

### 第三章 理論基礎

理想的電介質在外加電場的作用下，是一個理想的電容器，但因晶體上的離子、缺陷運動或電偶極的轉向，將使得電介質呈現導電的性質和介電的性質，以下就電介質的導電和介電性質的成因作討論。

#### 3.1 晶體的導電原理

在實際晶體中，隨著溫度的增加，原子或離子的振動會更為劇烈，且晶格的週期性將被破壞，統稱為「點缺陷 (point defect)」，就其造成缺陷的來源，一般可將分為內在缺陷(intrinsic defects)與外在缺陷(extrinsic defects)兩類

1. 內在缺陷：在未加入任何額外的原子時，原有的原子因為熱振動而造成的缺陷，又稱為「本徵缺陷」。

A. 弗倫克爾缺陷 (Frenkel defect)<sup>(24)</sup>：1926 年 J. Frenkel 提出當溫度升高時，原子會脫離其平衡位置，而跑到間隙中，產生相等數目的空位 (vacancy) 和填隙原子，如圖 3.1-1 (a) 所示。

B. 肖特基缺陷 (Schottky defect)<sup>(25, 26)</sup>：1931 年 W. Schottky 提出晶體內部原子脫離其平衡位置時，並不在晶體內部構成填隙原子，而是會跑到晶體表面上正常格點的位置，構成新的一層。因此，晶體內部只有空缺存在，而無填隙原子，如圖 3.1-1 (b) 所示。

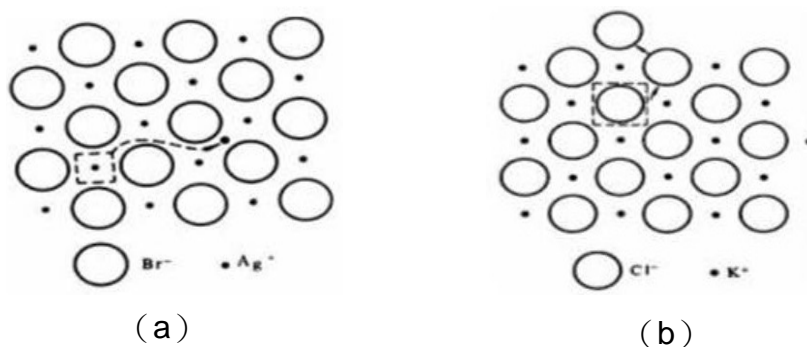


圖 3.1-1 (a) Frenkel defect (b) Schottky defect

2. 外在缺陷：將外來的原子加入基質晶體內部而造成的缺陷，又稱為「雜質缺陷」。

A. 填隙缺陷 (interstitial defect)：若雜質原子半徑較其間隙小時，將可擠進其點陣的間隙之中，成為填隙式的原子，如圖 3.1-2 (a) 所示。

B. 替換缺陷 (substitutional defect)：雜質原子取代部分基質原子，成為代替式原子，將可形成額外的電子或電洞，如圖 3.1-2 (b) 所示。

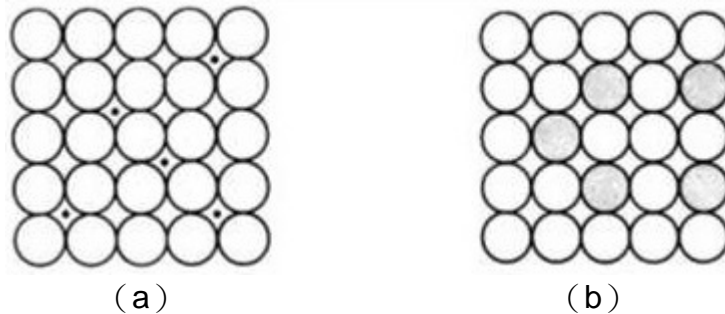


圖 3.1-2 (a) interstitial defect (b) substitutional defect

在離子晶體中，晶體內的填隙原子或空位在外電場正、反兩方向的躍遷機率不等，因而產生漂移電流。晶體內部缺陷的移動歷程則可分為空位移動歷程 (Vacancy mechanism) 與填隙離子移動歷程 (Interstitial mechanism)；前者指的是離子由晶格正常位置跳躍至鄰近等效空位位置，如圖 3.1-3 (a) 所示，後者則是間隙離子跳躍至另一個等效間隙位置，如圖 3.1-3 (b) 所示。

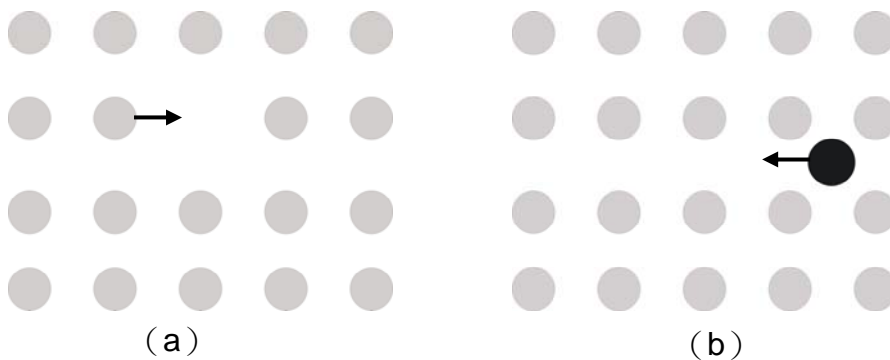


圖 3.1-3 Hopping Model (a) 空位歷程 (b) 填隙原子移動歷程

原子在晶格點間跳躍時，與周圍其他離子會互相作用，因此，離子跳躍時必須克服最低的位能障礙(potential barrier)  $E$ ，才能完成移動的歷程，這個能量亦稱為活化能 (activation energy)，稱此為 Hopping model。

