# 淺談 HPM 學習工作單之設計

蘇意雯

台北市立成功高中

## 本文摘要

本文內容主要在於介紹數學史融入數學教學的理念，為數學教師提供另一種教學素材及授課方式。首先作者說明什麼是 HPM，以及 HPM 學習工作單的意義。接著並以高一教材為範疇，設計海龍公式學習工作單，除了分析此份 HPM 學習工作單之設計理念及施行成果外，最後也對有心想要從事 HPM 教學的現場教師，提出「閱讀」和「實作」的方法及建議。

關鍵字：HPM、HPM 學習工作單、海龍公式。

## 壹、 什麼是 HPM

在數學教學上輔以歷史取向，自從 1970 年代初創立的數學史與數學教學的關聯之國際研究群（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics, HPM），就是以此為首要目標。如何讓數學史可以在數學的「教學」和「學習」中，扮演更有效的角色，是有心從事 HPM 教學的教師相當關心的課題。

有關為何要把歷史維度融入數學課程的原因，國內外學者均提出很多的看法。例如 Furinghetti 和 Paola（2003），認為在課堂上融入歷史可能達到的兩個取向：第一是「歷史主要功能在於激發學生在數學上的興趣」，此處的歷史含括了問題的出處、軼事和插圖的出處、趣聞的來源等。第二個取向是「整合歷史進入數學教學，就是以數學為主體，安排實行的課程，探討教育的議題、數學的脈絡，從一個新的觀點以及佈置一個新的工作環境，以幫助達成數學的目標。」因此，這兩位作者設計了一片光碟，其中包含了以教授機率單元為例，在歷史的鋪陳上，安排各數學家們對賭金分配問題的解法，藉著比較不同解法，以澄清學生的觀念，希望能對有心想使用數學史融入數學教學的教師作一參照。

除了上述融入數學史於數學教學的原因之外，Barbin (2000)也提出了她的見解。她認為在數學教學中融入歷史維度最常見的兩個理由是：1.對於「數學究竟為何？」的觀點，數學史提供了我們另一種思考的機會。2.數學史讓我們對於概念和理論有更好的瞭解。同樣的結論，也出現在 Iris Gulikers 和 Klaske Blom (2001) 針對 160 篇在幾何領域運用歷史的分析，認為主要可分為概念性、多元文化及引起動機三大範疇。而 Tzanakis 和 Arcavi 等人（2000）也提出支持數學史可以幫助數學教學的五大立論：1.幫助數學學習；2.對於數學本質和數學活動的發展，可有另一個觀點；3.提升教師自己教學知識；4.讓教師能喜好數學；5.視數學為一項文化成果的珍視。至於 Grugnetti (2000)則認為數學史在教學上的影響有如下三點：1.使用古文本上的問題，讓學生比較現行策略與原始文獻之異同。2.以歷史建構數學的技能和概念。3.經由歷史的分析，讓教師了解為何某一特定概念對於學生造成困難。

綜括上述的說明，以數學史融入數學教學所能達成的目標，可以涵蓋三個範疇，那就是情意、認知及文化活動。那麼實際上，數學史在各國現行的國家課程綱領中，又扮演什麼樣的角色呢？Fasanelli（2000）分析了十六個國家的現行策略，筆者依情意、認知、文化等層面的內容整理如下：

・情意（中國、希臘、義大利、荷蘭、波蘭）：

引發學習動機。

激起學習興趣。

藉由數學家傳記啟發學生人格成長。

・認知（澳洲）：

幫助學生經由歷史脈絡，了解數學概念發展。

藉由文本讓學生比較不同解題方法或思考方向，解放對數學的單一思考方式。

・文化活動（巴西、丹麥、法國、紐西蘭、挪威、美國）：

經由認識各民族各具特色之數學發展，珍視數學文化性，達成有意義的學習。

由此可知，在此三種層面上，上述各國於認知方面的開發較為不足，也就是在數學邏輯與數學史上的連結有所欠缺。事實上，妥適運用數學史，可以讓學生體會到數學不僅是由一系列直線排序進行的章節所組成，也能瞭解現代數學符號發展過程的精簡和威力。對於曾實施過數學史融入數學教學的教師，在引入數學

