

## 第四章 骨牌實驗測量與分析

本論文最主要的重點就是在於測量多米諾骨牌的運動狀態，在第三章中我們已經完整的介紹了實驗裝置的設計方法與實驗原理，因此本章將會介紹由自行設計的角速度測量裝置來測量骨牌傾倒時的角速度變化，並把其實驗結果與原理做出分析與模擬比較。本章研究共分兩節：第一節是先針對單塊骨牌傾倒做角速度的測量，並做出分析探討與數據模擬。第二節主要就是對一段骨牌進行測量，我們測量一組多米諾骨牌中的一小部分，這一小部分是包含了連續排列的八塊骨牌，我們就利用這連續的八塊骨牌，分別計算每塊骨牌的角動量、角動能與重力位能，在根據其實驗結果做出分析與探討。

### 第一節 單塊骨牌倒下運動的測量與分析

本研究的實驗骨牌規格為長  $31.16 \pm 0.02$  mm、寬  $9.22 \pm 0.02$  mm、高  $95.54 \pm 0.02$  mm、質量  $232.2 \pm 0.1$  g 的銅製骨牌，其骨牌實物如圖 4-1 所示。而實驗用來測量輸出訊號的是自製類比轉數位訊號接收器，其取樣頻率設定為 500 Hz、解析度是 10 mV，接著把整個電路與實驗裝置連結，完成後整個裝置如圖 4-2 所示。