若離子導電時遵循 Hopping model，則離子導電率  $\sigma$  和絕對溫度  $T$  的關係可用 Arrhenius formula 來描述

$$\sigma T = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

其中  $\sigma_0$  為前置因子(pre-exponential factor)， $k_B = 8.627 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$  為波茲曼常數 (Boltzmann constant)， $E$  為活化能。將 Arrhenius formula 兩邊都同取對數，可得一線性關係式

$$\ln(\sigma T) = \ln \sigma_0 - \left(\frac{E}{k_B}\right) \frac{1}{T}$$

因此，做  $\ln(\sigma T)$  對  $\frac{1}{T}$  圖，理論應為一斜直線，藉由直線斜率可以求得活化能  $E$ 。

依照導電成因的不同，晶體受溫度的影響也有所差別：

1. 外在缺陷：外加的缺陷離子密度大致維持一定，所以是溫度較低時主要的導電因素，因此，離子活化能可以用導電活化能表示。
2. 內在缺陷：隨著溫度的升高，Frenkel 和 Schottky 缺陷的缺陷密度均會增加，故在高溫時內在缺陷的導電因素將不可忽略。

綜合外在缺陷和內在缺陷的因素，離子活化能  $E$  包括了導電活化能  $E_a$ 、Frenkel 空位-間隙對生成能  $E_f$  以及 Schottky 空位對生成能  $E_s$ 。因此，Arrhenius formula 可改寫成下式

$$\sigma T = \sigma_0 \exp\left[-\left(E_a + \frac{1}{2}E_f + \frac{1}{2}E_s\right) \frac{1}{k_B T}\right]$$

### 3.2 晶體的介電原理<sup>(27)</sup>

外加電場作用時，物質其電極化強度發生變化，此類物質即稱為「電介質

(dielectrics)」。電介質物理主要在研究介電質內部束縛電荷，在電或光的作用下電極化的過程，進而推論電極化規律與介電質結構的關係。

### 3.2.1 介電極化 (dielectric polarization)

將電介質放在外電場中，電介質內部會出現沿電場方向的宏觀電偶極矩，並在介質表面產生束縛電荷，此現象稱為「介電極化」。

介電極化的微觀機制可分為四種：

1. 電子位移極化：在外電場作用下，電子雲的重心相對於原子核發生微小位移，產生感應電偶極矩。
2. 原子或離子位移極化：電介質中的分子由不同原子組成，電子雲在不同原子間的分佈是不對稱的。在外電場作用下，具有不同電極性的原子將發生相對位移，產生感應電矩。
3. 取向極化：極性電介質分子具有固有電偶極矩，在外電場作用下，固有電偶極矩受到力矩作用而沿電場方向排列，形成電偶極矩。
4. 空間電荷或界面極化：實際電介質由於成分或結構不均勻而存在界面或各種缺陷。在外電場作用下，電介質內部空間電荷在移動過程中，可能被缺陷捕捉或是在界面上累積，使得空間電荷分佈不均勻而形成電偶極矩。

介質極化狀態可以用極化強度  $\bar{P}$  表示， $\bar{P}$  定義為單位體積電偶極矩的向量和。

### 3.2.2 介電常數 $\epsilon$ (dielectric constant)

介電常數是綜合反映介質內部電極化現象的宏觀物理量。當介電質在外加電場  $\bar{E}_0$  作用下，介質極化並產生一極化強度  $\bar{P}$ ，而  $\bar{P}$  又在介質內部產生一電場  $\bar{E}'$ ，則介質內部總電場  $\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}'$ ，定義電位移  $\bar{D}$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

其中  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  稱為真空中介電常數（或電容率）。在一般介質中，極化強度  $\bar{P}$  正比於該處的總電場  $\bar{E}$

$$\bar{P} = \chi \epsilon_0 \bar{E}$$

其中  $\chi$  稱為介電極化率。因此，電位移可改寫為

$$\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E} = \epsilon \bar{E}$$

其中  $\epsilon_r (= 1 + \chi)$  稱為介質的相對介電常數， $\epsilon$  稱為介質的介電常數。

若外加電場  $\bar{E}_0$  不隨時間變動，上述的相對介電常數  $\epsilon_r$  可以稱為靜態介電常數  $\epsilon_s$ ；反之，外加電場  $\bar{E}_0$  若隨時間變動，相對介電常數  $\epsilon_r$  稱為動態介電常數。

### 3.2.3 動態介電常數與介電弛豫 (dielectric relaxation) <sup>(28, 29)</sup>

外加電場隨時間變動時，介電質的極化也隨之改變，不過當電場變化頻率過高時，由於某種耗散力的存在，電極化的某些微觀過程（例如電矩的轉向過程）未必能跟的上電場的轉變，因而發生滯後現象，稱為介電弛豫。

在變動電場作用下，系統的電位移  $\bar{D}^*(\omega)$  和電場  $\bar{E}^*$  將有一個相位差  $\delta$ ，則

$$\bar{D}^*(\omega) = \bar{D}_0 e^{j(\omega t - \delta)}$$

在交變電場中，若將相對介電常數以複數  $\epsilon_r^*(\omega)$  表示（動態介電常數），則  $D^*(\omega)$  與  $E^*(\omega)$  有下面的關係

$$\bar{D}^*(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r^*(\omega) \bar{E}^*(\omega)$$

則動態介電常數  $\epsilon_r^*(\omega)$

$$\epsilon_r^*(\omega) = \frac{D^*(\omega)}{\epsilon_0 E^*(\omega)} = \frac{D_0}{\epsilon_0 E_0} e^{-j\delta}$$

且動態介電常數  $\epsilon_r^*(\omega)$  由實部  $\epsilon_r'(\omega)$  與虛部  $\epsilon_r''(\omega)$  組成

$$\epsilon_r^*(\omega) = \epsilon_r'(\omega) - j\epsilon_r''(\omega)$$

因此，可以分別得到

$$\begin{cases} \varepsilon_r'(\omega) = \frac{D_0}{\varepsilon_o E_0} \cos \delta \\ \varepsilon_r''(\omega) = \frac{D_0}{\varepsilon_o E_0} \sin \delta \end{cases}$$

