第四章結果分析與討論

本研究結果分成三個部分來報導：一是研究小組所研擬的新順序教學活動研究結果；二是由成就測驗題和回饋題的資料，從「學習成效」、「情意」、「教學過程是否順利」三個向度，比較學生在學習過程中的情形，以探討新順序的可行性；三是報導學生在兩種不同順序下，學習遷移的差異。

第一節　研擬新順序教學活動教材

發展初期：釐清關鍵的環節、擬定策略

研究小組在研究設計階段，根據課程內容大綱與研究目的，決定教學順序如第三章(參考圖 3-2-1,P15)描述，據此研擬新順序教學活動材料，研究小組根據教學的「數學」、「學生」、「教學方法」三個面向，認為須先考量下列問題:

一、新順序和傳統順序相較，各順序教材概念的發展有哪些不同的階段？

二、在上述問題一的各個階段，學生學習上會有哪些困難?

三、對於各順序，在教學上應採取哪些教學活動因應上述問題二中所述學生的學習困難?

四、如何在盡量不影響教學活動的狀況下收集研究資料?

針對以上第一、二、三的問題，研究小組首先討論傳統順序的問題以及因應問題的解決方式。討論結果如下：

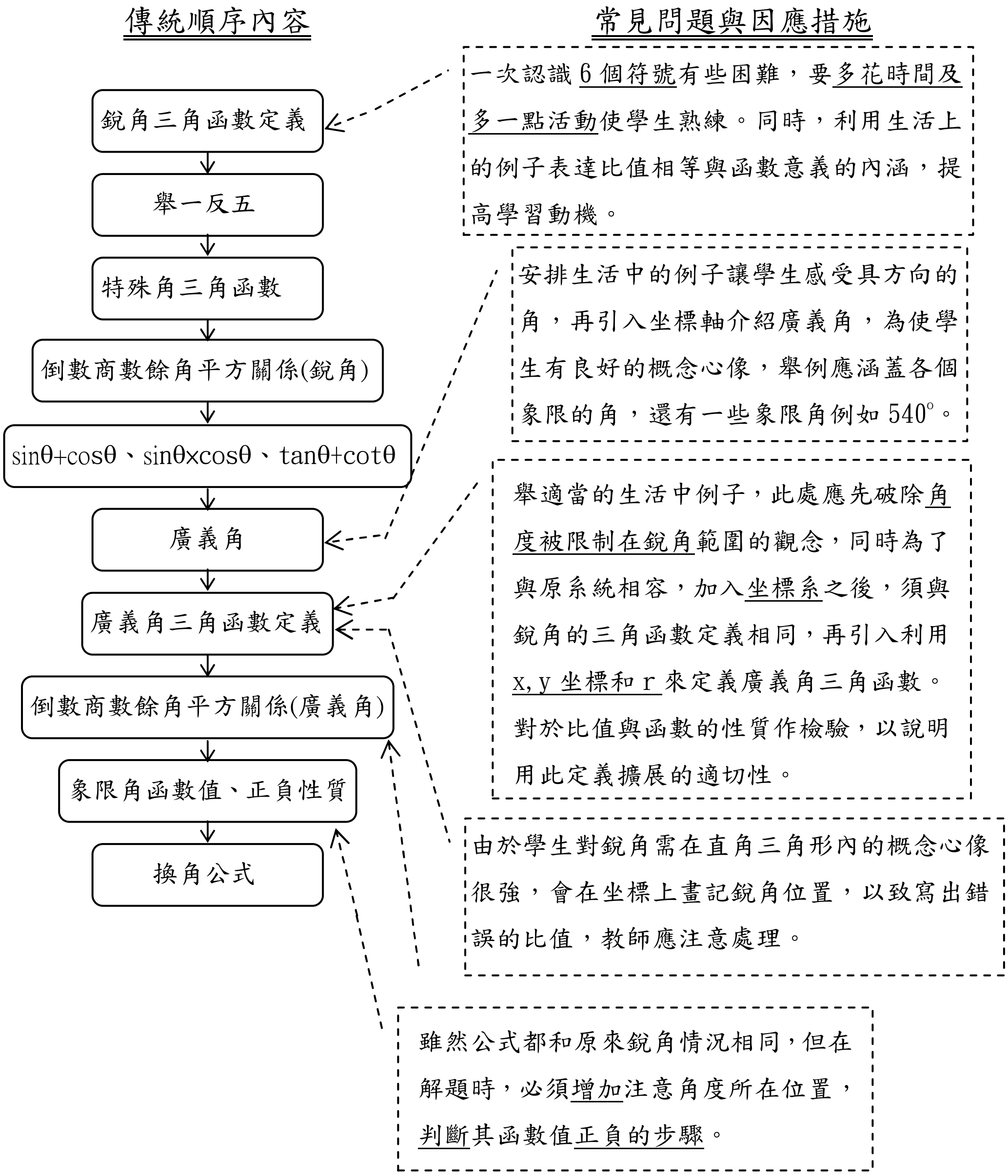
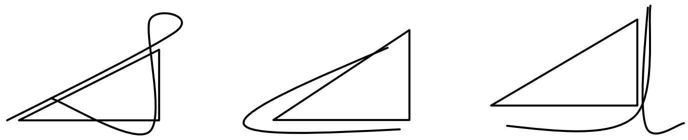


圖 4- 1- 1：傳統順序內容及常見問題與因應方式

上圖大致說明傳統順序內容可能發生的問題，以及本研究在教學上如何因應。由於這些問題在數學教育界以及教師社群中已有許多探討，研究小組在此不詳述，僅說明本研究中傳統順序教學之特色如下:

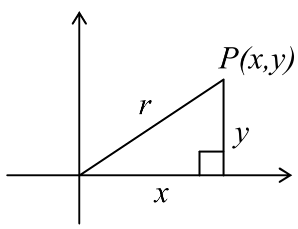
1. 介紹銳角三角函數定義之前，以生活實例引入下列觀念(1)相似直角三角形任意兩邊長之比值為定值(2)直角三角形的某一銳角增減時，上述任一比值會隨之改變----這是函數的概念(3)請學生思考：三個邊長會有幾個不同的比值？這些比值之間有哪些關係？再介紹銳角三角函數定義。

2. 介紹銳角三角函數定義時，**不強調如下圖的定義方式**，以避免學生利用此概念心象時，會被三角形的標準位置所限，以致在處理其他角度擺置的三角形時，必須先經過「重置」的動作，造成程序中發生錯誤。



但教學時**強調以「對邊、鄰邊、斜邊」的定義方式**，對於每一個銳角，找出其所對應的「對邊、鄰邊、斜邊」，並進行以下的教學活動：黑板上畫出**各種不同方向的直角三角形**，給出每一三角形的任兩邊長，要數位學生上台求出圖中銳角的三角函數值，改變條件或三角形方向，重複找不同學生上台，增進學生的學習效率。

3. 引入廣義角三角函數定義時，利用「以 x, y 坐標表示第一象限角所在之直角三角形邊長」之圖示(如下)，強調廣義角與銳角三角函數的聯結，幫助學生記憶新的公式。



對於新順序的教學，研究小組考量教材概念發展及學生可能產生學習困難的情形，在安排教學活動上，應特別注意、參考之處如下：

1. 在學生未學過銳角三角函數時，如何引入廣義角三角函數定義：
此階段中，學生必須同時掌握「坐標比」、「相似形與比值」、「標準位置角終邊的點」、「函數」的概念，引入的例子應能適切表達出上述概念，最好與學生生活經驗相關，較能引起學習動機。再配合教師有條理的講述與引導學生練習與實作，以期幫助學生順利發展概念學習。

同時，引入廣義三角函數定義時須有不同的圓半徑，後續不會被限定在單位圓，將來學習到銳角三角函數時，才不會有三角形不合的困擾。

2. 新順序認識六個三角函數符號的歷程，應與傳統順序第一次接觸六個三角函數符號類似，在教學上，教學步調和介紹的方式可以比照傳統順序的教學。

3. 在學習廣義角三角函數定義時，當計算一些特殊角如 $150^o,240^o\dots$等之數值三角，取其終邊上的點坐標，須藉由 30^o-60^o-90^o 直角三角形邊長比計算。新順序學生未受過銳角三角函數值的練習，可能並不熟悉此邊長比的使用，在此處應先確認學生是否可以正確操作「30^o-60^o-90^o 直角三角形邊長比」，並須有足夠時間練習。

4. 當特殊化到銳角三角函數定義時，如何在各種不同擺放位置的直角三角形找到正確的邊長對應，應設計教學活動，在視覺上、具體操作上幫助學生形成這個能力，並內化為心理活動。