圖 4-1：骨牌實物圖

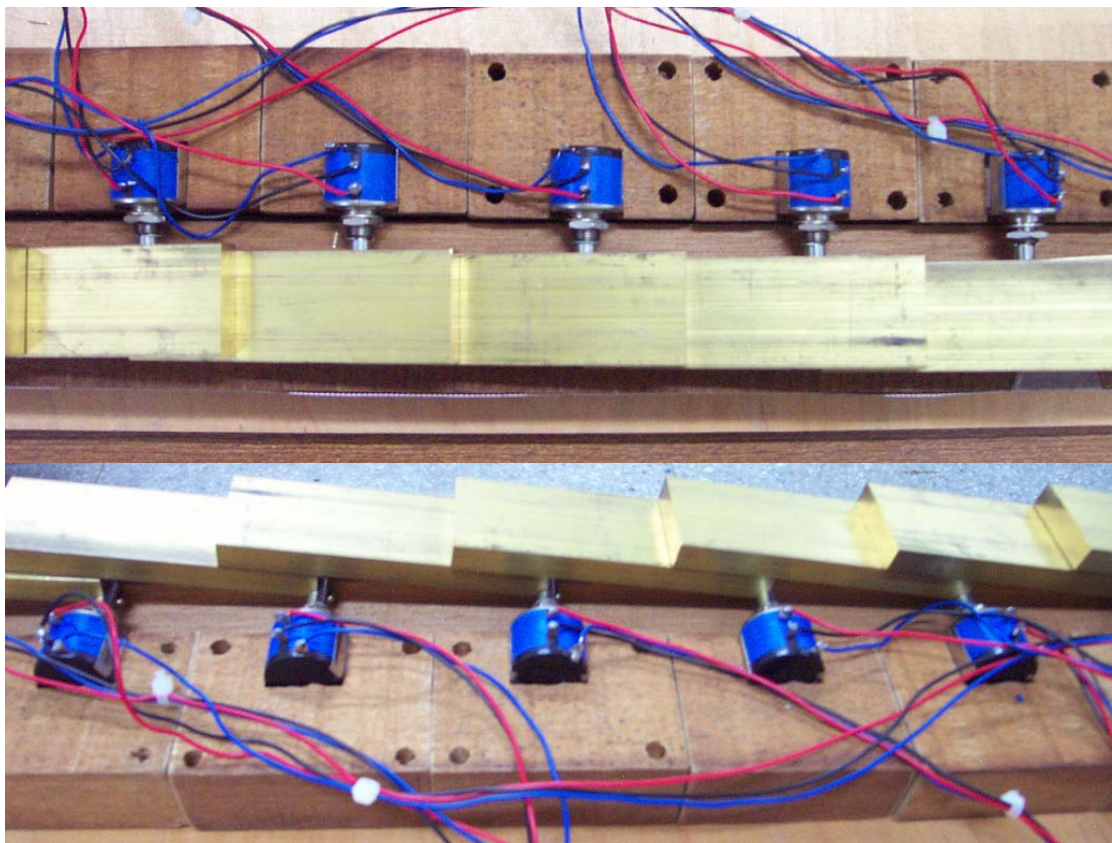


圖 4-2：骨牌實物裝置圖

## 4-1-1 測量單塊骨牌角速度的實驗測量程序

此部分介紹我們測量骨牌實驗的基本實驗步驟，首先我們把實驗測量程序分成以下幾個主要的步驟：

- (1) 選取一塊骨牌鉛直地放置在底座上，並裝上測量用的可變電阻。
- (2) 把測量用的可變電阻如圖 4-2 所示接好，並接上自製的類比轉數位訊號收集器。
- (3) 把訊號收集器利用 USB 傳輸線連結個人電腦。
- (4) 打開自行寫作的軟體程式，並在其軟體介面上是設定好參數。
- (5) 打開供應可變電阻的電源供應器，此時可看到一個穩定的電壓訊號在電腦螢幕上出現。
- (6) 按下程式開始按鍵，並接著緩緩地推動骨牌使它自行達到不平衡狀態下自行快速的傾倒。
- (7) 此時把剛剛的實驗結果儲存起來，由此方式可重複進行實驗。