史所能達到引起學生動機、幫助提昇學習興趣的功能上，相信都可有所體會（洪萬生, 2001）。但是，如前所述，要運用歷史以追求特定的數學教學目標時，教師就需要在歷史以及教育的領域上下功夫，顧及學生的認知層面，設計出合適的教學序列，這也是比較困難的部分。誠如 Furinghetti 和 Paola （2003）所說：「提供給老師現成的教學序列，讓教師馬上可以實行，這樣固然方便，可是最好的方法，還是創造一個可讓教師自由發揮的環境。」因為「神而明之，還在於人」，只有自己親手設計、實作，才能得到最好的教學效果，這也是有心嘗試融入數學史於數學教學的教師所要努力的目標。

## 貳、HPM 學習工作單的設計

那麼對於一位想要實施 HPM 教學的教師，究竟必須從何著手呢？在筆者所進行之以 HPM 為進路，探討數學教師專業發展的研究，結果顯示「利用製作 HPM 的學習工作單，引動教師融入數學史於數學教學」，是相當重要的一個策略。所謂的「學習工作單」(worksheet, workcard) 主要可以分成兩類：

1.由一組作業構成的「工作單」，目的是幫助學生精熟在教室中所習得的某一解法過程，或強化某一單元。使用場所可以是教室，也可以是家庭。

2. 由一組有結構、有引導性的問題所成，目的是用以引進一個新單元、一組問題或一些議題以供討論。這種設計通常會考慮學生的先備知識，並且以循序漸進詢問的方式，而引向先前未學習的基本知識之發展。這些工作單通常用在教室中、其操作形式是學生分成若干小組，而教師的角色則是顧問與指導。正因為如此，所以，在教師教育課程中，這種工作單也常被引用。(Fauvel & van Maanen, 2000, p. 216)

在本文中，筆者所指的學習工作單主要針對第二類。在製作 HPM 學習工作單之初，教師必須謹記在心的是，HPM 的精神是在於幫助教師「教數學」，而不是數學史。因此，我們認為在學習工作單上要考量數學知識的邏輯、歷史以及學生認知三個面向。所謂的邏輯面向，代表課程單元的教學目標，以及此單元在教科書中的編排方式，和教師手冊中相關的說明。有關歷史的面向上，就是包含數學史的範疇：(A)數學家傳記：例如高斯傳。(B) 數學思想上的重要發展：例如複數系的產生。(C) 著名定理的來源剖析：例如費馬最後定理。(D) 證明與解題的思維。(E) 文本的呈現。(F) 科普書籍介紹等等，不管是原始典籍，或第二手

文獻等等，都列入此一範疇。

至於對於學生認知的面向，則是從數學教育研究論文中，搜尋有關學生的認知發展方面的成果，以及此單元學習障礙的具體案例，或從教師本身的教學經驗及同儕間的交流討論去發掘學生的問題，也從國內或國外 HPM 方面的相關研究著手。在針對這三個面向設計學習工作單的過程中，教師首先體會教科書編者、課程標準與教科書內容，以及古代數學家、數學物元、數學理論之精神，再經過自我詮釋之後，考量學生的學習需求，然後從事學習工作單的編製，最後再進行課堂實作。此類涵蓋數學知識的邏輯、歷史、學生認知三面向的 HPM 學習工作單，連結了教師對於 HPM 理論的了解與實作，而藉由學習工作單的實施，也可以獲得學生對於教學的回饋。在了解了 HPM 學習工作單之意含及製作方式後，接下來，我們以海龍公式[1]為例，看看對於此單元如何設計出 HPM 學習工作單。