對一般介電質， $\frac{D_0}{E_0}$  為  $\omega$  的函數，將上面二式相除可以得介電損耗因子

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'}$$

複數介電常數中的實部  $\varepsilon_r'$  是受交變電場影響的介電常數，虛部  $\varepsilon_r''$  則與介電質能量損耗成正比，損耗來源主要有以下四種可能

1. 固有電偶極矩轉向極化弛豫過程，分子間的摩擦和碰撞所產生。
2. 離子或空缺在兩平衡位置間躍遷而產生極化弛豫過程所產生。
3. 界面極化極化時，空間電荷在界面積聚的弛豫過程所產生。
4. 由於漏導（載子遷移所引起，在任何頻率下都可能產生）。

### 3.2.4 德拜方程式 (Debye equation)

若外加電場突然移去時，介電極化將隨時間衰減，考慮只有單一介電弛豫時間過程時，衰減函數可以表示為

$$\alpha(t) = \alpha(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

其中  $\tau$  為介電弛豫時間 (dielectric relaxation time)、 $\alpha(0)$  為剛加上電場的瞬時衰減。再利用 3.2.3 動態介電常數，可將動態介電常數改寫為下式

$$\begin{cases} \varepsilon_r'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ \varepsilon_r''(\omega) = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau}$$

，上式稱為德拜方程式，其中  $\varepsilon_\infty = \varepsilon_r'(\infty)$ ，稱為光頻介電常數，代表電子位移極化所對應的瞬時響應。

當  $\omega = \frac{1}{\tau}$  時， $\varepsilon_r''$  有極大值，其值為  $\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2}$ ；當  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$  時，則  $\varepsilon_r' \rightarrow \varepsilon_s$  且  $\varepsilon_r'' \rightarrow 0$ ；當  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ ，則  $\varepsilon_r' \rightarrow \varepsilon_\infty$  且  $\varepsilon_r'' \rightarrow 0$ ，此兩種情況均沒有介電損耗，由此可知  $\varepsilon_r'$  隨  $\omega$  增加從常數  $\varepsilon_s$  降至  $\varepsilon_\infty$ 。

### 3.2.5 介電譜 (dielectric spectrum)

複介電常數實部  $\epsilon'_r$  隨頻率  $\omega$  變化的曲線稱為「介質色散曲線」，虛部  $\epsilon''_r$  隨頻率  $\omega$  變化的曲線稱為「介質吸收曲線」，而  $\epsilon'_r$  與  $\epsilon''_r$  隨頻率  $\omega$  變化的曲線統稱為「介電譜」。

介電譜可分為兩種類型 (如圖 3.2-2 所示)

1. 弛豫型：在無線電頻段 ( $10^{10} \text{ Hz}$  以下)，電子和原子位移極化可以看成是瞬間完成，而轉向極化和空間電荷極化為引起極化弛豫主要機制。 $\epsilon'_r$  隨  $\omega$  增加從一較高常數緩慢下降 (反常色散區) 到另一常數，在反常色散區域伴隨著  $\epsilon''_r$  一個很寬的吸收區域。
2. 諧振型：在紅外光頻段 ( $10^{13} \sim 10^{14} \text{ Hz}$ )，轉向極化將跟不上，電子位移極化仍舊是無慣性的，而原子位移極化為引起極化弛豫主要機制。在可見光或紫外光頻段 ( $10^{15} \text{ Hz}$  以上)，原子位移極化將跟不上，而電子位移極化是主要機制。 $\epsilon'_r$  隨  $\omega$  增加從一常數經過一個正常色散區 ( $\epsilon'_r$  隨  $\omega$  增加而上升)，然後通過一個反常的色散區而到達另一個常數值。在反常色散區域伴隨著  $\epsilon''_r$  一個尖銳的吸收區域。

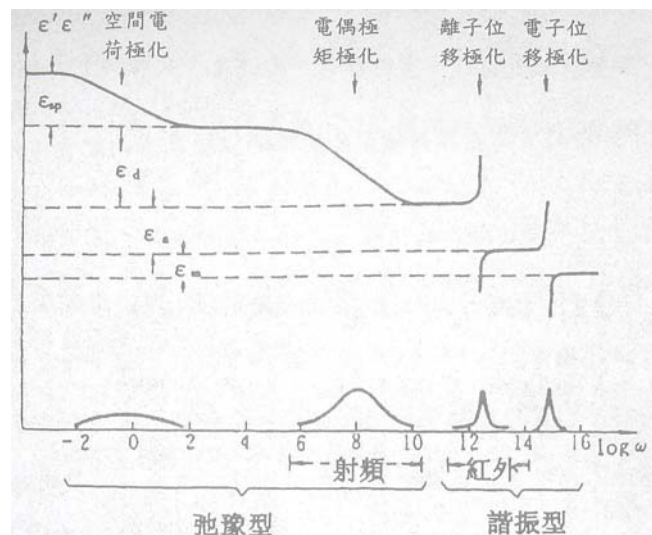


圖 3.2-2 凝聚態物質的典型介電譜

### 3.2.6 柯爾-柯爾圖 (Cole-Cole plot)

1941 年 K.S.Cole 和 R.H.Cole<sup>(30,31)</sup> 提出一種圖示法來表示複數介電常數  $\epsilon_r^*$ ，利用各頻率所得的介電常數實部  $\epsilon_r'(\omega)$  與虛部  $\epsilon_r''(\omega)$ ，在複數平面上作  $\epsilon_r'(\omega)$  對  $\epsilon_r''(\omega)$  圖，即稱為 Cole-Cole plot。

對單一弛豫時間介電弛豫，若把 Debye equation 消去  $\omega\tau$ ，即得到下面關係式

$$\left(\epsilon_r' - \frac{\epsilon_s + \epsilon_\infty}{2}\right)^2 + \epsilon_r''^2 = \left(\frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{2}\right)^2$$