到此整個實驗步驟已經完整的介紹完畢了，接著再把實驗結果利用數據分析的軟體或者是模擬軟體進行比較處理，並可探討其實驗的結果。

## 4-1-2 單塊骨牌角速度的測量結果

我們根據 4-1-1 所介紹的實驗流程，所做出單塊骨牌傾倒的實驗結果如圖 4-3 所示，此圖形為角度對應時間的關係圖。

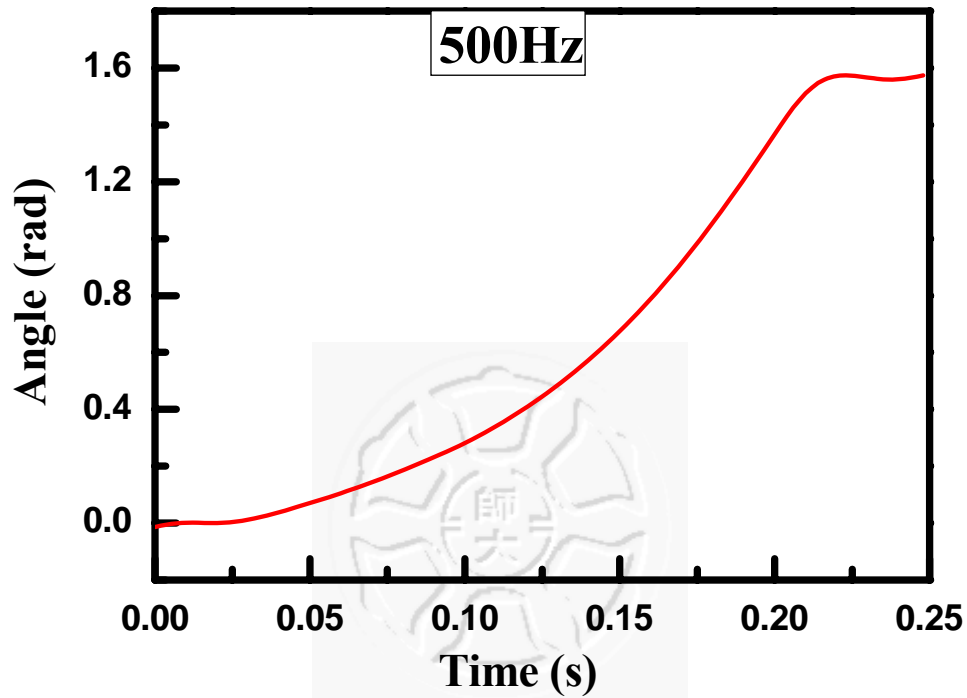


圖 4-3：單塊骨牌的時間對角度實驗圖

我們由圖形很清楚地看到骨牌在一開始緩緩地被推動到不穩定的狀態後，受到重力加速的影響，骨牌開始加速至其倒下為止，整個過程所需時間非常的短，均在 0.25 sec 內完成，如果採用一般每秒 33 frames 攝影法測量，只能測量到八個點，而現在我們利用我們所設計的測量方式可以量的約 125 個的訊號，其解析度遠大於一般攝影機能做到的，這也就是我們為什麼需要自行設計實驗來測量其運動。

接著我們利用數值分析軟體 Origin 把所測量到骨牌傾角與時間的關係做一次微分，根據物理的概念，我們知道角度對時間的微分可以得到角速度(即  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ )，這樣我們可以利用這個關係做出骨牌運動中角速度與時間的關係圖，其圖型如圖 4-4 所示。

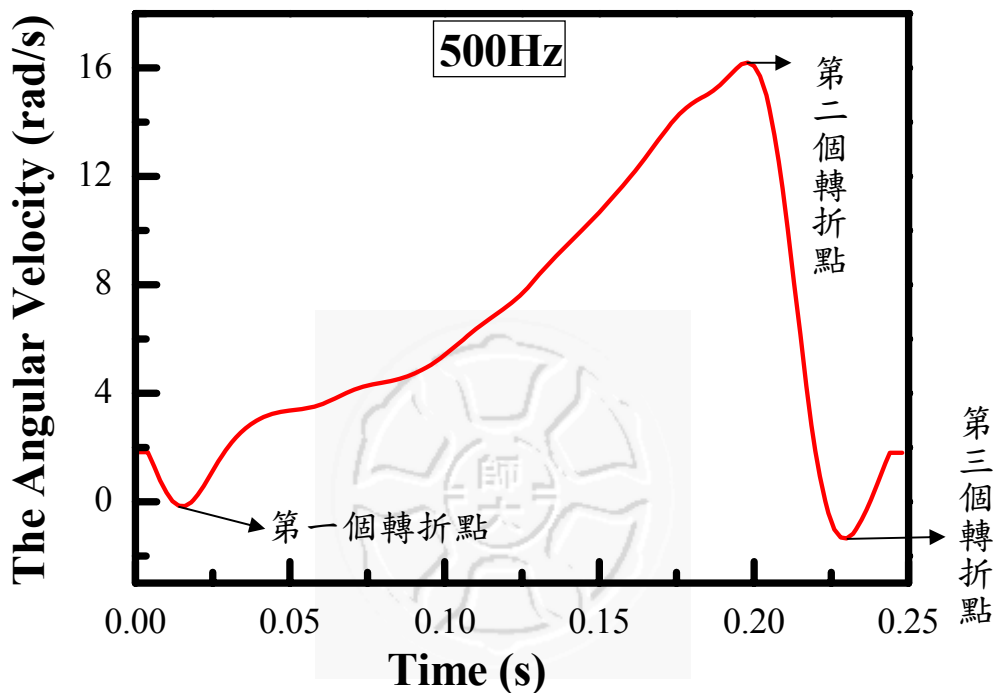


圖 4-4：角速度與時間關係圖

我們由角速度與時間的關係圖中，觀察發現主要有三個明顯的轉折點，這三個轉折點分別有其不同的意義，我們將分別對其三個轉折點做解釋：

第一個轉折點：此轉折主要出現在於當我們緩慢地推動骨牌，使其質心剛好超過自身的轉動支點時，改由重力來加速骨牌，其情況如圖 4-5 所示，此情況發生後骨牌的重力位能轉變成其轉動動能。