   本研究設計了「翻轉直角三角形活動」：利用厚紙板製作數個不同大小的直角三角形，先貼在黑板上；教學時，黑板的另一邊畫一個坐標系，在教學時，強調不同方向的直角三角形，搬動到第一象限的動作(必須包含移動、轉動或翻動)，最後使直角三角形中指定的銳角放在標準位置，如下圖所示。

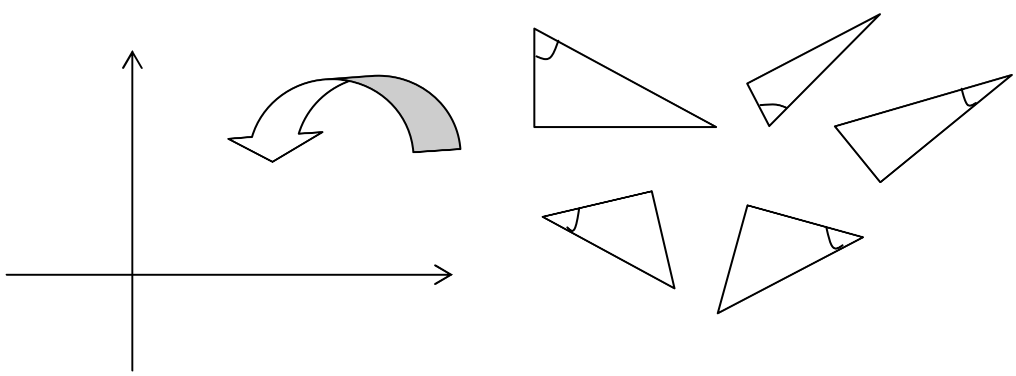


圖 4-1-2：翻轉直角三角形活動示意圖

5. 精簡恆等式單元重複的內容：傳統順序中三角恆等式在進入廣義角後，還要再證明一次，新順序教學中，不需要特別額外教學活動，因為銳角也是廣義角，只是其中的特例。

最後，針對第四個問題，本研究希望能盡量在不影響教學的情況之下收集到資料，所以事前請資深老師們提供建議，詳加規劃。研究事前規劃了練習題與測驗題，每個概念後皆有對應的測驗題，但決定若教學時間不足、學生不願意等情況發生時，便適時調整欲測驗的題目數量。

發展中期：編制上課講義、模擬教學活動

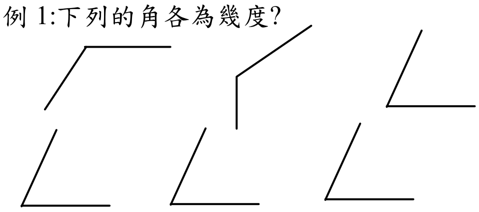
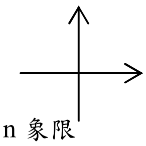
研究小組根據教學目標，參考現行高中教材康熙版數學第二冊課本的內容，選取適當的例題、類題及習題，和團體討論出的教學活動與注意事項，編製成上課講義，使用前亦經校訂，其成果在以下實際教學報導內一併呈現。同時也發展了教學配套的回家作業、研究所需的紙筆測驗題(包含原規劃測試題目及後有施測題目)，則呈現在附錄中。

其次，實驗組最重要的兩個教學活動:「引入廣義三角函數」與「搬動三角形至標準位置角」(詳細說明請見後面的教學報導)，都在團體討論中請教師沙盤推演、模擬，請其他成員評估提供改進意見。

發展後期：實際教學報導

下面將報導五天共十小時新順序教學的實際活動，呈現上課教材內容、師生活動概述與學生的特殊反應與教師反思。

第一天(第一小時)

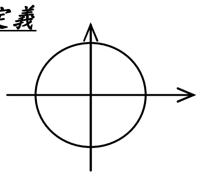
教材內容(上課講義呈現)	說明	師生活動、學生特殊反應
PART 1 廣義角 ＊想法：使角的表示法打破 0^{o} 到 180^{o} 之限制並具有方向 ＊舉一些生活中的實際例子	教師舉「旋轉門」為例，與學生討論角度的「大小」與「方向性」。	學生回饋「時鐘的兩個指針」也可形成廣義角。
A.定義 廣義角為不限於 $0°\sim180°$ 之間的有向角	請學生將定義內容抄在方框內。	
例 1:下列的角各為幾度? 	此時教師在黑板上呈現更多不同方向的角度，豐富學生的概念心像。 教師利用例 1 指出始邊和終邊的選取與方向有關，四個相同圖形是為了引出同界角的概念。	
♥標準位置角和第 n 象限角: 1. 頂點在______,始邊在______之有向角稱為標準位置角  2. 第 n 象限角 若角θ的**終邊**落在第 n 象限 將這樣的角稱為__________ (以下討論的皆為標準位置角)	加入坐標系規範角度的方向。	
B.同界角：始邊相同,終邊亦相同的角 i.e.角度差為___________的角 例如: 30°和 390°,-330°互為同界角		學生反應與國中時學的「同位角」聽起來好像。 因此做了澄清說明。
例 2:試舉出一些 45°的同界角 ※角θ之同界角可表為________ ※α,β為同界角⇔______________	以上述多個具體數值例，抽象出符號公式。	
例 3:找出下列有向角的同界角θ使 $0^\circ\leq\theta<360^\circ$，並指出各角分別為第幾象限角 (1)$1200^\circ$ (2)1469° (3)-837° (4)-1480°	為了增進計算能力，不妨在此師生一起列舉一些 360 的倍	教師反思:從課堂上的反應發現，同

<table>
<tr>
<td>練習:
(1)1020°(2)-980°(3)-675°(4)580°

※最小正同界角
C 象限角:終邊在____之標準位置角
例如: $270^\circ,-900^\circ,360^\circ,\ldots.$ 皆為象限角。(皆為______之倍數角)</td>
<td>數，增加熟悉度。

請學生當場練習，教師巡視指導。</td>
<td>界角的計算對學生而言並不困難。</td>
</tr>
</table>

第一天(第二小時)

<table>
<tr>
<th>教材內容(上課講義呈現)</th>
<th>說明</th>
<th>師生活動、學生特殊反應</th>
</tr>
<tr>
<td>
$\boxed{\text{PART 2 廣義角的三角函數}}$
引例　函數的意義　　相似形邊長成比例
<u>甲.廣義角三角函數定義</u>
1.定義.

<table>
<tr><th>名稱</th><th>比值</th><th>中文名</th><th>英文</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>sine</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>cosine</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>tangent</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>cotangent</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>secant</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>cosecant</td></tr>
</table>
例 1:(1)點 P(-12,5)在標準位置角θ之終邊上,寫出θ的六個三角函數值.

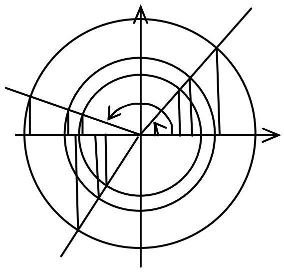
(2)寫出 660° 的六個三角函數值

(3) 寫出-60° 的六個數值三角函數值

＊練習拼字和中文名稱及念法
＊關於符號的使用
(1) $sin\alpha$,$sin\beta$, $sinx$, $sin(90^\circ-\theta)$, $sin2\theta$
(2) $sin\theta$是一個實數值
2.由上面的定義可知：
性質 1: 同界角的所有函數值皆相等。
</td>
<td>
教師以摩天輪引起話題，再提到自己小時候，以繩子綁住金龜子旋轉的遊戲作為引例。

先以一個固定的繩長，強調當角度改變時，以繩長和其在 x 軸上的投影長的比值也隨之改變，使學生有函數的感知。

再問學生，如果繩長改變呢?

此時如圖，會有相似三角形產生，可讓學生對於同一角所對應的比值不隨半徑而變動。

注意：教師所提的數個角裡，要含有象限角。
再問學生，繩長與 y 軸上之正射影，會不會也形成類似的函數對應?

接著再引入坐標代替長度的想
</td>
<td>
學生參與討論熱烈。
也有同學提到一種中國童玩有類似效果。

學生表示不知道「函數」是什麼?教師在此補充函數的概念。

教師利用不同顏色粉筆區分不同類線段。在視覺上幫助學生理解。

教師帶領學生唸讀符號。

教師針對「實數值」的涵義補充說明。
</td>
</tr>
</table>

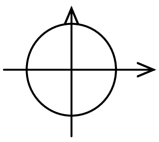
<table>
<tr><td>性質 2: 對任意的角θ，有倒數關係。
(1) (2) (3)
性質 3: 對任意的角θ，有商數關係。
(1) (2)</td><td>法，以區別角度所在象限不同的情形。
上述活動進行完畢才進行定義的介紹。
介紹定義時一併說明倒數關係。
性質的發展以拋問的方式，刺激學生思考，最後再做出結論。</td><td>課後進行測驗一。</td></tr>
</table>

第二天(第一小時)

<table>
<tr><th>教材內容(上課講義呈現)</th><th>說明</th><th>師生活動、學生特殊反應</th></tr>
<tr><td>3.特殊角三角函數
<table>
<tr><th></th><th>sin</th><th>cos</th><th>tan</th></tr>
<tr><td>30°</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>45°</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>60°</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

接下來幾節課我們要討論下列問題，不妨想一想:
1. 會不會有某一些角度的某些函數不能定義?
2. 三角函數值一定為正嗎?哪些函數在什麼情況為負?
3. 可利用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 表示出其他函數嗎?
4. 六個函數值裏,只知其中一個,可以求出另外五個嗎?怎麼求?