當頻率  $\omega$  從 0 增加到  $\infty$ ，上述方程式在  $\epsilon_r'(\omega)$  對  $\epsilon_r''(\omega)$  複數平面上的軌跡為一圓心在  $\left(\frac{\epsilon_s + \epsilon_\infty}{2}, 0\right)$ ，半徑為  $\frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{2}$  的半圓，此半圓軌跡在實數軸上的交點分別為  $(\epsilon_\infty, 0)$  與  $(\epsilon_s, 0)$ ，如圖 3.2-3 所示

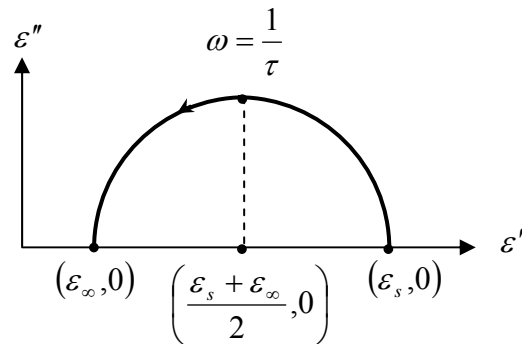


圖 3.2-3 單一弛豫時間的 Cole-Cole plot  
(箭號方向代表頻率增加)

### 3.2.7 多弛豫時間

對實際介質而言，其弛豫時間不會只有一個，往往分佈於一定範圍，Debye equation 可以改寫成

$$\begin{cases} \epsilon_r'(\omega) = \epsilon_\infty + (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \int_0^\infty \frac{F(\tau) d\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ \epsilon_r''(\omega) = (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \int_0^\infty \frac{F(\tau) \omega \tau d\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \end{cases}$$

其中  $F(\tau)$  為弛豫時間的分佈函數。



根據實驗所做的 Cole-Cole plot 圖形觀察，可以將 Debye equation 改寫為下面兩種不同的經驗式

### 1. Cole-Cole equation

K.S. Cole 和 R.H. Cole 提出用來描述多極性變化的液體和固體的 Cole-Cole equation

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (j\omega\tau)^{1-\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1)$$

在複數平面上作  $\varepsilon_r'(\omega) - \varepsilon_r''(\omega)$  圖，其軌跡為一圓心在

$$\left( \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2}, -\frac{1}{2}(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right), \text{ 半徑為 } \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{2} \sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \text{ 的一段圓}$$

弧，如圖 3.2-4 所示

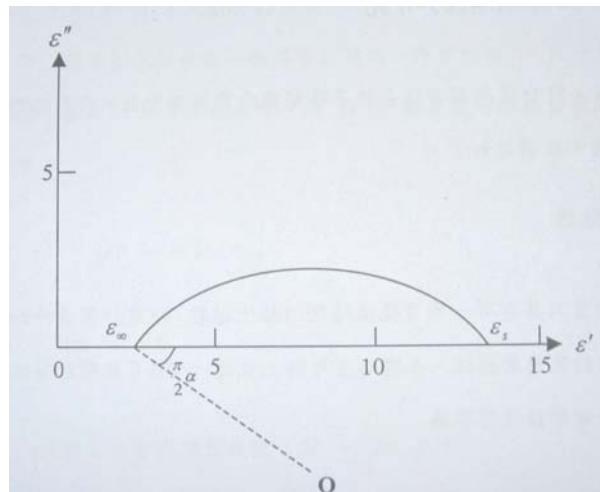


圖 3.2-4 Cole-Cole equation 的 Cole-Cole plot 圖 ( $\alpha = 0.5$ )

### 2. Davidson-Cole equation <sup>(31,32)</sup>

1950 年 Davidson 和 Cole 提出 Davidson-Cole equation

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{(1 + j\omega\tau)^\beta} \quad (0 < \beta < 1)$$

在複數平面作  $\varepsilon_r'(\omega) - \varepsilon_r''(\omega)$  圖，並不是以實部的  $\frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2}$  為對稱軸，而

是一個偏斜的圓弧，稱為斜弧 (skewed arc)，如圖 3.2-5 所示

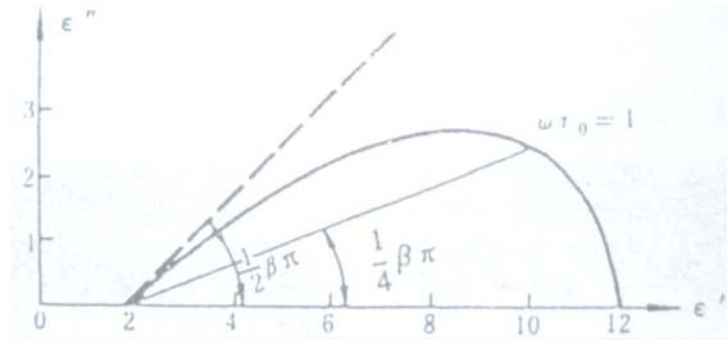


圖 3.2-5 Davidson -Cole equation 的 Cole-Cole plot 圖(  $\beta = 0.5$  )

### 3.3 晶體的等效電路

研究晶體受外加電場作用時，晶體內部所表現出的各種介電特性可能十分複雜，但藉由連結各種理想的電子電路元件，例如電阻、電容及電感等，可以模擬出多種的等效電路，如此一來，便能進一步分析、探討晶體的介電特性，再加以應用。

#### 3.3.1 各參數

1. 阻抗 (impedance)

$$Z = R + jX \quad (R \text{ 為阻抗實部, } X \text{ 為阻抗虛部})$$

2. 導納 (admittance)

$$Y \equiv Z^{-1} = Y' + jY''$$

$$Y = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

3. electrical modulus

$$M \equiv j\omega C_0 Z = M' + jM''$$

$$M = j\omega C_0 (R + jX) = -\omega C_0 X + j\omega C_0 R$$

其中  $C_0 \equiv \epsilon_0 \frac{A}{t}$  ( $\epsilon_0$  為真空中的電容率、 $A$  為電極板面積、 $t$  為兩電極板間距)

$$\Rightarrow M' = -\frac{\varepsilon_0 A}{t} \omega X \text{ 和 } M'' = \frac{\varepsilon_0 A}{t} \omega R$$