## 參、HPM 學習工作單－海龍公式

筆者之所以選擇海龍公式設計學習工作單，主要是因為在講授課本的海龍公式時，雖然教師手冊的參考資料中附有海龍公式的幾何證法，但在課文中，只是簡略以「海龍公式的幾何證法不在此處討論」帶過，就直接以三角形面積為 $\frac{1}{2}ab\times\sin C$ ，再以 $\sin C=\sqrt{1-\cos C^2}$ ，而 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 代入，得出海龍的三角形面積公式 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（$a,b,c$ 為三角形之三邊長，$s$ 為周長之半）。筆者認為這可能是由於教科書編者考量此證法太過迂迴曲折，另一方面，教科書編者把海龍公式擺在此處的目的是為了讓學生更進一步熟稔三角形面積公式及餘弦定理，因為教師手冊於 2-3 正弦定律與餘弦定律一節裡，在教學方法與注意事項中提到「為了將面積公式作一完整的介紹，可先介紹正餘弦定律，因為海龍公式的證明必須借助於餘弦定律。」(龍騰版教學手冊, p.51)。這樣的證法雖然簡潔，可是，由於課本對海龍公式幾何證法的簡短敘述，常讓學生興起想一窺究竟的好奇，另一方面，原始的證明論證非常基本，僅使用平面幾何上簡單的要素，卻能將這些基本元素組成豐潤而典雅的證明，這種極端迂迴、驚人且富原創性的

[1] 在一篇海龍死後數世紀的阿拉伯古手稿中，回教學者 Abu'l Raihan Muh. al-Biruni 認為這個結果並不是海龍的創作，而是出自聲名顯赫的阿基米德之手。但目前並沒有阿基米德的原始著作來支持這種看法。(Dunham, 1996)

論證，可列為初等幾何中最高明的證明之一（Dunham, 1996）。因此，筆者有了編製此學習工作單的構想。一方面是為了把課本提及海龍的「幾何證法」，做一個交代，另一方面，是為通常成為學生夢魘的三角單元，增添人文的面向，希望在適當的地方，引進古人原始的想法，讓數學思想的發展與學生的學習過程上，能有更貼近的年合，增加學生的學習興趣。

於是，筆者在海龍公式的教授上，一改以前只是講講海龍的生平、著作，並把課本的公式導一遍讓學生了解的方式，而是利用學習工作單，把原始幾何證法忠實的呈現在學生眼前。另外筆者也安排了在中國歷史上等價於海龍公式的秦九韶三斜求積公式，讓學生對於數學解法與概念的今昔有所對照。

在工作單的佈置上，筆者所採取的想法是：「海龍的原始想法僅用到相當基本的平面幾何知識，就可以得出所求結果，因此只要學生肯花下時間研究，加上教師提示，應可做為教學上一可行之啟蒙例。至於三斜求積公式，可讓同學自行導出，貼近文本，增加參與數學活動的機會。」當時安排兩者並列的用意，是雖然海龍公式與之後秦九韶的三斜求積公式，都能解決已知三邊長，求三角形面積的問題，但乍看之下，兩者所呈現的數學形式卻不相同，筆者希望在問題與討論中，讓學生自行由三斜求積公式導出海龍公式，讓他們明白事實上此二公式有等價的意義，達到教學的效果。因此，整份工作單在數學邏輯知識上的考量是以原始的證法讓學生重新認識海龍公式。至於輔以中西的數學史料，是要讓學生藉由同一公式比較中西數學文化的差異。因為就教科書編者而言，在此處的海龍公式證明是如前所述，為了讓學生更嫻熟三角形面積公式和餘弦定理的運用而來。可是跨越時空，就當時的數學家而言，是為了解決實際狀況－「不進入一塊地而能測知其面積」，以初等平面幾何知識所解決的問題。恰當地連接兩者，使學生皆有所得，是筆者設計此單元學習工作單的本心。