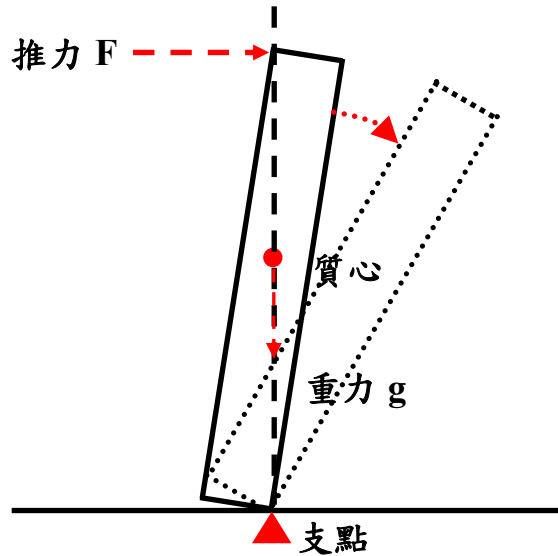


圖 4-5：質心與支點關係圖

第二個轉折點：此轉折主要出現在當骨牌完全倒下時，其骨牌底面碰擊底座產生負的角加速度，因此骨牌的角速度瞬間下降，其情況如圖 4-6 所示，此時骨牌的位能已經完全轉換成轉動動能。

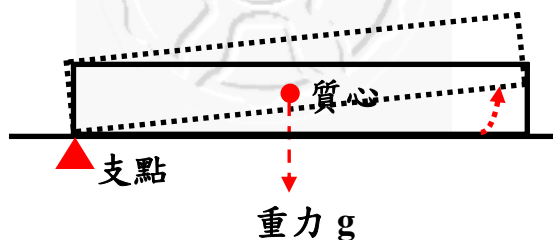


圖 4-6：骨牌底面與底座碰撞圖

第三個轉折點：此轉折主要出現在當骨牌因為受到與底座碰撞後，產生一個負的角速度使骨牌往回抬起，但因為重力加速度的方向仍是向下，因此當骨牌的負角速度受到重力的正角加速度影響下，骨牌角速度返回零時，即第三個轉折點出現的位置，其情況如圖 4-7 所示，此時骨牌的角速度為零。

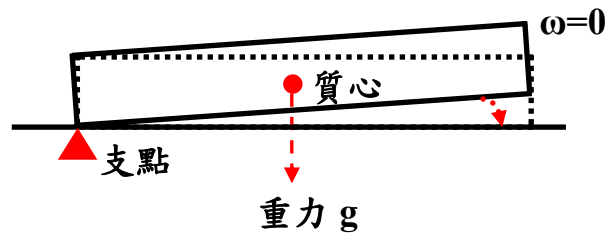


圖 4-7：骨牌底面與底座碰撞圖

上述的實驗結果說符合能量守恆中的動位能互換與碰撞定律中的彈性碰撞原理所預測的現象，表示在自行設計的角速度測量裝置所進行的測量是正確的，接下來的部分我們將簡單地介紹何謂 EJS 與如何使用它，並利用 EJS 來模擬其單塊骨牌倒下的狀態，並比較之結果的不同。