例 2:求出下列函數值
(1) $\sin 60^{\circ}$ (2) $\cos 150^{\circ}$ (3) $\tan 225^{\circ}$
(4)$\sec 330^{\circ}$ (5)$\csc(-45^{\circ})$ (6)$\cot(-300^{\circ})$
(7)$\sin(-240^{\circ})$ (8)$\cos(-45^{\circ})$(9)$\cos(-120^{\circ})$

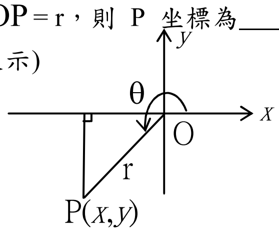
4.在單位圓(半徑為__的圓)上有向角的終邊和圓之交點坐標即為_____
</td><td>複習國中課程內特殊三角形邊長比。並舉出一些實例要求學生練習求出一些邊長。

在坐標平面上做出 30° 的標準位置角，並在終邊上任取一點 P，再利用邊長比找出點 P 的坐標，根據廣義角三角函數定義操作，得到表中的函數值。

在此預先提出問題，但不先回答的目的是---點出短期的教學目標，學生在練習下列例題時，一邊思考，可有助未來概念外延的發展。</td><td>課前進行測驗二。
教師先問回家作業是否有問題?學生答沒有。但對昨天的測驗一中的遷移題有疑問。
教師說本節課會說明。

教師問及:為什麼會有這樣的比例呢?
有學生提供證明。

發現學生作圖比預期花更久的時間。而且在由邊長寫成坐標時，容易出錯。</td></tr>
</table>

例3:如圖,若 $\overline{OP}=r$，則 P 坐標為_______ (以θ的函數表示) 		有了遷移題的經驗，幾乎所有學生可以自行解出例題三。

第二天(第二小時)

教材內容(上課講義呈現)	說明	師生活動、學生特殊反應
乙.象限角之三角函數值 例 4: (1) 寫出下列函數值 $sin90°=$________; $tan(-90°)=$________; $sec180°=$________; $cot270°=$ ________; $csc(-90°)=$________; $sin540°$ ________; $cos1080°=$________; $sin900°=$________; $sec180°=$________ ; $csc270°=$________ 。 (2) 下列何者無意義? (A)$tan90°$ (B)$csc540°$ (C)$cos270°$ (D)$cot1080°$ (E)$sec180°$ ***丙.正負*** 活動:(舉一反五) 在黑板上同時給數個例子，請同學上來演算。 例 5:若θ為第三象限角，且其餘弦值為 $\frac{-3}{5}$ ， 求 $sin\theta$、$tan\theta$之值。 ＊本題的意義在於____________________ 練習 1:已知θ為第一象限角,且 $sec\theta=3$,求 $sin\theta$ 之值。	教師提出欲與學生討論之問題:何時比值會不存在而無法定義三角函數? 教師要學生背出六個函數的定義，並在黑板的一側寫出來。 教師拋問:*sin* 的分母是誰?何時為 0? *tan* 的分母是誰?何時為 0? … 最後讓學生寫下結論在方框內。 正負性質的判定活動由教師引導做出結論。 此處之關鍵在於使用 r>0 和已知函數值寫出點坐標,再回到定義即可。	學生立即回答:分母為零的時候。 教師點選學生，回答例 4 中的小題。 教師對「無意義」在數學語言中的使用作一番說明。

練習 2:若 $cscx = \frac{12}{7}$ ，求 $2tanx + cosx$ 之值 例 6:設 $sin(-100^{\circ}) = k$，以 k 表示 $cot620^{\circ}$之值。 練習 3: $sin\theta = \frac{1}{3}$ ，$90°<\theta<180°$，求 (1) $cos\theta$ (2) $tan(-630°+\theta)$ ＊想一想：每一個三角函數的值域？ ＊播放 GSP 的函數圖 例 7:若$(2sin\theta+3)(2sin\theta-1)=0$ 求 $cos\theta$之值。	這一題關鍵是點出角 x 所在的象限不只一種可能，要討論。 這一題要感知到(-100^{o})和 620^{o}是同界角。 觀察學生如何思考$(-630°+\theta)$ 練習三的第二小題是為了接下來的換角公式做暖身。	學生對於要討論覺得有些麻煩。 有些同學對於 k 的使用有困難。 多數學生可輕易地將之轉換為$(90°+\theta)$，接著一部分學生就被困住了。 由於上課時數不夠，GSP 的函數圖活動取消。

第三天(第一小時)

<table>
<tr><th>教材內容(上課講義呈現)</th><th>說明</th><th>師生活動、學生特殊反應</th></tr>
<tr><td>

Ⅰ.角度變換

學過了廣義角的定義後，請同學想一想：如果要製造一個三角函數表，則表中的角的範圍，是否要將所有大小的角皆列出呢？

1:任一標準位置角θ之終邊上有一點 $P(x,y)$, $\overline{OP}$=r,若旋轉θ的終邊使成為下列各角度,則 P 的新坐標 P’有何變化?

<table>
<tr><td></td><td>$90^{o} + \theta$</td><td>$180^{o} + \theta$</td><td>$270^{o} + \theta$</td></tr>
<tr><td>P’</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$90^{o}-\theta$</td><td>$180^{o}-\theta$</td><td>$270^{o}-\theta$</td><td>$360^{o}-\theta$</td></tr>
<tr><td>P’</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

</td><td>

本節課的主要目的有二:
讓學生觀察出

1. θ經 90^{o}及 270^{o}加減之後，終邊上點的坐標產生 x、y 互換的情形。但 180^{o}與 360^{o}的則不會。
2. 角度經過轉換後，新函數的正負值由其角度所在的象限決定。

寫出表中點 P 的坐標後，再寫出新角度的六個三角函數值與θ的六個三角函數值比較。(重覆此過程)

</td><td>

剛開始由於教師的圖上同時放好幾個經轉換的角度，有些凌亂，學生反映後改為一個角一個圖，效果就好多了。

這個部分時間有些冗長，少數學生到最後快睡著了。

</td></tr>
</table>

2:由上述結果完成下表(略) ＊角度變換法則 Step1:先將角度化為________________ Step2:利用___________________判別象限 ⇒___________ Step3:_________⇒180°,360°函數不變 90°, 270°改為餘函數	從上述觀念整理出接下來的程序性知識---換角公式。	公式介紹完畢時，有學生表示能用這麼簡潔的方式表達這些結果真厲害。

第三天(第二小時)

教材內容(上課講義呈現)	說明	師生活動、學生特殊反應
例 8:化簡 $\dfrac{\sin(90^\circ+\theta)\cdot\cos(90^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}$ 練習4:化簡 $\dfrac{\sin(180^\circ+\theta)\cdot\tan^2(180^\circ-\theta)}{\cos(270^\circ+\theta)}$ 例 9:設θ為第四象限角,$cos\theta=\dfrac{1}{3}$,求各式之值 (1)$tan(90^o-\theta)+cot(180^o-\theta)+sin(270^o-\theta)$ (2)$cos(90^o-\theta)+cos(180^o+\theta)+cos(270^o-\theta)$ 例10:化下列函數使其角為小於 45^o 的正角 (1) $tan1345^\circ$ (2) $sec514^\circ$ (3) $cos(-1395^o)$ 例 11:已知 $tan11^o = a$，試以 a 表示 $sin1001^o$ 練習 5:已知 $cos20^o = a$，試以 a 表示 $csc(-880)^o$ 想一想：比較例 6 和例 11	先複習上一節的換角公式。 教師在黑板上示範操作方法，再請同學上台演練。 接著才進行例 8。 回到本節課進行前的問題: 如果要製造一個三角函數表，則表中的角的範圍，是否要將所有大小的角皆列出呢？ 與學生討論。	有兩位同學似乎仍不明瞭換角公式的運用，趁學生上台演練時，教師下台指導。 教師反思: 感覺學生對於使用符號”a”來表示三角函數值，思考速度必須放慢。 進行測驗三

