的基本類型，所以李冶稱之為「正率」，其中包含十種容圓公式，本卷總共十四題，最後一題開始引入天元術，目的是為後面各卷來做示範。

從卷三開始，李冶按照已知的條件來做分類，但是解題多半使用天元術來求解。卷三討論的是「邊股一十七問」、卷四討論的是「底勾一十七問」、之後分別是「大股一十八問」、「大勾一十八問」、「明　前一十八問」,[17]「明　後一十八問」、[18]「大斜四問」、「三事和八問」、「雜　一十八問」、[19]「之分一十四問」。[20]

「天元」一詞，在秦九韶《數書九章》裡已使用過，但沒有未知數的意思，天元一便是單位一。而在李冶的《測圓海鏡》中，天元一相當於現在的未知數 X。書中的方程是用天元式表示的，所用數碼則是古代算籌形象的反映。[21]

天元式實際起源于籌算開方式，兩者形式類似，只是開方式未標明未知數。天元式的表示法最初很繁。到李冶時代，天元式已經簡化了，有古法圖式和今法圖式兩種。都把「太」放在中間，表常數項。按古法圖式，天元在上地元在下，以天元代表未知數的正一次冪，天上一層則高一次，以地元代表未知數的負一次冪，地下一層則低一次。今法圖式的順序與之相反。這種用兩個字表示正、負數次冪的方法，顯然比早期各次冪都用不同字表示的方法簡便。[22]

在《測圓海鏡》中，李冶進一步簡化了天元式，他取消地元，只在常數項

[17] 以明勾股形及　勾股形的邊長為已知條件。
[18] 以明勾股形或　勾股形的邊長為一個已知條件，其他不限。
[19] 是綜合題，題型多變化，難度甚高，展現了李冶對這些作法的自在。
[20] 分數運算。
[21] 轉引自孔國平，《測圓海鏡導讀》，頁 8。
[22] 轉引自上注，頁 9~10。

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

旁標以「太」字，或在未知數一次項旁標以「元」字，其他冪次按位置值制給出。[23]只用一個天元，採用正數次冪在上、負數次冪在下，次數由高到低排列的順序。李冶的天元式，在書中所扮演的是列方程的程序，可以分成：首先立天元一，再透過「識別雜記」尋找兩個同義且至少有一個包含天元的式子，再把兩個式子連結爲方程，通過「相消」化成一般的方程式。而所謂的「相消」，類似於現代數學中的移項及合併同類項，他的方式是直接消去兩個等值的同類項。

李冶爲了敘述的方便，在列方程的過程中，給了方程各項係數不同的名稱：常數項稱爲「實」，一次項的係數叫做「從」、「方」、「從方」，最高次項的係數稱爲「隅」、「法」、「隅法」，中間各項稱爲「廉」。例如下列的方程：

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

其中 f 稱爲實，e 稱爲從，d 稱爲一廉，c 叫做二廉，b 叫做三廉，a 就是隅。如果這些係數是負數，就在前面加上「益」、「虛」或者「減」等字來表示。[24]

第二節　《測圓海鏡分類釋術》與《測圓海鏡》的比較分析

《測圓海鏡分類釋術》是顧應祥依據李冶的《測圓海鏡》所寫成的，所以就其內容之異同比較分析：

一、「圓城圖式」相同；「總率名號」均爲十五種勾股形的定義，但順序有些許不同；《測圓海鏡分類釋術》的「勾股步率」與《測圓海鏡》的「今問正數」都是十五種勾股形的三邊和較數值，亦只是順序不同而已。

《測圓海鏡》的「識別雜記」，顧應祥的《測圓海鏡分類釋術》則完全沒有留下，而導致讀者無法得知其方程式如何取得，他運用幾何的方法來做推導方程的手段，也遭遇了難題，譬如方程的各項係數之間，就很難找到相對應的幾何解釋，帶給人們理解的不便。

---

23 郭書春，〈《中國科學技術典籍通匯》，數學卷敘〉，《中國科學技術典籍通匯。數學卷》頁 17。
24 王連發，《勾股算學家—明顧應祥及其著作研究》(台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班論文，2002 年)頁 89-96。

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

唐順之在給顧應祥的書信中提到：「竊觀明公演出測圓海鏡書，自非明公細心絕識、洞灼神明之奧，則不能剖破此混沌也，敬服、敬服。然鄙見竊以為此書形下之數太詳，而形上之義或略，使觀之者尚不免有數可陳而義難知，及示人以鴛鴦枕而不度與人以金針之疑，僕意欲明公於緊要處提掇一二，作法源頭出來，使後世為數學者，識其大者，得其義；識其小者，得其數。則此書尤更覺精采耳，何如何如。」[25]