### 4-1-3 EJS 的簡單介紹

我們知道在程式語言的開發設計上必須具備相當的專業知識與經驗，然而開發一套具有教學實驗的電腦模擬程式，更是需要相關的科學知識。一般來說要具有寫軟體的能力，必須學習一些軟體的基礎課程，如：電腦概念、計算機結構、數位邏輯、程式語言…等，學習這些必須要花費很多時間，然而 Java 這種程式語言是一種物件導向的程式語言，具備有繪圖與運算的能力，可以用來設計圖形化的使用者介面。此外 Java 還具備了掛平台的能力，使其更適合應用在不同作業系統的電腦上。但是在要運用 Java 語言仍然需要一段時間，因此在西班牙的 Francisco 先生利用 Java 開發出一套電腦教學模擬動畫設計製作軟體環境 Easy Java Simulation(簡稱 EJS)，來協助缺乏程式語言背景的學科老師或學生，能夠簡易地以科學的模型構想產生電腦模擬，因此可以廣泛地運用在示範教學或科學研究上。而在此方面，國立台灣師範大學的教授—黃福坤教授也在國內積極地推動這套軟體的使用，創辦了「科學園」(<http://enjoy.phy.ntnu.edu.tw/>)這個網站系統，並為 EJS 這套軟體做出中文化介面，並且提供了很多很好的物理學運動範例，讓剛踏入使用 EJS 的使用者能夠快速地學習並且順利的使用它[19]。

接著介紹 EJS 的這套軟體的主要操作介面，其控制介面如圖 4-8



所示，而 EJS 使用說明請參考科學園的教學資源區裡由黃福坤教授所開設的 Easy Java Simulation 課程，課程內有詳細的使用說明，因此在本論文中便不再介紹，有興趣的使用者請參閱科學園內的此課程。

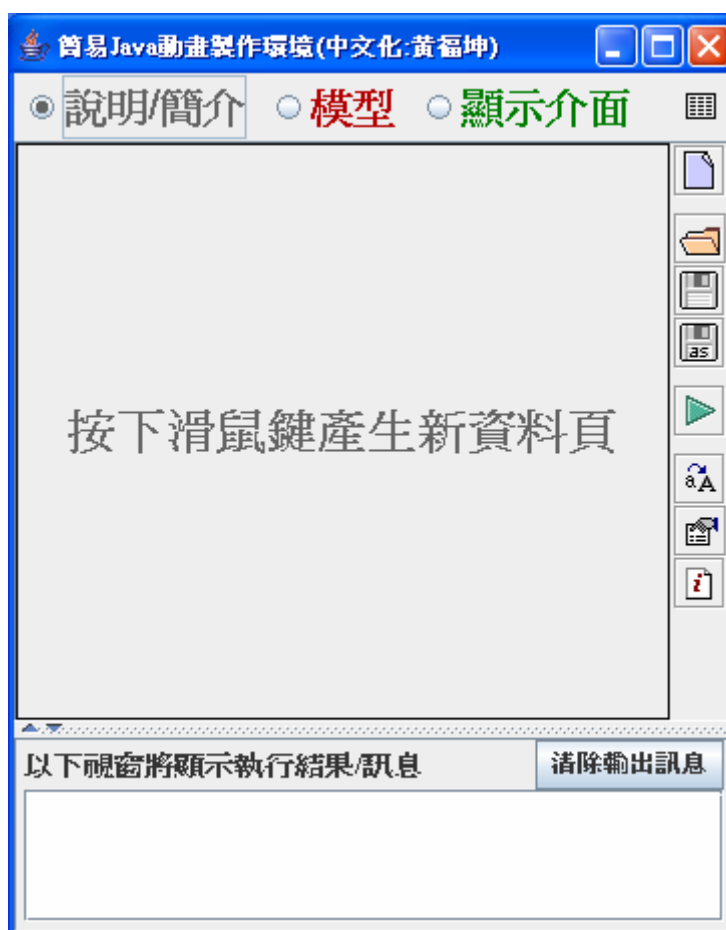


圖 4-8：EJS 主要操作介面

#### 4-1-4 EJS 模擬單塊骨牌運動

此節我們將對單塊骨牌傾倒的角度對時間的變化情況利用 EJS 來模擬其運動狀況，一般來說單塊骨牌傾倒時的狀態與我們一般所熟悉的單擺運動其實是一樣的，其兩者的差別只在於一般的單擺運動是在支點下方擺動，而我們今天的單塊骨牌卻是在支點的上面擺動一次就結束了。因此我們可以利用運動骨牌受力圖，如圖 4-9 所示，在忽略摩擦力的情況下寫下如單擺的運動方程式(4-1-1)式[20] [21]。