4. 相對介電常數(dielectric constant)

$$\varepsilon_r \equiv \frac{1}{M} = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r''$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{j\omega C_0 Z} = \frac{Y}{j\omega C_0} = \frac{1}{j\omega C_0} \left( \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} \right) \\ &= \frac{1}{\omega C_0} \left( -\frac{X}{R^2 + X^2} - j \frac{R}{R^2 + X^2} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r' = \frac{t}{\varepsilon_0 A} \times \frac{-X}{\omega(R^2 + X^2)} \text{ 和 } \varepsilon_r'' = \frac{t}{\varepsilon_0 A} \times \frac{R}{\omega(R^2 + X^2)}$$

5. 電阻率(electrical resistivity)

$$\rho = \rho' + j\rho''$$

$$\rho = \frac{A}{t} Z = \frac{A}{t} (R + jX)$$

$$\Rightarrow \rho' = \frac{A}{t} R \propto R \text{ 和 } \rho'' = \frac{A}{t} X \propto X$$

6. 導電率(electrical conductivity)

$$\sigma = \sigma' + j\sigma''$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{t}{A} \times \frac{1}{Z} = \frac{t}{A} \times Y = \frac{t}{A} \times \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

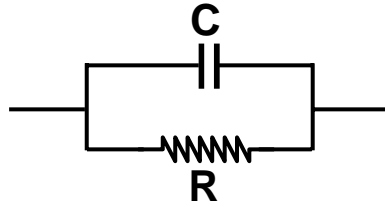
$$\Rightarrow \sigma' = \frac{t}{A} \times \frac{R}{R^2 + X^2} \text{ 和 } \sigma'' = \frac{t}{A} \times \frac{X}{R^2 + X^2}$$

### 3.3.2 各等效電路 (33, 34)

依據晶體導電及介電理論(3.1及3.2)，與晶體的介電特性有關的可分為導電弛豫、介電弛豫及電極板效應，以下討論一些常見等效電路。

### 一、單一導電弛豫

僅考慮晶體中離子和點缺陷所造成的導電效應，可近似為單一的 RC 並聯電路，如下圖所示



#### 1. 阻抗值

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\Rightarrow Z'(\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \text{ 和 } -Z''(\omega) = \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

#### A. 複阻抗譜 (complex impedance spectrum)

在複數平面上作  $-Z''$  對  $Z'$  圖，所得曲線即稱為「複阻抗譜」，將上述  $Z'(\omega)$  與  $-Z''(\omega)$  結合後可以得到下面方程式

$$\left(Z' - \frac{R}{2}\right)^2 + (-Z'')^2 = \left(\frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

。因此，可以得到一圓心位於  $(R/2, 0)$ 、半徑為  $\frac{R}{2}$  的半圓，如圖 3.3-1

所示，且半圓與實數軸交於  $(R, 0)$ ，此即為直流電阻值。

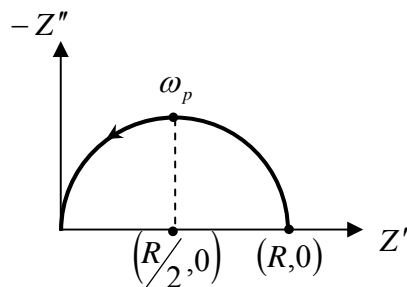


圖 3.3-1 單一導電弛豫複阻抗譜

(箭號方向代表頻率增加)

B. 阻抗實部、虛部對頻率  $\omega$  之關係 (如圖 3.3-2 所示)

定義導電弛豫時間  $\tau_\sigma \equiv RC$ ，則  $Z'(\omega)$  與  $-Z''(\omega)$  可化簡為下面兩式

$$Z'(\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2} \quad \text{和} \quad -Z''(\omega) = \frac{R\omega\tau_\sigma}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2}$$

I. 當  $\omega\tau_\sigma = 1$  時，則  $Z' = -Z'' = \frac{1}{2}R$ ，且此時  $-Z''$  為最大值。

II. 當  $\omega \gg \frac{1}{\tau_\sigma}$  時，則  $Z' = -Z'' \rightarrow 0$ 。

III. 當  $\omega \ll \frac{1}{\tau_\sigma}$  時，則  $Z' = R$ 、 $-Z'' \rightarrow 0$ 。

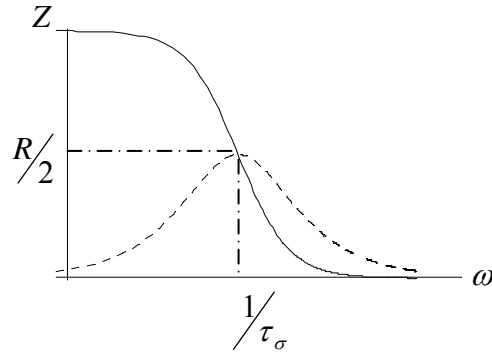


圖 3.3-2  $Z'(\omega)$  曲線 (實線) 及  $-Z''(\omega)$  曲線 (虛線)

2. 電阻率

$$\rho = \frac{A}{t} Z = \frac{A}{t} (Z' + jZ'') = \rho' + j\rho''$$

由此可知分析電阻係數實部  $\rho'$  與虛部  $\rho''$ ，其結果將與總阻抗類似，只是差一常數而已。

3. 導納

$$Y = \frac{1}{Z} = Y' + jY'' = \frac{1}{R} + j\omega C \quad \Leftrightarrow \quad Y' = \frac{1}{R} \quad \text{和} \quad Y'' = \omega C$$