第四天(第一小時)

教材內容(上課講義呈現)	說明	師生活動、學生特殊反應
PART 3 三角函數的基本關係 ***甲.基本關係式***	上課前檢討回家作業。	

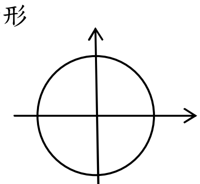
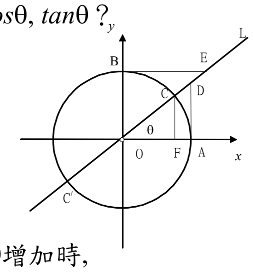
A.倒數關係: $csc\theta$= $sec\theta$= $cot\theta$= B.商數關係 $tan\theta$= ,$cot\theta$= 例 1:若 $tan\theta=-5$,求 $\frac{\sin\theta-3\cos\theta}{2\sin\theta+\cos\theta}$ 之值 練習 1:已知 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3$,求 $tan\theta$之值 D.平方關係 $sin^2\theta$是什麼? ________________ ________________ ________________ 例 3:求$(sin\theta+cos\theta)^2+(sin\theta-cos\theta)^2$ 之值 例 4: 若 $5cos^2\theta=24sin\theta$,求 $sin\theta$之值	複習廣義三角函數的定義,其中已含倒數關係。 再由定義推導商數關係。 教師對例 1 提供三種解法。 認識平方符號。 教師對平方關係的証明,除了以定義證明外,也以單位圓上的線段長給了幾何上的証明。所以這裡所花時間比較長。 另,強調由 $sin^2\theta+cos^2\theta=1$ 可推得另兩個平方關係的方法。	學生最喜歡的解法是: 因 $tan\theta=-5$ 故 $sin\theta=-5cos\theta$ 代入後式即可。 由於學生對平方和公式感到熟悉,所以學習例題三很順利。發現學生對於將式子變形再代換的技巧並不熟悉。

第四天(第二小時)

教材內容(上課講義呈現)	說明	師生活動、學生特殊反應
乙.綜合應用 A $\boxed{sin\pm cos \text{ 和 } sin\times cos}$ 例 5:若 $sin\theta,cos\theta$為方程式 $2x^2-\sqrt{5}x+a=0$ 之二根,求(1) a (2) $sin\theta-cos\theta$ (3) $sin\theta$ 練習 3:已知 $sin\theta cos\theta=\frac{2}{5}$,求值: (1) $sin\theta+cos\theta$ (2) $sin\theta-cos\theta$	複習國中的平方和公式。 $sin^2\theta+cos^2\theta=1$ 的應用 複習根與係數的關係。 由於已給角度所在象限,因此答案僅有一組。教師在此應教	例題 5 花了不少時間。 此類型題目計算量大,學生練習時會計算錯誤。

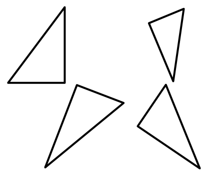
練習 4:若 $270° < \theta < 360°$ 且 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}$，則 $\cos\theta = ?$ B $\boxed{\tan+\cot \text{ 和 } \sin\times\cos}$ 例 6:承例 5,求 $\tan\theta+\cot\theta$之值 例 7:已知 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{25}{12}$,求值 (1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta + \cos\theta$ (3) $\sin\theta - \cos\theta$ 練習 5:設 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{2}{3}$，求 $\tan\theta + \cot\theta$ 之值 練習 6:已知 $\tan\theta + \cot\theta = \frac{5}{2}$,求值 (1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta+\cos\theta$	導學生判別方法。 教師在此處應加強 $\boxed{\sin\pm\cos}$、$\boxed{\sin\times\cos}$ 和 $\boxed{\tan+\cot}$ 之間的連結關係，才不會使學生弄混。	

第五天(第一小時)

教材內容(上課講義呈現)	說明	師生活動、學生特殊反應
$\boxed{\text{PART4 特殊情形-銳角三角函數}}$ ***甲.銳角三角函數*** 1.考慮 $0^{o} < \theta < 90^{o}$ 的情形 (註：回到定義)  例 1:下圖為一單位圓,請指出哪些線段長分別代表 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$？  ＊ 由上圖知，當θ增加時, $\sin\theta$之值隨之__________	教師針對一位學生回饋中提及，希望多知道三角函數在生活上的應用。在此補充了兩個例子:一個是如何利用手邊資訊和公式求出 101 大樓的高度？另一個是如何由經緯度求出地球表面上任兩點之距離。後者沒有提供解法。 第四天已教過單位圓上點的坐標可代表三角函數值。在此提供學生連結概念。	進行測驗四。 學生很專注聆聽，並有不少學生提出問題討論。

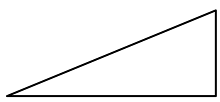
<table>
<tr>
<td>$cos\theta$之值隨之＿＿＿＿＿
$tan\theta$之值隨之＿＿＿＿＿
2.直角三角形
＊介紹符號 $sinA, sin\angle BAC$

＊平常若沒有特別標示箭頭表示出方向，在三角形內的角，我們一律視為正角，不具方向性。
(1)各種方向的直角三角形：將直角三角形板，藉由轉動和翻轉，放置到坐標平面上的第一象限</td>
<td>此問題已在遷移題出現過。

教師使用道具，示範平移、旋轉、鏡射的動作，把銳角轉到標準位置角。
</td>
<td>請學生上台示範。
由於教師製作的教具很醒目，學生一進教室就問：這是什麼啊?</td>
</tr>
</table>

第五天(第二小時)

<table>
<tr>
<th>教材內容(上課講義呈現)</th>
<th>說明</th>
<th>師生活動、學生特殊反應</th>
</tr>
<tr>
<td><table><tr><td>名稱</td><td>邊長比值</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>(2)由一求五的活動

C.餘角關係

例 2:
求值:$(sin43^{\circ}-sin47^{\circ})^2+(cos43^{\circ}+cos47^{\circ})^2$

練習 2: α、β是銳角，若$\alpha+\beta=90^{\circ}$且 $cot\alpha=\frac{3}{8}$，試求 $sin\beta$之值。</td>
<td>從剛才搬動三角形的活動中，提出「對邊」、「鄰邊」、「斜邊」的另一種定義。

由一求五的方法，可以與先前的廣義角方式相同，也就是以角位於第一象限來考量即可。也可以利用邊長比來計算，還可以用三角函數基本關係來計算。講解完畢後，在黑板上寫出許多不同方向的銳角，請學生上台練習。

餘角關係常與倒數關係混淆，在此應提醒學生。</td>
<td>進行測驗五</td>
</tr>
</table>

第二節　新順序的可行性

本節先介紹新順序從廣義角到銳角三角函數定義的教學方式，再分別報導成就測驗與回饋題結果，從學習成效、情意這兩個面向，及教學過程中是否順利來探討學習成效，評估新順序的可行性。

<u>新順序中廣義角到銳角三角函數定義</u>

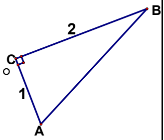
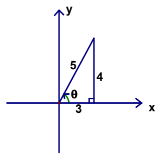
新順序中，廣義角三角函數定義的引入如下：給一直角坐標系，任給一標準位置角 θ，在其終邊上任取一點 $P(x,y)$，令 $\overline{OP}=r$，定義 $sin\theta=\frac{y}{r}$，$cos\theta=\ldots$等六個函數。教學中會出現 θ 在各種不同象限的例子，而終邊上點 P 的位置也可以任意移動使 r 不一定為 1，且 x, y 隨之改變。接著，在經過廣義三角函數各種性質與概念的教學之後，將銳角視為限制在第一象限的廣義角特例，再將第一象限中的直角三角形脫離坐標系，引出銳角三角函數的定義。

實驗中以這樣的順序教學，在教學流程中適當時機點，兩組皆陸續安排傳統上平時課堂中常常給學生的練習題，兩組各為 18、17 大題。其中有 9 大題是特別安排與傳統順序教學的測驗題相同(其餘各題皆不同)，以作為教學成效的比較。題目涵蓋下列三角函數主要概念的理解與綜合應用題目：同界角、銳角三角函數定義、廣義三角函數定義、銳角三角數值、廣義三角函數值、三角函數的關係與性質。