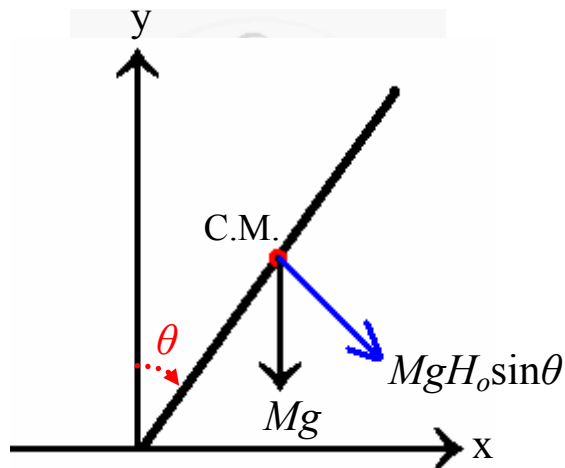


圖 4-9：骨牌運動受力示意圖

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{MgH_0}{2I} \sin \theta \quad (4-1-1)$$

其中 $\theta$ 為角度、 $M$ 為質量、 $I$ 為轉動慣量、 $H_0$ 為高度、 $g$ 為重力加速度、 $t$ 為時間。

由於我們已經知道單塊骨牌的運動方程式，與關於骨牌上的任何參數都已知道，因此我們首先把其參數輸入到 EJS 介面中的定義參/

變數欄裡，其定義之後如圖 4-10 所示。

名稱	數值	資料格式	維度格式 00...
n	5000	int	
theta	0.001	double	
M	0.227	double	
g	9.8	double	
H	0.09682	double	
l	0.000711	double	
t	0.0	double	
dt	0.01	double	
omega	0.0	double	
w0	1.91	double	