這次學習工作單的施行，是讓學生於課後完成。主要的原因是筆者曾於 92 年 5 月 8 日至社區大學「數學史與數學教學」課程中講授「從 HPM 觀點看九年一貫之連結」，座談結束之時，請與會教師討論數學史在數學教學中所扮演的地位。參與教師大多對數學史的幫助持正面的看法，但是，對於在課堂教學中融入數學史則多持保留的態度，其中一位教師表示：「數學史的介紹可以引發學習動機，使教學活動更為生動活潑，但就目前自己的教學經驗，時間上的限制是一個很大的問題，若是將數學史放在社團、選修課上使用，效果應該會很好吧！」另

一位有十數年教學經驗的教師也同樣反應：「數學史可應用於社團活動上，一般教學活動用到機會不多，因為要花很多時間。」此時筆者反思到當教師在數學教學中融入歷史維度之時，時間的掌控是相當重要的一件事，因此，筆者此次學習工作單的實施方式，採取由教師稍加提示學習工作單內容，便發下去讓同學自己研究，過些時日再利用一節課的時間與同學討論內容。從訪談學生的反應得知，他們也相當能夠接受此種方式，大部分的學生都認為「學習單可以增進對數學多元的思考及推理能力，而不只是在課本和學習手冊的題型打轉，對於進階的思考有很大的幫助」。這樣的結果可以做為有心實施 HPM 教學，卻又受限於教學時數不足的數學教師作為參考。

以稍加提示內容，讓學生自行完成學習工作單，再帶回學校討論的方式，雖然在時間上精簡許多，可是往往會佚失掉一些在實際教學互動過程中所可能激起的火花。例如，以同樣的題材而言，筆者也於當年暑假期間，在某文教基金會所主辦的第一期國中資優數學研習營進階班中講授，當問及「知道三角形的底和高時，可以很快得出三角形的面積，可是如果一塊禁止進入的三角形土地，要如何求出它的面積呢？」當時台下的學生議論紛紛，有一位學生自告奮勇上臺，先假設做出一邊的高，然後由兩個直角三角形共用此高，以畢氏定理求得高的表示式，再由 底×高，導得秦九韶的「三斜求積術」。這真是一個驚喜，對學生而言，獨立導出結果，而這結果也解釋了古人的公式由來（因為秦九韶只給出公式，並沒有推導過程），他獲得了相當大的成就感。對筆者而言，佈置文本，讓學生在解決問題中獲得學習的樂趣，正是 HPM 所追求的目標。接著筆者變更了次序，先介紹中國算學，再回過頭去講解學生所感覺陌生的原始海龍公式的證明。當講解完海龍的證明後，有些人認為「海龍的公式好煩喔！」也有些學生寫下了他們的感想：「我覺得古代的人真是太了不起了（尤其是 Mr.海龍先生），我只能說我對他們感到由衷的佩服呀！」另外有學生也體會出「上了今天的課才知道不同的人、事、物，會蘊育出不同味道的數學。」。

## 肆、結語

採用現成的學習工作單固然容易，但是相信大家一定會想為自己任教的學生量身打造適合的 HPM 學習工作單。因此，最後筆者建議有心想要自我充實，學習 HPM 教學的教師，不妨找幾個志同道合的夥伴，以學校為中心進行。每週利

用一段固定的時間，最好是兩個小時以上，因為這樣較有足夠的時間分享每個人的作品。在固定的地方，例如數學科研究室，進行討論。如此，教師可以較從容的利用「閱讀」和「實作」的模式，在共同學習夥伴關係的驅動下，完成製作整合三面向的 HPM 學習工作單，使用於教學。「閱讀」的重要在於從閱讀中，教師不但充實了數學史素養，也能體會在教學素材中，融入 HPM 三面向的意含。此處的「閱讀」包括：