下列測驗題皆為評測教學進展中重要數學概念的學習成效。

表 4- 2- 1：成就測驗題內容與答對率

測驗概念	測驗題題號及題目	答對率	
		控制組	實驗組

同界角	1. 下列哪些是(-100^{o})的同界角? (A) 260^{o} (B) 890^{o} (C) 620^{o} (D) -820^{o} (E) 820^{o}	95.8%	96.2%
銳角三角函數基本定義	2. a. 如下圖，ΔABC 為一直角三角形， 求∠A 的六個三角函數值。 b. 如圖，寫出θ的六個三角函數值。 	81.5%	88.5%
廣義三角函數基本定義	3. 點 P(24,−7)在有向角 θ 之終邊上，則 $csc\theta$之值為__________	92.0%	80.8%
4.銳角三角數值	4. 求出下列各值:(計算題,要寫出過程) (1) $cos60^{o}$ =_________; (2) $tan30^{o}$ =_________	(1)96.3% (2)96.3%	(1)91.7% (2)100%
符號運用	(3) $cot^{2}30^{o}+sec^{2}45^{o}$ =_________	(3)58.3%	(3)87.5%
廣義角終邊上的點坐標	5. 坐標平面上，O 為原點，P(x,2)是 角θ終邊上一點，已知 $\overline{OP}$=3， (1)求 x 及	(1)76.0%	(1)88.4%
廣義三角定義	(2)$cos\theta$之值	(2)76.0%	(2)84.6%

餘角關係	6. 填銳角或三角函數在空格中: (1)$sin37^{o} = cos($______$)$ (2)$sec50^{o} = ($______$)40^{o}$	(1)96.9% (2)92.2%	(1)96.9% (2)87.5%
多對一、三角函數觀念、	7. 下列哪些敘述是正確的？ (A)若 $sin\alpha = sin\beta$ 則$\alpha = \beta$ (B)若 $\alpha = \beta$ 則 $sin\alpha = sin\beta$	87.0%	96.0%
遞增遞減觀念、	(C)若 $sin\alpha > sin\beta$ 則 $\alpha > \beta$ (D)若 $sin\alpha < sin\beta$ 則 $\alpha < \beta$	87.0%	88.0%
正弦函數值範圍	(E)對任意角θ，$\lvert sin\theta \rvert \leq 1$	76.0%	96.0%
平方關係和商數關係的應用	8. 已知$270^{\circ} < \theta < 360^{\circ}$，且 $sin\theta + cos\theta = \frac{1}{5}$，則(1) $tan\theta + cot\theta$之值為________	(1)87.0%	(1)87.5%
平方關係與值域的判斷	(2) $sin\theta$ 之值為________	(2)66.7%	(2)72.9%
廣義三角函數定義或換角公式	9. 試求下列三角函數值 (1) $sin585^{o}$ (2) $cos2100^{o}$ (3) $tan(-585^{o})$	(1)87.0% (2)87.0% (3)91.3%	(1)87.5% (2)91.7% (3)87.5%

註：因為上課人數偶有增減，故以當天進行測驗之人數來計算上述答對率：控制組最少為 23、最多為 27 人，實驗組最少為 24、最多為 26 人。

學習成效 findings

從學習成效來看，本研究發現新順序是可行的，其證據如下：

①**整體成就測驗答對率：**兩組這 9 個大題中，根據測驗內容的 14 個不同概念分成 14 題。每一題以 10 分計算，若有小題則均分計算，滿分 140，再轉換成滿分為 100 分。得到每位學生得分之後計算各組平均分數分別為控制組 83.34，實驗組 90.66，再以 t 檢定比較的結果達顯著差異($t = -0.202$, $p=0.049/2=0.025<0.05$，單尾檢驗 H_0：實驗組$\mu \le$控制組μ)。顯示在不同的教學順序下，實驗組學生的整體學習成效較控制組優異。所以新順序在重要概念的學習上，能有較佳的學習成效，表示從學習成效來看，新順序的教學可行的。

表 4-2-2：成就測驗題兩組學生總分 t 檢定結果

Group Statistics

	No	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
score	1	24	83.3404	13.43858	2.74314
	2	25	90.6609	11.90421	2.38084

Independent Samples Test

	ene's Test for Equa of Variances		t-test for Equality of Means						
								% Confidence Interv of the Difference	
	F	Sig.	t	df	ig. (2-tailed	ean Differen	Std. Error Difference	Lower	Upper
score Equal variances assu	.105	.747	-2.020	47	.049	-7.32044	3.62312	4.60923	-.03166
Equal variances not			-2.015	45.798	.050	-7.32044	3.63225	4.63265	-.00824

以下就有明顯差異的各概念分開來看:

②**一開始即引入廣義三角函數定義是可行的：**以測驗題 5 而言，給坐標平面上的一點，當已知其與原點距離及 y 坐標時，求此點的 x 坐標及此點所在其終邊的角之 $cos\theta$值，這時學生要正確求出兩個 x 的可能值，並依照定義寫出 $cos\theta$之值。結果發現，實驗組的答對率比控制組高了將近一成，在沒學過銳角三角函數的情形下，一開始就接觸廣義三角的定義，就能有

84%如此高的答對率，而且兩組所花在此定義上的時間相同，可見先學廣義三角函數定義的效果不會比舊順序差。

這個情形也發生在測驗題 9 的結果中。給不同象限的角，分別求出給定的三角函數值，學生需先求出題目所給的角之同界角，再由定義或使用換角公式求值。學生作答的情況是同界角部分，控制組全對，實驗組有一位錯誤，求值部分兩組皆在 87%到 91%的答對率，可見學生對新順序的接受度和掌握及使用的成效良好。

③新順序克服了舊順序的迷思概念：我們從測驗題 5 的錯誤類型比較發現，控制組的錯誤都是少了第二象限的那一組解(6 位)，而實驗組主要是計算錯誤(4 位中占 2 位)。控制組顯現出，在感知『P(x,2)是角θ終邊上一點』的敘述時，對角θ的位置判斷沒能跨出第一象限的銳角，相對地實驗組便沒有此現象。這顯示了新順序可以克服舊順序裡，學生受銳角三角函數定義影響而有的迷思概念:習慣僅考慮函數值為正的情況。5(1)題兩組學生表現如下，t 檢驗未達顯著水準(t=-1.153,p=0.255>0.05)

表 4-2-3：成就測驗第 5(1)題兩組學生 t 檢定結果

Group Statistics

	no	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
V2	1	25	.76	.436	.087
	2	26	.88	.326	.064

Independent Samples Test

		vene's Test for Equal of Variances		t-test for Equality of Means					% Confidence Interv of the Difference	
		F	Sig.	t	df	ig. (2-tailed	ean Differen	Std. Error Difference	Lower	Upper
V2	Equal variances assu	5.750	.020	-1.159	49	.252	-.125	.107	-.341	.091
	Equal variances not a			-1.153	44.409	.255	-.125	.108	-.342	.093

④對於三角函數的多對一特徵學習，是可行的：測驗題 7 中有五個選項，請學生判斷正確與否。其中(A)為正弦函數角與值的多對一性質，控制組有三位錯誤，實驗組僅一位，答對率分別為 87.0%、96.0%，實驗組表現優於控制組；(B)為函數基本性質，答錯的僅有控制組一位；從上述表現看出，

相對於控制組，實驗組學生對於新順序的學習成效相當良好。若將兩題合併計算，各占 50 分，總分 100 分，則兩組學生平均成績如下，t 檢驗未達顯著水準(t=-1.595,p=0.124>0.05)

表 4-2-4：成就測驗第 7(A)(B)題兩組學生 t 檢定結果

Group Statistics

	no	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
AB	1	21	.88	.269	.059
	2	25	.98	.100	.020

Independent Samples Test

		ene's Test for Equa of Variances		t-test for Equality of Means						
									% Confidence Inter of the Difference	
		F	Sig.	t	df	ig. (2-tailed	ean Differen	Std. Error Difference	Lower	Upper
AB	Equal variances assu	13.666	.001	-1.706	44	.095	-.099	.058	-.216	.018
	Equal variances not			-1.595	24.620	.124	-.099	.062	-.227	.029

⑤遞增遞減觀念的學習，是可行的: 測驗題 7 中(C)(D)為正弦函數的遞增遞減概念，兩組各有三位錯誤，答對率分別為 87.0%、88.0%，表現相當。

⑥正弦函數值域觀念，是可行的：測驗題 7 中(E)測驗正弦函數的值域，控制組有五位錯誤，實驗組僅一位，答對率分別為 76.0%、96.0%，實驗表現較佳。

表 4-2-5：成就測驗第 7(E)題兩組學生 t 檢定結果

Group Statistics

	no	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
E	1	21	.76	.436	.095
	2	25	.96	.200	.040

Independent Samples Test

		ene's Test for Equa of Variances		t-test for Equality of Means						
									% Confidence Inter of the Difference	
		F	Sig.	t	df	ig. (2-tailed	ean Differen	Std. Error Difference	Lower	Upper
E	Equal variances ass	22.112	.000	-2.033	44	.048	-.198	.097	-.395	-.002
	Equal variances not			-1.918	26.979	.066	-.198	.103	-.410	.014