圖 4-10：EJS 介面的參數定義

我們定義好了參數之後，接下來要做的就是將參數演化的運動方程(4-1-1)式輸入到 EJS 中，其情況如圖 4-11 所示[22][23]。



圖 4-11：EJS 參數演化關係設定

設定參數演化後我們便可以啟動 EJS 數值演算來模擬出單塊骨牌傾倒時其角度隨時間的變化，其模擬情況如圖 4-12 所示。

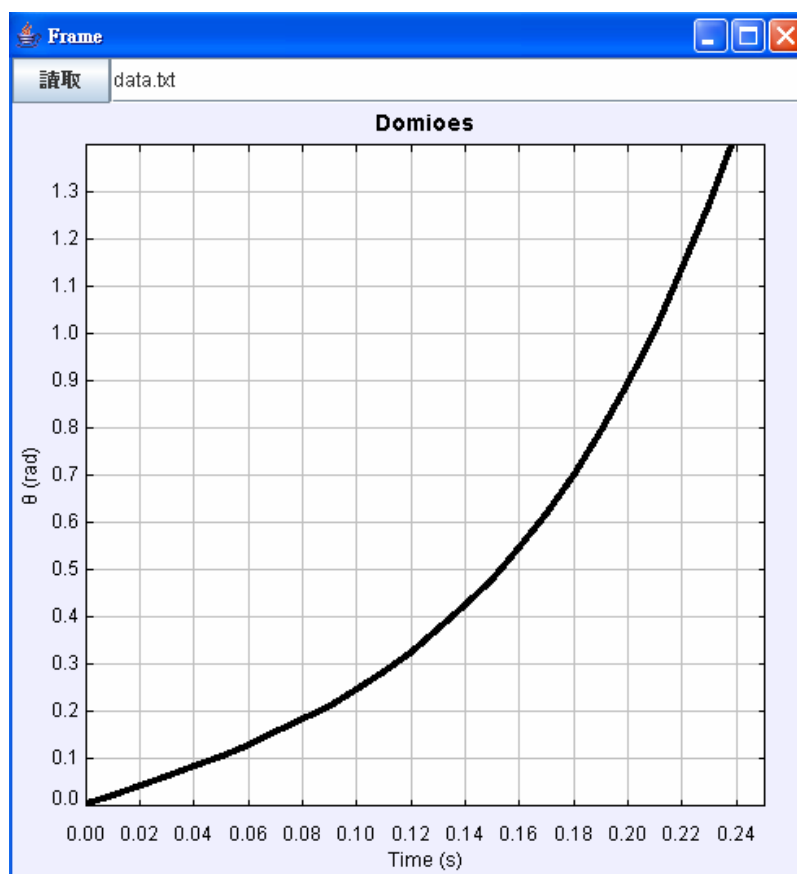


圖 4-12：EJS 模擬單塊骨牌狀況圖

由於我們在推動骨牌時，必須克服靜摩擦力，因此會給骨牌一個微小的初速度，所以利用 EJS 模擬出骨牌在具有初角速度傾倒時角度對時間的演化圖形，接下來我們只要把單塊骨牌的實驗數據利用 EJS 介面上的二維函數數據關係圖上繪出，再與原來的 EJS 所模擬的圖形作相互的比較，其比較的圖形結果如圖 4-13 所示。

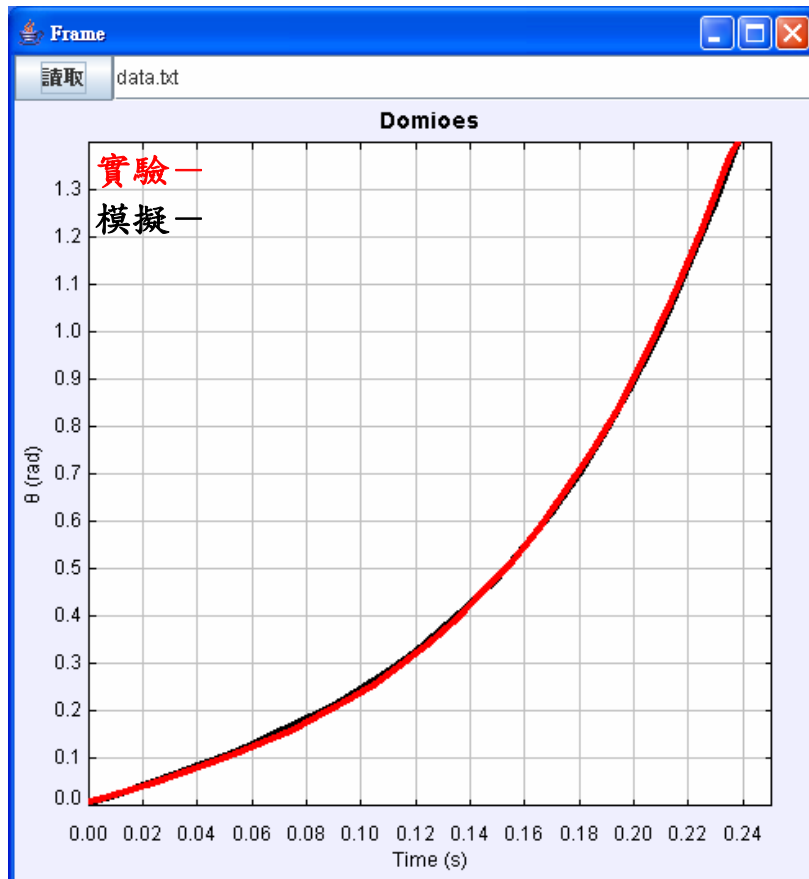


圖 4-13：EJS 模擬圖與實驗比較圖

我們由圖 4-13 看出 EJS 在骨牌具有初角速度為  $1.91 \text{ rad/s}$  的條件下，所模擬出骨牌傾倒時角度對時間的變化圖形，與實際實驗在骨牌傾倒時所測量到的角度對時間的變化圖形幾乎完全疊合，但因為本模擬中並未考慮摩擦力效應，所以在這極短暫的骨牌傾倒時間下，仍然會有一些微小的誤差，但與實驗整體的測量結果比較下是可以忽略的。於是我們藉由單塊骨牌的實驗數據與 EJS 數值模擬圖形相互比較下的結果，證明我們所設計的角速度測量裝置是可行的，因此我們才可以繼續利用我們所設計的實驗設計來對一系列骨牌的實驗測量，此測量在下一節會有詳盡的敘述。