由此可知，如唐順之這樣的數學家而言，都有相當大的難度，更何況一般初學數學的人，所以將「識別雜記」刪除是顧應祥的一大敗筆。

二、就體例而言，《測圓海鏡》將一個題目分爲「或問」、「答曰」、「法曰」及「草曰」，其中「或問」爲題目，「答曰」即爲答案，「法曰」爲解題方法，「草曰」詳細說明天元方程式的列出方法。《測圓海鏡分類釋術》則將一個題目除問題外，分爲「答曰」、「釋曰」及「術曰」，因爲所有題目的答均相同，所以「答曰」在一百七十二題中，只出現一次，「釋曰」則解釋此題中的已知條件是十五種勾股形的哪一邊，「術曰」詳細說明此題的解題方法。

《測圓海鏡》在「草曰」中詳細的說明天元方程式的形成，但未交代如何解出天元方程式，不知李冶是認爲解方程式很容易可當已知，或是其重點不在解方程式，而是解決「勾股容圓」的問題，這我們就不得而知了。《測圓海鏡分類釋術》在「術曰」中詳細列出解開方法的過程，但卻未說明方程式的各項係數和幾何的關係，其重點放在解方程式，這可以從書中的三十六種開方法可以看出。相較之下，兩書的重點有所不同，但卻可以截長補短，將《測圓海鏡分類釋術》的「術曰」，接續在《測圓海鏡》的「草曰」之後，則可爲解題做一個結束，雖然顧應祥的開方法，比不上「增乘開方法」，但仍是解天元方程式的方法之一。

---

[25] 引自唐順之，〈與顧箬溪〉，《荊川文集》卷七，頁 20~21。

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

三、就分類來說，《測圓海鏡》的分類而言，是非常的明確清晰。各卷的主題非常的清楚易懂，第三卷討論的主題是「邊股」，接下來分別是「底勾」、「大股」、「大勾」、「明叀前」、「明叀後」、「大斜」、「三事和」、「雜糅」、「之分」等等，照著各卷的主題，其實很容易知道各個題目分在哪一卷。從這個角度來看，《測圓海鏡》的分類是非常好的。

而顧應祥所取的書名是「分類釋術」，也就是說，分類是顧應祥做此書的非常重要的精神所在。《測圓海鏡》的第二卷與《測圓海鏡分類釋術》的第一卷，討論的都是十種容圓公式，接下來，在《測圓海鏡分類釋術》中就有比較大幅度的變動，而他的方式，可以說是從勾股計算的角度來出發，兩勾、兩股、兩弦。下來就是從勾、股、弦三者中選取兩個來做運算，這裡總共有三卷。之後，再加入和與較的類型，先從加入一個的和或較，再來是兩者均爲和較，這裡包含了六、七、八、九卷。最後的一卷，是綜合題型，屬於比較難的部分，雖然題目類型的由淺入深，由簡到繁，是很好的安排，但不代表內容也可以是如此。從開方法的類型中，可以知道前後的難易是沒有適當安排的。

四、題目的編排來看，如上所述，《測圓海鏡分類釋術》是從題型由淺入繁而將《測圓海鏡》重新編排，但其中顧應祥未注意到《測圓海鏡》編排題目中的巧妙之處，其中隱藏了許多數學上非常有價值的對稱觀念。我們將《測圓海鏡》的第三、四卷列表下來，作比較分析。

卷別 題號	第三卷		第四卷	
	題目條件	天元方程式	題目條件	天元方程式
1	b_2，c_3	$x^2=4b_2(c_3-b_2)$	a_6，c_{10}	$x^2=4a_6(c_{10}-a_6)$
2	b_2，a_{13}	$-x^2-a_{13}x+2b_2a_{13}=0$	a_6，b_4	$-x^2-b_4x+2a_6b_4=0$
3	b_2，b_{13}	$-x^2-b_2x+b_2b_{13}=0$	a_6，a_4	$-x^2-a_6x+a_6a_4=0$
4	b_2，a_{14}	$-x^3-a_{14}x^2+4b_2a_{14}=0$	a_6，b_9	$-x^3-b_9x^2+4a_6b_9=0$
5	b_2，a_9	$x^3-(b_2-2a_9)x^2+a_9^2x+a_9^2b_2=0$	a_6，b_{14}	$x^3-(a_6-2b_{14})x^2+b_{14}^2x+b_{14}^2a_6=0$
6	b_2，c_4	$x^2-(2b_2-c_4)x+b_2(c_4-b_2)=0$	a_6，c_{13}	$x^2-(2a_6-c_{13})x+a_6(c_{13}-a_6)=0$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