⑦新順序可以降低學生的『銳角強迫症』：測驗題 7 中 ABCD 選項的題目中沒有特別指出角的大小，所以應以所有象限角的可能性來判斷。在事後師生檢討這份測驗卷時，控制組的三位錯誤的同學都表示，作答時直覺地只考慮了銳角的狀況就選答，完全沒有意識到還有廣義角的情形-----我們認為，這是先教廣義三角函數的優勢，學生若能直覺地就以廣義角的範疇來思考廣義角的問題，而不是藉由銳角來思考，所以容易有完整而正確的概念。

⑧在性質的應用方面，新順序是可行的：測驗中也安排三角函數單元中常見的性質應用：測驗題 6 (餘角關係)及測驗題 8。後者的題目中，學生必須先看出 $\sin\theta+\cos\theta$ 和 $\tan\theta+\cot\theta$ 之間有商數關係可以轉換，再利用平方關係求出 $\sin\theta\times\cos\theta$ 及 $\sin\theta-\cos\theta$ 之值，最後由角的範圍判斷 $\sin\theta-\cos\theta$ 的正負-----將數個概念混合測驗，在課程中已屬於難度較高的題型，計算也比較繁複，結果兩組的答對率分別為(1)87.0%(2)66.7%及(1)87.5%(2)72.9%，顯示新順序教學可以達到和舊順序相同的水準。

⑨廣義三角函數定義的 cscx 計算，新順序稍差：第 3 題給一角之終邊上一點的坐標，求此角之 csc 函數值，傳統順序組在第三天施測、新順序組再第一天施測，答對率分別為 92.0%、80.8%，t 檢驗未達顯著水準($t=1.158, p=0.253>0.05$)，差異不顯著。其中，新順序組錯誤的 5 位學生中就有 2 位有拼字上的錯誤，我們推測可能是適應新符號的時間不夠，因為在後續幾天的題目中，需要符號運用的如第 4(3)、6 題中，答對率便有了提升，尤其是 4(3)題的差異更達顯著水準($t=-2.356, p=0.023<0.05$)。因此，從整個學習成效來看，新順序仍為可行。

表 4-2-6：成就測驗第 3 題兩組學生 t 檢定結果

Group Statistics

	no	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
第三題	1	25	.92	.277	.055
	2	26	.81	.402	.079

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
第三是	Equal variances assumed	5.900	.019	1.158	49	.253	.112	.097	-.083	.307
	Equal variances not assumed			1.166	44.482	.250	.112	.096	-.082	.306

表 4-2-7：成就測驗第 4(3)題兩組學生 t 檢定結果

Group Statistics

	no	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
4(2)	1	24	.58	.504	.103
	2	24	.88	.338	.069

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
4(2)	Equal variances assumed	24.080	.000	-2.356	46	.023	-.292	.124	-.541	-.042
	Equal variances not assumed			-2.356	40.214	.023	-.292	.124	-.542	-.042

綜合上述分析，由測驗題的表現，可知新順序是可行的，並在廣義三角函數定義及函數性質的概念學習上具有優勢。

學生的情意面向 findings(學習態度等)

情意探測的題目被安排在第三天作業中的最後一題，隔天之後自由繳交給教師，學生繳交時間不一，並不強制繳交。結果控制組 26 位同學中有 16 位繳交，而實驗組 27 位同學中有 17 位繳交。

題目：請寫出目前為止，你學習三角函數這個單元的困難或感想。

結果分析：

對於「學習三角函數這個單元的困難」，可以發現學生對三角函數實體的負面印象常伴隨著負面的自我數學能力印象出現：產生困難歸因於是自我能力或努力不夠，或是教材太難；如果從教材內容的面向來看，發現下列現象：

(1)公式觀念多易搞混、要背、容易忘---實驗組的感覺比控制組弱

許多學生感覺學習三角函數時，公式和觀念很多會混淆、要背(記)。

表 4-2-8：回饋卷關於「困難」的比較

A2: 背。 A5: 目前最大的困難就是"背"吧! A6: 要背的東西好多喔！ex:$sin\theta$=對/斜，$sin\theta=y/r$，$sin(90^0+\theta)=cos\theta$… A11: 公式學多了，常背不起來。 A8: 學習三角函數的困難在於背誦，我記憶力不好會搞混。 A15: 好多$-\theta$、$180^o+\theta$，還有許多東西都搞在一起了 A1: 許多觀念加起來很容易搞混。 A3: 有的時候廣義角會混亂思緒啊！ A14:公式很多容易背錯 A17:須寫很多練習才能熟練	B2: 要背好多東西真麻煩， … B15: 公式好多唷！而且又都要背….. B9: 要背的東西有點多，每個也很相似，很容易就搞混，至今還是亂糟糟的。 B8:太久沒碰容易忘

控制組 26 位裡，主動回饋的 16 位同學中有 10 位主動提到覺得有困難，如需要「背誦」、公式和觀念容易混淆，占 56.3%，但在實驗組 27 位裡，主動回饋的 17 位中只有 4 位主動提到，占 23.5%。由此可見，本實驗中，新順序教學讓學生對『三角函數』單元的記憶負擔感覺比較少。

研究者認為這個差異可能是在解題面向，當傳統順序先學銳角三角函數時，解題時只需考慮銳角的範疇，在學到廣義三角函數時，過程中要多

一層考慮廣義角所帶來的性質，才能順利解題；反觀新順序組一開始的解題考量，便可以適用到銳角這個特例的狀況，不會感到「要多學一套」，這應該是造成新順序組感覺記憶負擔少的原因。

(2)學習後實驗組對學習三角函數的態度持正面者較多

控制組中 17 位裡有 5 位主動表達正面的態度，占 29.4%，2 位為負面態度，占 11.8%。實驗組 16 位裡有 11 位主動表達正面態度，占 68.8%，1 位為負面態度，占 6.3%。

分析時以學生回饋的整體來判準是正面或負面，如果文中同時出現正面與負面的反應，則界定為中性。並將對三角函數教材感覺困難的排除在負面態度之外。

表 4-2-9：回饋卷關於「正負面態度」的用語

控制組	態度	實驗組
用語(人數)		用語(人數)
很好玩(1) 老師上課很有活力…上課很愉快 (1) 沒有任何困難(1) 比想像中簡單(2)	正面	感覺真是棒透了(1) 很愉快，收穫很多(3) 很 lucky(1) 學習很順利(2) 三角函數想必有它一定的價值(1) 比想像中簡單(3)
體會不出有什麼價值⋯好像我連函數是什麼都不懂(1) 有時候上課會想睡覺(1)	負面	上課好想睡(1)

整體而言，與控制組相較，實驗組感覺在學習上並沒有遭遇太大困難，學習是順利的。

教學過程順利與否

教師在教學過程中，透過與學生的互動、課堂紀錄、感受到教學是否

順利。

a. 上課講述與拋問時，兩組的學生大致都能有所回應，常能聽到回答或見到點頭的反應，對於某些較複雜的狀況，師生之間也有討論的情況。但在進入第四天教學時，傳統順序學生感覺反應變慢，不僅有一位學生在課堂上睡覺，也有許多學生對於較難的題目會當場反應「好難喔!」。教師此時便放慢講課速度，但因為學生覺得難，積極態度轉為消極，致使課堂氣氛感覺較為沉悶；相反的，實驗組從第一節到最後一節都沒有出現這樣的狀況，感覺比較順利。

b. 教學中教師也安排了上台練習的教學活動，兩組同學也都能配合進行上台練習。

c. 作業的繳交與討論，兩組多數學生都能在隔日提出前一天教學後的作業中有問題的題目，由回收的作業中觀察，學生寫作業的態度，兩組認真的情形差不多。

d. 主動性：新順序組學生上課時，比較主動提問的有三位同學，傳統順序組僅有一位會主動問問題。

根據上述結果，表示從上課情形、師生互動、繳交作業狀況等方面來看，新順序組的教學是順利的。

第三節　學習遷移的差異

本研究設計了三個遷移題，這三題老師沒教過，希望探測學生是否會利用已建立的數學認知基模、策略，來解決尚未學習過的數學內容中之問題。

為什麼要比較學習遷移呢?我們是從兩種教材內容順序不同的教學來看的。因為教材順序的關係，會不會使得學習者腦海中的某些思維，其適用性比較廣？也就是說，對於新情境中，運用類似思維即可思考的內容，這種思維即可遷移運作到新情境？在可以在同類的概念中比較容易出現，所以容易產生遷移？同樣的，某種順序會不會使得有哪些概念的範圍是比較侷限、特定的，其應用的範圍小，就不容易產生遷移？