4. 導電率

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{t}{A} Y = \frac{t}{AR} + j \frac{t}{A} \omega C = \sigma' + j\sigma''$$

- A.  $\sigma' = \sigma_0 = \frac{t}{AR}$  為直流導電率，其值與頻率  $\omega$  無關。
- B.  $\sigma'' = \varepsilon_0 \varepsilon_s \omega$ ， $\varepsilon_s$  為介質的介電常數，所以  $\sigma'' \propto \omega$ 。

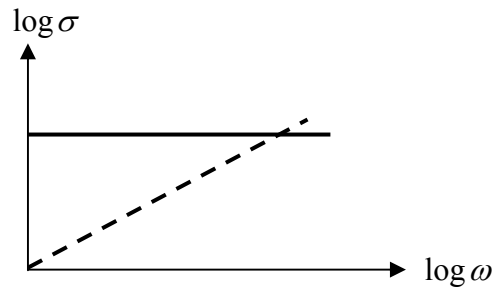


圖 3.3-3  $\log \sigma'$  對  $\log \omega$  (實線) 及  $\log \sigma''$  對  $\log \omega$  (虛線)

5. 相對介電常數

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0} = \varepsilon_s - j \frac{\sigma_0}{\omega\varepsilon_0} = \varepsilon_r' + j\varepsilon_r''$$

- A.  $\varepsilon_r' = \varepsilon_s$ ，其值與  $\omega$  無關。
- B.  $\varepsilon_r'' = \frac{\sigma_0}{\omega\varepsilon_0} \propto \omega^{-1}$ 。

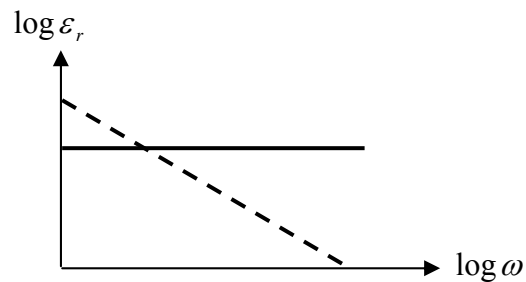


圖 3.3-4  $\log \varepsilon_r'$  對  $\log \omega$  圖(實線)和  $\log \varepsilon_r''$  對  $\log \omega$  圖(虛線)

## 6. Electrical modulus

$$M = \frac{1}{\epsilon_r} = \frac{1}{\epsilon_s} \cdot \frac{j\omega\tau_\sigma}{1 + j\omega\tau_\sigma} = M_s \cdot \frac{j\omega\tau_\sigma}{1 + j\omega\tau_\sigma} = M' + jM''$$

$$\left( \text{其中 } M_s = \frac{1}{\epsilon_s} \right)$$

$$M' = M_s \cdot \frac{\omega^2\tau_\sigma^2}{1 + \omega^2\tau_\sigma^2} \text{ 和 } M'' = M_s \cdot \frac{\omega\tau_\sigma}{1 + \omega^2\tau_\sigma^2}$$

- A. 在極低頻情況下， $\omega\tau_\sigma \ll 1$  則  $M' = M'' \rightarrow 0$ 。
- B. 在高頻的情況下， $\omega\tau_\sigma \gg 1$  則  $M' \approx M_s$ 、 $M'' \rightarrow 0$ 。
- C. 當  $\omega\tau_\sigma = 1$  時， $M''$  有最大值為  $\frac{1}{2}M_s$ 。

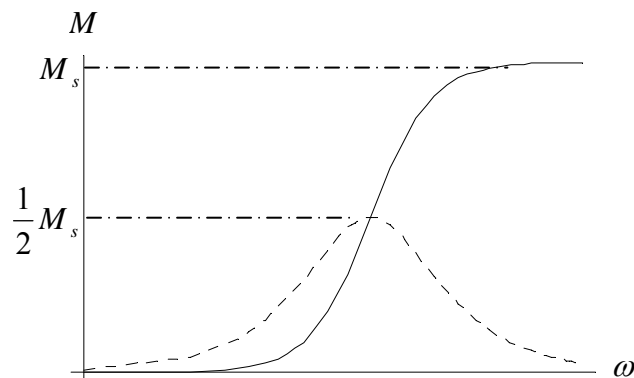
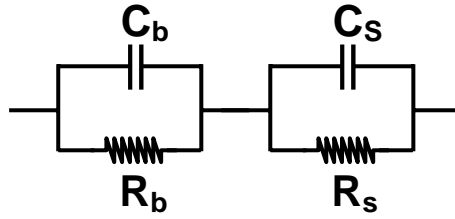


圖 3.3-5  $M'(\omega)$  曲線 (實線) 及  $M''(\omega)$  曲線 (虛線)

### 二、單一導電弛豫加電極板效應

晶體藉由離子的傳導而導電，當外加電場頻率很低時，離子會聚集在電極板上，產生和外加電場反向的電場，使得介電常數增大，這就是所謂的「電極板效應」。

考慮電極板的效應，其電阻值將隨溫度升高而增加，故在高溫下電極板效應將不可忽略。因此，可將電極板效應模擬成另一個  $R_s C_s$  並聯電路，再跟晶體電路 ( $R_b C_b$  並聯電路) 串聯，如下圖所示



1. 總組抗

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R_b} + j\omega C_b} + \frac{1}{\frac{1}{R_s} + j\omega C_s} = \frac{R_b}{1 + j\omega R_b C_b} + \frac{R_s}{1 + j\omega R_s C_s} = \frac{R_b + R_s + j\omega R_b R_s (C_b + C_s)}{(1 + j\omega R_b C_b)(1 + j\omega R_s C_s)}$$

$$= \left( \frac{R_b}{1 + \omega^2 R_b^2 C_b^2} + \frac{R_s}{1 + \omega^2 R_s^2 C_s^2} \right) - j \left( \frac{\omega R_b^2 C_b}{1 + \omega^2 R_b^2 C_b^2} + \frac{\omega R_s^2 C_s}{1 + \omega^2 R_s^2 C_s^2} \right)$$