・參考現有 HPM 實作資料庫中的資訊。例如《古代數學文本在課堂上的使用》計畫中所完成的 29 篇教案，或《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究》裡收錄的 8 篇實作心得，以及《HPM 通訊》裡的文章等等。

・數學文本，其中包括原始典籍或二手文獻。

・數學普及讀物。

・與數學學習與教學相關之文章。

至於實作部分則包括了：

・學習工作單的編製。

・教學後實作心得的撰寫。

在實際的操作上，此「閱讀」和「實作」的模式，是雙向並行的。從閱讀中教師汲取有關 HPM 的素材，經過自我詮釋後，編製成學習工作單。接著，教師在課堂的教學實施，獲得學生回饋之後，如果能撰寫實作心得加以反思，繼續再從文本中尋找適合的史料，如此才能讓下一單元呈現出更精緻的 HPM 教學。除此之外，向專家諮詢，例如台灣師大的洪萬生教授，或者是尋求 HPM 同好的協助，例如《HPM 通訊》中的編輯小組，這些都是向外可以獲得的資源。有了上述的資訊參考，透過不斷的閱讀和實作，相信大家都能設計出合用的 HPM 學習工作單。親愛的讀者，您是不是也躍躍欲試了呢？

# 附錄

學習工作單

一、海龍（Heron）生平介紹

海龍（Heron）希臘的數學家與測量學家，大約生於西元 75 年左右，他在數學方面最能代表其成就的著作是度量論（Metrica）一書，該書的原稿本於 1896 年才被發現，全書共分為三卷。第一卷由矩形和三角形開始，討論了平面圖形和立體表面之面積，並給出了著名的三角形面積公式－海龍公式。第二卷探討立體圖形，其中包括圓錐體、圓柱體、稜柱體等立體體積的求法。第三卷介紹了平面和立體圖形案給定比例之分割，並用到了求立方根的近似公式。

海龍另一部關於測地學的著作（*Dioptra*）也很有名，在這部著作中，海龍對如何在隧道之兩端同時動工而能使之銜接提出說明，也解釋如何測量兩地的距離，包括有一地不能到達以及兩地均能看見但均不能到達的情形；另外他也說明如何從已知點到不可及的一線作垂線，以及如何測知一塊地的面積而不需進入這塊地面上。大家熟知的三角形面積公式$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（$a,b,c$ 為三角形之三邊長，$s$ 為周長之半），是最後提到的觀念（不進入一塊地而能測知其面積的依據）。這個公式出現於他的測地學（*Deodesy*），在 *Dioptra* 和 *Metrica* 中又再度出現，並且附上證明。海龍的著作之特色是摻合了嚴密數學和近似方法以及埃及人的公式，海龍所提出的公式有許多並未附上證明而一部份的公式則只給出近似值而已。除了上述正確的三角形面積公式，他另外提出一個不精確的三角形面積公式。海龍之所以提出許多埃及時代的公式（例如以$a+\dfrac{r}{2a}$做為$\sqrt{a^2+r}$之近似值），可能原因之一是精確公式所涉及的平方根、立方根等，並不是測量人員所用的上的；事實上，純幾何與測地學或度量學還是有些不同，測地學中求面積和體積的方法並不屬於高等教育的範圍，它們只教給測量員、泥水匠、木匠和技術人員。無疑的，海龍繼承埃及的測量科學並加以發揚光大，他的測地學著作被沿用了好幾百年。

問題與討論：

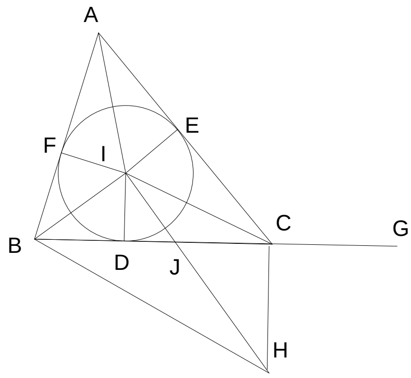
1.就數學課而言，你喜歡老師直接給出公式（例如正弦定理、餘弦定理、海龍公

式...）的結果，還是喜歡老師由推導過程得出公式？請說明你的理由。

學習工作單二、海龍公式的證明

如圖，設圓 $I$ 分別與 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 三邊相切於 $D,E,F$,則 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=r$ ,