下面分成兩個角度來解析這些資訊：針對沒有學過的內容所布的題目，學生成功的解決這些問題了嗎(也就是遷移成功了嗎)？展現出的遷移品質為何(也就是學生的解題過程為何)？

一、　定義的學習遷移

我們想知道在不同的學習順序下，學習者能否進行適當的遷移，因此在教學中的這兩個點：從銳角三角函數定義擴展到廣義角三角函數定義(控制組)vs 從廣義角三角函數定義特殊化到銳角三角函數定義(實驗組)，分別安排了一個遷移測驗，觀察兩組的差異。

傳統順序中先學銳角三角函數，進行廣義角三角函數教學前，銳角的位置可以任意擺放；本研究在遷移題中先將一個銳角直角三角形放在坐標平面上的標準位置，並給出 P 點坐標，這是測試學生對於情境擴充到廣義

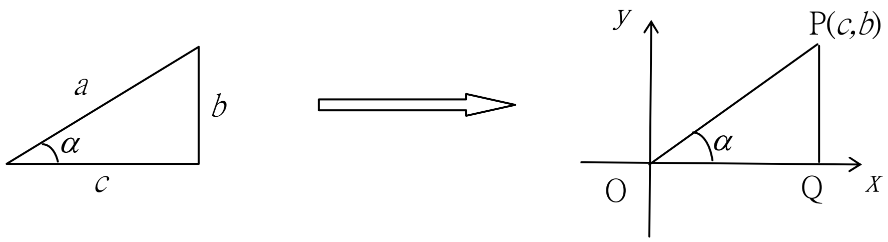
角的狀況，題目接著再給一個鈍角θ，並輔以一個內含的直角三角形提示，測試學生是否可以為此鈍角定義其三角函數。如果可以，表示從銳角到廣義角的定義中，「坐標化並擴大角度」這一過程並非難事。

控制組

題目：1.給定一個已知直角三角形，*a*、*b*、*c* 為其三邊長，如圖所示，若將此三角形放到坐標平面上，請問：

(1) 可不可以定義 $sin\alpha$? □可以 □不可以

(2)如果可以，怎麼定？如果不可以，為什麼？



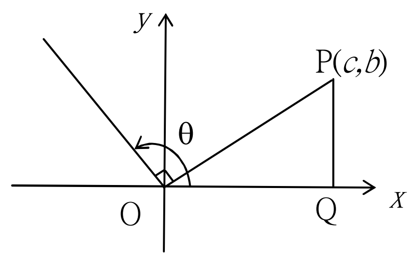
2.如圖，坐標平面上有一角θ，比直角三角形的一銳角大 90^o。

請問：

(1)可不可以定義 $sin\theta$？

□可以 □不可以

(2)如果可以，怎麼定？如果不可以，為什麼？



新順序中，在教銳角三角函數定義前，所接觸到的角都是標準位置角，但銳角三角函數裡的角是沒有在坐標上，而且可以任意擺放的。題目先安排一個直角三角形，內含兩個銳角α、β，問學生是否能夠定義 sinα，再問是否能夠定義 sinβ，藉由α的位置引導學生思考如何處理β的擺放。接著再給學生一個非標準位置角的銳角θ，這時與學生所學的情境不同，測試學生是否可以自行「將角度平移、旋轉、鏡射後，使得與原本的系統相

容」，如果可以，表示從廣義角到銳角的三角函數定義遷移是容易的。

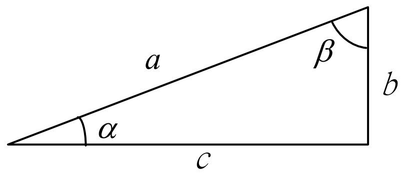
實驗組

題目：1.對於任意的直角三角形，設 a、b、c 為其三邊長，如圖所示，如果沒有坐標系，請問：

(1)可不可以定義 $sin\alpha$ 、 $sin\beta$？

□可以　□不可以

如果可以，怎麼定？如果不可以，為什麼？



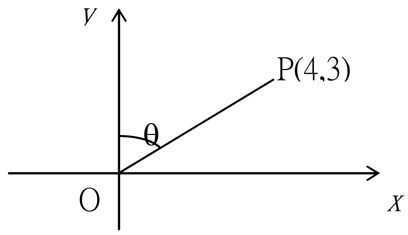
2.如圖，坐標平面上有一點 $P(4,3)$，$\overline{OP}$ 與 y 軸夾角為θ (θ為一正角)，

請問：

(1)可不可以定義 $sin\theta$？

□可以　　□不可以

(2)如果可以，怎麼定？如果不可以，為什麼？



1.遷移是否成功

我們將「能夠寫出正確的定義公式」或「 利用合理的方式定義(包含與正式定義不同)」視為遷移成功，則控制組沒有一位成功，而實驗組有 15 位成功，占 15/24=62.5%。這個結果顯示，對於定義的遷移，新順序的教學佔優勢。

2.遷移的品質為何

(1)控制組學生在問卷上，傾向做輔助線，試圖找出一個包含此鈍角的三角形，但因無法做出直角三角形所以無法給出合理的定義而無法遷移，因而可看出由銳角三角函數定義，平移、旋轉、鏡射的思維方式無法遷移到廣義角。圖中的坐標系，沒有發揮功效；反之，實驗組學生可以很容易的

將角度移動或翻轉到標準位置角，使其符合心中的概念心像，所以遷移成功的比例高。

(2)傳統順序的教材次序會使得學生認定定義的角度須包含在三角形內，此思考方式與與廣義角定義恰為相反的思考方式。

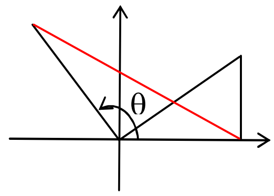


圖 4-3-1:錯誤的輔助線畫記

(3)從控制組學生的作答，發現學生從第 1 題的提示中，很難感知到坐標可以發揮的功效，在第 2 題的作答中，還是以將坐標連結到邊長來思考。

(4)從實驗組的作答中，發現 sinθ遷移成功的同學比 sinβ遷移成功的同學多了 4 位，此外，在勾選 sinβ不能遷移的 6 位同學中有 3 位認為因為「沒有坐標系，哪來的 x,y?」，有 2 位認為「無法確定三角形位於哪個象限，y 值會隨之不同，所以不能定義」，研究者認為這可以看出因為 sinθ這一題圖中有坐標軸的暗示，所以學生可以直接使用坐標系，因而增加了成功率。

表 4-3-1：定義遷移題策略類型分類表

<table>
<tr><td colspan="3">控制組</td><td colspan="3">實驗組</td></tr>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2">(2)</td><td>(1)</td><td colspan="2">(2)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">可以 16 人</td><td rowspan="2">遷移失敗</td><td rowspan="2">型一：作輔助線，利用直角三角形的邊長寫出公式(5 人)，但結果錯誤
型二：沒有定義，但圖上有標記或補助線(7 人)
型三：空白(4 人)</td><td rowspan="2">可以 21 人</td><td>遷移成功 15 人</td><td>型一：翻轉三角形(6 人)
型二：轉軸(5 人)
型三：利用 $90^{\circ}-\theta$(2 人)
型四：其他(2 人)</td></tr>
<tr><td>遷移失敗 6 人</td><td>型一：直接套用 $\frac{y}{r}$(4 人)
型二：令 y 軸為始邊(1 人)
型三：利用 $90^{\circ}-\theta$(1 人)</td></tr>
</table>

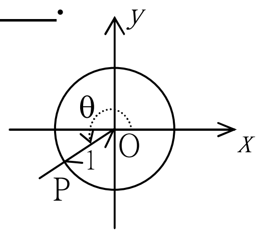
不可以 9 人	遷移失敗	型一：$\theta>90^{\circ}$(4 人) 型二：對邊和斜邊(3 人) 型三：其他(2 人)	不可以 2 人	遷移失敗	型一：始邊位置(1 人) 型二：矛盾(1 人)
1 人空白			1 人無效		(因爲出現對邊、斜邊的詞語，表示已學過銳角三角函數定義)

二、利用三角函數表示單位圓上的點座標

在坐標平面上點用三角函數表示的技能，可用在圓的參數式、極式等概念，但在剛教三角函數時，並不包含這個內容；點的坐標都是以實數對(x, y)來表示;本研究探測學生在學過三角函數後是否可自行遷移得出以θ之函數表示點。本研究因此設計下面這一題：給一個第三象限角θ，取其終邊與單位圓的交點 P，求以θ的三角函數值來表示 P 點的坐標。這是在測驗前的教學中沒有出現過的情境，學生在僅有基本定義的數學知識下，會不會將三角函數值「比值、隨角度而變、本身有正負值」的內涵應用在解題中，為遷移是否成功的關鍵。

題目 3：如圖,圓半徑為 1,θ為第三象限角,則點 P 坐標為_________.