其中  $R_b$ 、 $R_s$  分別為晶體和電極板的等效電阻，而  $C_b$ 、 $C_s$  為晶體和電極板的等效電容。此電路複阻抗譜為兩個半圓，高頻部分的半圓代表為晶體效應，低頻部分半圓為電極板所造成，如圖 3.3-6 所示

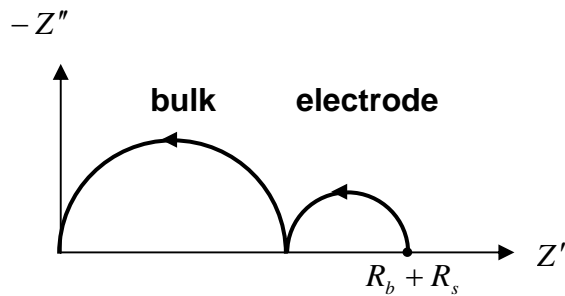


圖 3.3-6 單一導電加電極板效應的複組抗譜

(箭號方向代表頻率增加)

2. 導納

$$Y = \frac{(1 + j\omega R_b C_b)(1 + j\omega R_s C_s)}{R_b + R_s + j\omega R_b R_s (C_b + C_s)}$$

$$= \frac{R_b + R_s + \omega^2 R_b R_s (R_b C_b^2 + R_s C_s^2)}{(R_b + R_s)^2 + \omega^2 R_b^2 R_s^2 (C_b + C_s)^2} + j\omega \frac{R_b^2 C_b + R_s^2 C_s + \omega^2 R_b^2 R_s^2 C_b C_s (C_b + C_s)}{(R_b + R_s)^2 + \omega^2 R_b^2 R_s^2 (C_b + C_s)^2}$$

可將上式視為一 RC 並聯的等效電路，則  $Y = \frac{1}{R} + j\omega C$



$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{(R_b + R_s)^2 + \omega^2 R_b^2 R_s^2 (C_b + C_s)^2}{R_b + R_s + \omega^2 R_b R_s (R_b C_b^2 + R_s C_s^2)} \\ C = \frac{R_b^2 C_b + R_s^2 C_s + \omega^2 R_b^2 R_s^2 C_b C_s (C_b + C_s)}{(R_b + R_s)^2 + \omega^2 R_b^2 R_s^2 (C_b + C_s)^2} \end{array} \right.$$

一般來說，電極板電容會比晶體電容大的多 ( $C_s \gg C_b$ )，上面 R、C 值可以簡化為

$$\left\{ \begin{array}{l} R \approx \frac{(R_b + R_s)^2 + \omega^2 R_b^2 R_s^2 C_s^2}{R_b + R_s + \omega^2 R_b R_s C_s^2} \\ C \approx \frac{R_b^2 C_b + R_s^2 C_s + \omega^2 R_b^2 R_s^2 C_b C_s^2}{(R_b + R_s)^2 + \omega^2 R_b^2 R_s^2 C_s^2} \end{array} \right.$$

在高頻和低頻情況下，上面的 R、C 值又可再簡化為

- A. 高頻時， $R \approx R_b$  且  $C \approx C_b$ ，此時電路主要呈現出晶體效應。
- B. 低頻時， $R \approx R_b + R_s$  且  $C \approx C_s$ ，此時電路為晶體加上電極板效應。

### 3. 相對介電常數

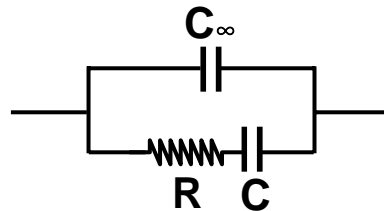
$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0} = \frac{t}{A} \cdot \frac{Y}{j\omega\varepsilon_0} \\ &= \frac{t}{A\varepsilon_0} \left[ \frac{R_b^2 C_b + R_s^2 C_s + \omega^2 R_b^2 R_s^2 C_b C_s (C_b + C_s)}{(R_b + R_s)^2 + \omega^2 R_b^2 R_s^2 (C_b + C_s)^2} - j \frac{R_b + R_s + \omega^2 R_b R_s (R_b C_b^2 + R_s C_s^2)}{\omega(R_b + R_s)^2 + \omega^3 R_b^2 R_s^2 (C_b + C_s)^2} \right] \end{aligned}$$

### 4. Electric modulus

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\varepsilon_r} = j\omega\varepsilon_0 \rho = \frac{A}{t} \cdot j\omega\varepsilon_0 Z = M' + jM'' \\ \left\{ \begin{array}{l} M' = \frac{A\varepsilon_0}{t} \left[ \frac{\omega^2 R_b^2 C_b}{1 + \omega^2 R_b^2 C_b^2} + \frac{\omega^2 R_s^2 C_s}{1 + \omega^2 R_s^2 C_s^2} \right] \\ M'' = \frac{A\varepsilon_0}{t} \left[ \frac{\omega R_b}{1 + \omega^2 R_b^2 C_b^2} + \frac{\omega R_s}{1 + \omega^2 R_s^2 C_s^2} \right] \end{array} \right. \end{aligned}$$

### 三、單一介電弛豫（電偶極矩極化效應）

在介電質中，必須考慮各種電偶極矩極化所產生的介電效應。因此，為了考慮電偶極矩影響，可以利用一電容( $C$ )與電阻( $R$ )串聯，然後再與另一電容( $C_\infty$ )並聯的等效電路，如下圖所示