因此△ABC 之面積




$\Delta=\frac{1}{2}\overline{ID}\cdot\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{IE}\cdot\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{IF}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}r(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})=rs$ 。

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 。因為切線段等長，

得 $\overline{AE}=\overline{AF},\overline{BF}=\overline{BD},\overline{CD}=\overline{CE}$, 因此

$\overline{AE}+\overline{BD}+\overline{CD}=\frac{1}{2}(\overline{AE}+\overline{AF}+\overline{BD}+\overline{BF}+\overline{CD}+\overline{CE})=\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})=s$ 。故

$\overline{AE}=\overline{AF}=s-(\overline{BD}+\overline{CD})=s-a$ ，同理 $\overline{BD}=\overline{BF}=s-b,\overline{CD}=\overline{CE}=s-c$ 。

延長 $\overline{BC}$ 至 $G$ 使 $\overline{CG}=s-a$ ，則 $\overline{BG}=s$ 。過 $I$ 與 $C$ 分別作 $\overline{BI}$ 與 $\overline{BC}$ 之垂線而相交於 $H$，則因 $\angle BIH=\angle BCH=90^\circ$，故 $B$、$I$、$C$、$H$ 四點共圓。因此，

$\angle BHC=180^\circ-\angle BIC$ ，而

$\angle BIC=\angle BID+\angle CID=(90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC)+(90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BAC)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$

故 $\angle BHC=180^\circ-\angle BIC=180^\circ-(90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC=\angle AIE$ 。

因此，$\triangle AIE\sim\triangle BHC$，故 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{IE}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{ID}}=\frac{\overline{CJ}}{\overline{DJ}}$ (因 $\triangle IDJ\sim\triangle HCJ$)

又 $\frac{\overline{BC}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}}$ ，得到 $\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CG}}+1=\frac{\overline{CJ}}{\overline{DJ}}+1=\frac{\overline{CD}}{\overline{DJ}}$ 。

於是 $\frac{\overline{BG}^2}{\overline{BG}\cdot\overline{CG}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DJ}}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{BD}\cdot\overline{DJ}}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{ID}^2}$ 。

因此 $\overline{BG}^2 \cdot \overline{ID}^2 = \overline{BG} \cdot \overline{CG} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CD}$ ，即 $s^2 r^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ ，

故得△$= sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

問題與討論：

1.請如課本般用三角形面積和餘弦定理證出海龍公式。

2.對於課本的證法和海龍的證法，您喜歡哪一個？請說明理由。

學習工作單三、秦九韶與《數書九章》

1.秦九韶生平簡介

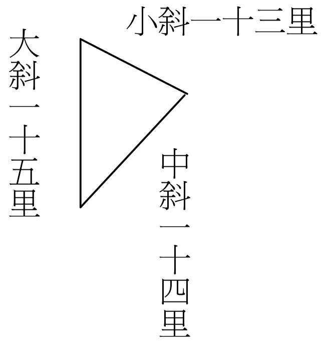
秦九韶，字道古，普州安岳（今四川安岳）人，生於南宋寧宗嘉泰二年（1202），約卒於理宗景定二年（1261），與李冶、楊輝、朱世傑並稱宋元數學四大家。秦九韶自幼生活在家鄉，十八歲時曾「在鄉里為義兵首」，後隨父移居京都。他是一位聰敏好學之人，處處留心，勤學不倦。其父任職工部郎中和秘書少監期間，正是他努力學習和積累知識的階段。工部郎中掌管營建，而秘書省則掌管圖書，其下屬機構設有太史局。因此他有機會閱讀大量典籍，並拜訪天文曆法和建築等方面的專家，請教天文曆法和土木工程問題，甚至可以深入工地，瞭解施工情況。他又曾向「隱君子」學習數學，也曾向著名詞人李劉學寫駢驪詩詞。通過這一階段的學習，秦九韶成為一位學識淵博，多才多藝的青年學者。他認為數學研究「大則可以通神明，順性命；小則可以經事務，類萬物，詎容以淺近窺哉！」1244 年至 1247 年間，秦九韶專心致志研究數學，完成數學名著－《數書九章》。