(以θ的三角函數值表示)



1.遷移是否成功?

我們將「寫出一般式(cosθ,sinθ)」以及「以及寫出特殊角如”當$\theta=210^{\circ}$時，$P(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$”」視為遷移成功，則控制組有 16 位成功，占 16/25=64.0%，而實驗組有 19 位成功，占 19/26=73.1%。

2.遷移品質為何?

控制組 9 位沒有遷移成功的同學中，有 5 位是受到了銳角的干擾：會認為要再加正負號(3 人)、定義中的 $sin\theta$ 對應到 x 坐標值(2 人)。另外的同學則是其他數學觀念的錯誤或是空白。雖然控制組在測驗前的教學中，舉出的例子涵蓋了每一象限的情形，也做了相當的練習，但仍然出現這樣的類型錯誤。反觀實驗組的 5 位沒有遷移成功的同學則都是其他數學觀念的錯誤或是空白，可見傳統順序的某些學生心中，已建立好的銳角三角函數概念，在推廣到廣義角時，其正負值和定義優先順序(會認為 sinθ 對應到 x 坐標值)，會產生阻礙。

表 4-3-2：利用三角函數表示單位圓上的點坐標遷移題作答類型分類表

控制組(25 人)		實驗組(26 人)	
遷移成功 16 人	A.得出正確答案($cos\theta$,$sin\theta$)(16 人)	遷移成功 19 人	A. 得出正確答案($cos\theta$,$sin\theta$) (15 人) B. 解答爲非正規型態 型一：寫出固定的坐標，代特殊角 如(-1,-1);$(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$；$(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$(4 人)
遷移失敗 9 人	B.解答爲非正規型態 型一：將表示坐標的函數值加負號 P($-cos\theta$,$-sin\theta$)(3 人) 型二：定義背錯 $sin\theta=\frac{x}{r}$ 、$cos\theta=\frac{y}{r}$ (2 人) C.有嘗試但沒有寫出答案(3 人) D.空白(1 人)	遷移失敗 7 人	B. 解答爲非正規型態 型二：其他數學知識錯誤(2 人) C. 有嘗試但沒有寫出答案(3 人) D. 空白(2 人)

三、預測函數遞增及遞減的性質

三角函數有一個重要性質：在不同的區間遞增、遞減。在一般教材中，是安排在函數圖形出現後才會詳加介紹的，我們設計這個題目，在學生僅有基本定義概念時，要學生自行判斷：若角度位於第一象限時，遞增遞減的性質是否成立，題目中沒有任何圖形的暗示，僅說出兩個 45^{o} 以內不同大小的角，要比較兩者的 *sin* 值大小，想看看兩組學生會各有怎樣的表現？

題目 4: **若 $0^{o} < x < y < 45^{o}$，下列何者正確?__________________**

(A) $sinx < siny$

(B) $sinx > siny$

(C) $sinx \le siny$

(D) $sinx \ge siny$

(E) 不能確定，視 x、y 的值而定。

1.遷移是否成功?

本研究界定學生以正確的思考過程，即「正確利用 $sin\theta$比值特性，固定分子或分母其中一項，再比較另外一項，**得到一般性結果**」，且答案類型為 A 或 AC 者視為正確遷移。**實驗組有 10 人**(10/26=38.5%)**，控制組有 8 人**(8/27=29.6%)正確遷移。

2.遷移品質為何?

在答對的同學中，控制組在圖形運用成功的策略上，只有限制斜邊一樣長的一種策略，沒有其他的變化。實驗組則在控制比值的地方，圖形遷移的情形比較多樣：有的會畫圓弧，有的畫一水平線以使 y 值相等，也有的畫鉛垂線使 x 值相等共三種成功策略。

在答錯的同學中，實驗組有 7 位同學是嘗試將角度或三角形疊合並固定 x,y 或 r 的一個變數，這些學生雖然最終無法正確遷移，但其思考是符合遷移的思考方向的。反觀控制組同學，這類的學生只有一位。反而有另 8 位同學用了「將 x,y 兩個角畫在同一個三角形內」，再配合「大角對大邊」的不正確方法解題，如圖 4-3-2。這種思考是無法邁向正確遷移的，尤其是當角度大於 90^{0} 時。

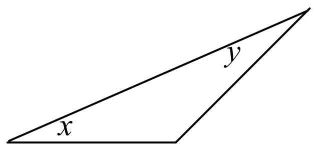
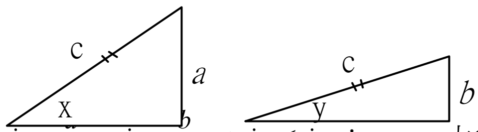
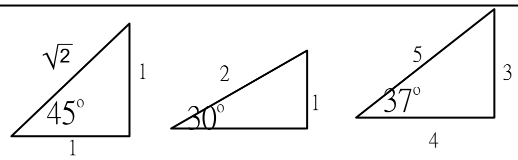
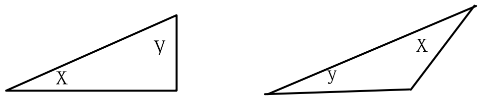
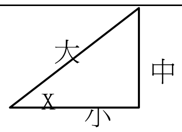
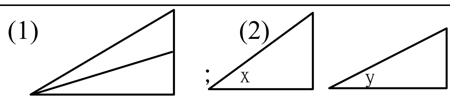


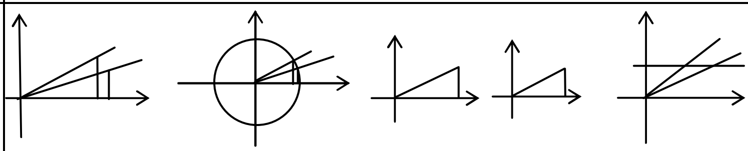
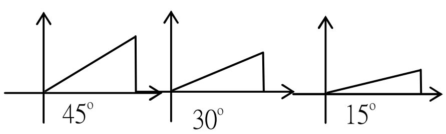
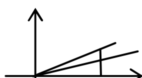
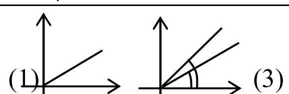
圖 4-3-2：錯誤的遷移策略之一

表 4-3-3：預測函數遞增及遞減的性質遷移題的作答圖示分類表

控制組

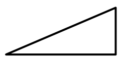
類型	內容	人數
A. 畫出兩個斜邊相等的直角三角形	 $sinx=\frac{a}{c}$，$siny=\frac{b}{c}$ $\Rightarrow sinx<siny$； 大角對大邊；	8 人
B. 利用特殊角	 $0<x<y<45^{o} \Rightarrow x=20^{o}$，$y=30^{o}$	4 人
C. 將 x,y 兩個角畫在同一個三角形內		8 人
D.只知道邊角關係		1 人
E.有圖形但不清楚想法		3 人
F.沒有圖形和敘述便作答	內容空白但有勾選選項	3 人

實驗組

類型	內容	人數
A. 畫出兩個角，但非特殊角	 (3) r 相等(5) r 相等(1) y 相等 (1)	10 人
B. 利用特殊角 30°		4 人
C. 圖形中使兩三角形的鄰邊相等		4 人
D.有圖形但不清楚想法		4 人
E.沒有圖形和敘述 便作答	$\frac{y}{r}$	4 人

此外，本研究在分析資料時，發現此次教學上的小缺失:在三個遷移題的資料解析中，我們發現學生的表現有兩個現象，是教學過程中沒有處理好所致，特別提出供大家參考：

1.原本以為在函數遞增概念的遷移題上，實驗組會佔優勢，結果卻不如預期。如果學生會以畫圓弧的方式固定 r 值，則很容易比較出 y 值的遞增遞減情形，但研究者發現會畫出圓弧的實驗組同學不多，只有 5 位。而由教師反思及學生筆記中發現，教師雖然在所舉例子裡大量的出現圓弧，可是在給定義的時候，圖裡沒有出現圓弧，這可能致使學生不容易產生「使 r 相等」的想法，造成實驗組多樣的策略，而降低成功遷移的機會，沒有預期的表現好。這是此次研究者教學上的缺失。

2.學生畫出來的直角三角形都是同一個方向?與上課時使用的例題和示範有關嗎? 研究者省思並查證(學生所抄的筆記)的結果是，雖然在上課時，有做各種方向的直角三角形練習，可是因為在教定義的時候，是用這個  形狀的三角形，沒有多強調其他方向的直角三角形定義，可見「典範例」所帶來的第一印象是很強烈的，老師在教學時不可不慎。