一般而言， $C \gg C_\infty$

#### 1. 總阻抗

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} + j\omega C_\infty}$$

$$= \frac{RC^2}{(C + C_\infty)^2 + \omega^2 R^2 C^2 C_\infty^2} - j \frac{(C + C_\infty + \omega^2 R^2 C^2 C_\infty)}{\omega(C + C_\infty)^2 + \omega^3 R^2 C^2 C_\infty^2}$$

$$Z'(\omega) = \frac{RC^2}{(C + C_\infty)^2 + \omega^2 R^2 C^2 C_\infty^2} \quad \text{和} \quad -Z''(\omega) = \frac{C + C_\infty + \omega^2 R^2 C^2 C_\infty}{\omega(C + C_\infty)^2 + \omega^3 R^2 C^2 C_\infty^2}$$

#### A. 複阻抗譜（如圖 3.3-7 所示）

I. 在極低頻  $\omega \rightarrow 0$  時，則  $Z' \approx \frac{RC^2}{(C + C_\infty)^2}$  且  $-Z'' \rightarrow \infty$ 。

II. 在極高頻  $\omega \rightarrow \infty$  時，則  $Z' \rightarrow 0$  且  $-Z'' \rightarrow 0$

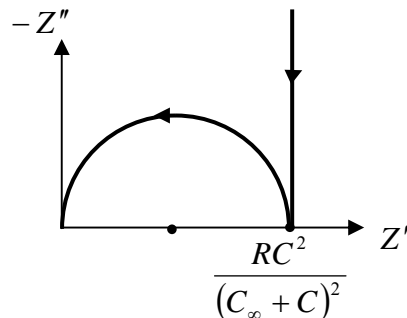


圖 3.3-7 單一介電弛豫的複阻抗譜

（箭號方向代表頻率增加）

2. 導納

$$Y = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} + j\omega C_\infty = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} + j\omega C_\infty$$

3. 相對介電常數

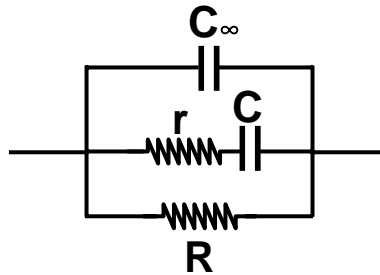
$$\epsilon_r = \frac{t}{A} \cdot \frac{Y}{j\omega\epsilon_0} = \frac{t}{A\epsilon_0} \left( C_\infty + \frac{C}{1 + j\omega RC} \right)$$

令  $C_\infty = \frac{A}{t} \epsilon_0 \epsilon_\infty$ 、 $C = \frac{A}{t} \epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_\infty)$ 、介電弛豫時間  $\tau = RC$  帶入上式，

即可得到 Debye equation  $\epsilon_r = \left( \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \right)$ 。

四、單一導電弛豫加單一介電弛豫

在介電質中，除了考慮電偶極在介電常數與頻率相關的影響，電偶極在導電方面的電阻亦無法忽略。因此我們可以在原本的 R 與  $C_\infty$  並聯電路上，多並聯一個 r 與 C 串聯電路，以表示導電加介電弛豫效應，其電路圖如下



1. 總阻抗

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{r + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R} + j\omega C_\infty}$$

$$= \frac{R[1 + \omega^2 r(R+r)C^2]}{(1 - \omega^2 rRC C_\infty)^2 + \omega^2 (rC + RC + RC_\infty)^2} - j \frac{\omega R^2 (C + C_\infty + \omega^2 r^2 C^2 C_\infty)}{(1 - \omega^2 rRC C_\infty)^2 + \omega^2 (rC + RC + RC_\infty)^2}$$

2. 導納

$$Y = \frac{1}{r + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R} + j\omega C_\infty = \frac{1}{R} + \frac{\omega^2 r C^2}{1 + \omega^2 r^2 C^2} + j\omega \left[ C_\infty + \frac{C}{1 + \omega^2 r^2 C^2} \right]$$

### 3. 相對介電常數

$$\varepsilon_r = \frac{t}{A} \cdot \frac{Y}{j\omega\varepsilon_0} = \frac{t}{A\varepsilon_0} \left[ C_\infty + \frac{C}{1 + \omega^2 r^2 C^2} \right] - j \frac{t}{A\omega\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{R} + \frac{\omega^2 r C^2}{1 + \omega^2 r^2 C^2} \right]$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r' = \frac{t}{A\varepsilon_0} \left( C_\infty + \frac{C}{1 + \omega^2 r^2 C^2} \right) = \varepsilon_{ion}' + \varepsilon_{dipole}' \\ \varepsilon_r'' = \frac{t}{A\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R\omega} + \frac{\omega r C^2}{1 + \omega^2 r^2 C^2} \right) = \varepsilon_{ion}'' + \varepsilon_{dipole}'' \end{cases}$$

A. 當  $\omega \rightarrow 0$  時， $\varepsilon_r' \approx \frac{t}{A\varepsilon_0} (C_\infty + C) = \varepsilon_s$

B. 當  $\omega \rightarrow \infty$  時， $\varepsilon_r' \approx \frac{t}{A\varepsilon_0} C_\infty = \varepsilon_\infty$  且  $\varepsilon_r'' = 0$ 。

### 4. Electrical modulus

$$M = \frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{A}{t} \cdot j\omega\varepsilon_0 Z$$

$$= \frac{A\varepsilon_0}{t} \frac{\omega^2 R^2 (C + C_\infty + \omega^2 r^2 C^2 C_\infty)}{(1 - \omega^2 r R C C_\infty)^2 + \omega^2 (rC + RC + RC_\infty)^2}$$

$$+ j \frac{A\varepsilon_0}{t} \frac{\omega R [1 + \omega^2 r (R + r) C^2]}{(1 - \omega^2 r R C C_\infty)^2 + \omega^2 (rC + RC + RC_\infty)^2}$$

綜合以上結果，利用 Mathematica (電腦軟體) 將各種等效電路所對應的複阻抗譜、介電常數實部與虛部關係、複數導電率與頻率關係、複數介電常數與頻率關係及 Electrical modulus 與頻率關係，如下頁表所示<sup>(35)</sup>

Circuit