7	b_2，c_2	$-\frac{1}{2}(b_2+c_2)x^2+\frac{1}{2}b_2(c_2-b_2)=0$	a_6，c_6	$\frac{1}{2}(a_6+c_6)x^2+\frac{1}{2}a_6(c_6-a_6)=0$
8	b_2，c_1	$-2x^2-2c_1x+2c_1(c_1-b_2)=0$	a_6，c_1	$-2x^2-2c_1x+2c_1(c_1-a_6)=0$
9	b_2，c_5	$-2x^2+2b_2(2c_5-b_2)=0$	a_6，c_{15}	$-2x^2+2a_6(2c_{15}-a_6)=0$
10	b_2，b_9	$x^2-2b_2x+(b_2-b_9)^2-b_9^2=0$	a_6，a_{14}	$x^2-2a_6x+(a_6-a_{14})^2-a_{14}^2=0$
11	b_2，a_4	$-[b_2a_4+a_4(b_2-a_4)]x^2+b_2a_4^2=0$	a_6，b_{13}	$-[a_6b_{13}+b_{13}(a_6-b_{13})]x^2+a_6b_{13}^2=0$
12	b_2，c_{14}	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(b_2+c_{14})x+\frac{1}{2}b_2c_{14}=0$	a_6，c_9	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(a_6+c_9)x+\frac{1}{2}a_6c_9=0$
13	b_2，c_9	$x^4-2(b_2-c_9)x^3+(b_2-c_9)^2x^2+2b_2c_9x-b_2c_9^2(b_2-2c_9)=0$	a_6，c_{14}	$x^4-2(a_6-c_{14})x^3+(a_6-c_{14})^2x^2+2a_6c_{14}x-a_6c_{14}^2(a_6-2c_{14})=0$
14	b_2，c_8	$-x^2+b_2(2c_8-b_2)=0$	a_6，c_{11}	$-x^2+a_6(2c_{11}-a_6)=0$
15	b_2，c_{11}	$-x^3-c_{11}x^2-b_2^2x+b_2c_{11}=0$	a_6，c_8	$-x^3-c_8x^2-a_6^2x+a_6c_8=0$
16	b_2，a_9+c_9	$\frac{1}{2}(b_2+a_9+c_9)x+[b_2-(a_9+c_9)]^2-\frac{1}{2}[b_2-(a_9+c_9)][b_2-(a_9+c_9)+b_2]=0$	a_6，$a_{14}+c_{14}$	$\frac{1}{2}(a_6+a_{14}+c_{14})x+[a_6-(a_{14}+c_{14})]^2-\frac{1}{2}[a_6-(a_{14}+c_{14})][a_6-(a_{14}+c_{14})+a_6]=0$
17	b_2，$a_{14}+c_{14}$	$3x^2-\{6\times[b_2-\frac{1}{2}(b_2+a_{14}+c_{14})]+\frac{1}{2}b_2+3(a_{14}+c_{14})\}x+2[b_2-\frac{1}{2}(b_2+a_{14}+c_{14})]^2-(a_{14}+c_{14})\times\frac{1}{2}\times(b_2+a_{14}+c_{14})=0$	a_6，a_9+c_9	$3x^2-\{6\times[a_6-\frac{1}{2}(a_6+a_9+c_9)]+\frac{1}{2}a_6+3(a_9+c_9)\}x+2[a_6-\frac{1}{2}(a_6+a_9+c_9)]^2-(a_9+c_9)\times\frac{1}{2}\times(a_6+a_9+c_9)=0$

在「容圓圖式」中，只要透過勾、股的互換，可以發現這些勾股形的本身，存在有對稱關係。因此這兩卷的題目之間，也具備有這種關係。這就是說，卷三的第 n 題和卷四的第 n 題的已知條件形成對偶；同樣，第五卷與第六卷也有相同的情形。

雖然顧應祥在《分類釋術》中，忽略了這個重要的關係。幸好，他在《測圓算術》裡面，已經發現這種對稱性質了。

五、題目的增減，在本文第三章已有說明顧應祥在《測圓海鏡分類釋術》中，自行增加了七題，分別是卷一第六題、卷六第一、二、六、七、十一、十二題，爲的是讓讀者能夠先熟悉這些基本的運算。而未收錄的有五題，分

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

別是：

1.或問邊股四百八十步，高弦二百五十五步，問答同前。(卷三第十四題)

2.或問底勾二百步，平弦一百三十六步，問答同前。(卷四第十四題)

3.或問皇極大小差共一百八十七步，明黃叀黃共六十六步，問答同前。(卷八第三題)

4.或問依前三事和，又云明黃叀黃共六十六，問答同前。(卷十第六題)

5.或問小差黃方面少於大差黃方面八十四步，太虛黃方面少於皇極黃方面六十六步，問答同前。(卷十一第十二題)

前二題因為是重複，所以未再收錄，而後三題為何不收錄則不得而知了。

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com