2.《數書九章》

宋元時期是中國傳統數學發展的高峰時期，《數書九章》是宋元數學的代表作之一，本書共十八卷八十一題，分為九類，每類兩卷九題。這些問題是秦九韶從他收集和演算的大量資料中精選出來的較有代表性的問題。在著作體例方面，《數書九章》採用問題集的形式，並將問題分為九類，但在各題術文（解題方法）之後多附有「草」，就是表明演算步驟的算草圖式。在幾何方面，秦九韶的另一項傑出成果是「三斜求積術」，即已知三角形三邊之長求其面積的公式，為前人所無，等價於古希臘著名的海龍公式。此題位於第五卷－田域類的第二題。

3.三斜求積

問：沙田一段有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步，欲知為田幾何？




答曰：田積三百一十五頃。

術曰：以少廣求之。以小斜冪併大斜冪減中斜冪逾半之自乘於上以小斜冪乘大斜冪減上餘四約之為實一為從隅開平方得積。

問題與討論：

1.三斜求積公式中，若以 a 表大斜、b 表中斜、c 表小斜，用現代數學符號可表示為 $\Delta=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$，古時 240(積)步為一畝，百畝為頃，請算出您的答案是否相符。

2.請試著由三斜求積公式導出海龍公式。

3. 秦九韶只給出三斜求積公式，並沒有說明由何得出此公式。聰明的同學，你能幫他導出這個公式嗎？

## 參考文獻：

洪萬生 (2001)。古代數學文本在課堂上的使用。國科會補助專題研究計畫成果報告, (編號 NSC 89-2511-S-003-031-; NSC 89-3511-S-003-121), 國立台灣師範大學數學系。

洪萬生 (2002)。中算史中的『張本例』。HPM 通訊, 5(12), 1-3。

蘇意雯 (2004)。數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究。台北市：國立台灣師範大學博士論文(未出版)。

何紹庚 (1993)。數書九章提要。載於郭書春主編：中國科學技術典籍通彙數學卷 (pp. 1-431-1-437)。鄭州市：河南教育出版社。

南宋‧秦九韶（1993）。數書九章。載於郭書春主編：中國科學技術典籍通彙數學卷 (pp. 1-439-1-724)。鄭州市：河南教育出版社。

Dunham, W. (1991)（林傑斌譯, 1996）：天才之旅（Journey through genius: the great theorems of mathematics）。台北市：牛頓出版公司。

Kline, M. (1972)（林炎全、洪萬生、楊康景松譯, 1983）：數學史－數學思想的發展（Mathematical thought from ancient to modern time）。台北市：九章出版社。

Barbin, E. (2000). Integrating history: research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education (pp. 63-90). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education (pp. 1-38). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (Eds.) (2000). History in mathematics education: The ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. Mathematics in School, 32 (1), 37-41.

Grugnetti, L. (2000). The history of mathematics and its influence on pedagogical problems. In V. J. Katz (Ed.), Using history to teach mathematics: An international perspective (pp. 29-35). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Gulikers, I., & Blom, K. A. (2001). ‘A historical angle’, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. Educational Studies in Mathematics, 47, 223-258.

Jahnke, H. N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C., ＆ Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom:An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education ( pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

通訊作者

蘇意雯 台北市立成功高中 mathyiwen@yahoo.com.tw