## 第二節 連續多塊骨牌傾倒運動的測量與分析

此節我們將在一聯串傾倒的骨牌中，針對最初的八塊骨牌進行角度對時間變化的測量，即測量多米諾效應剛開始產生與如何形成穩定態的的傳播。首先我們把設置在單塊骨牌上相同的裝置也設置在我們所要測量的八塊骨牌上，然後按照順序把我們要測量的骨牌排好，其實驗參數有以下這些：骨牌高  $H$  為  $95.54 \pm 0.02$  mm、骨牌間距  $s$  為  $70 \pm 1$  mm、骨牌厚度  $d$  為  $9.22 \pm 0.02$  mm，骨牌質量  $223.2 \pm 0.1$  g。

當骨牌依照以上所給定的參數排列好之後，便可開始按照 4-1-1 小節中所提到實驗程序來進行實驗的測量，其實驗的測量數據如圖 4-14 所示。

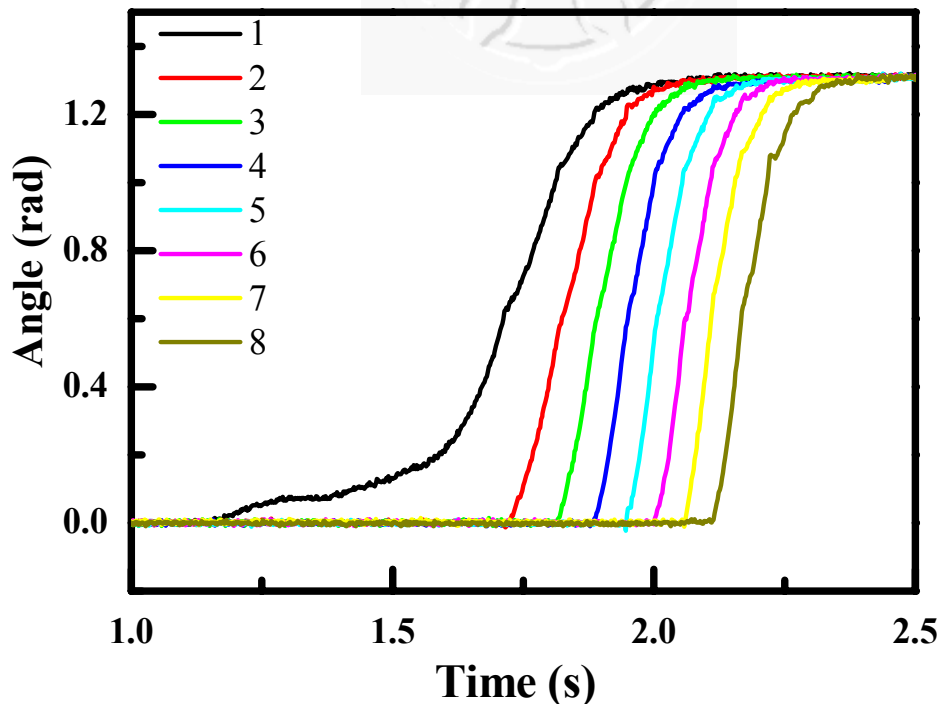


圖 4-14：前八塊骨牌時間隨角度的變化圖

針對圖 4-14 我們主要可以分成兩個部分做區分，一個是屬於骨牌剛開始的未穩定區，另一個是骨牌已經形成穩定傳播的穩定區，以下我們將針對這兩個部分做合理的解釋：

(1)未穩定區：此區主要為第一塊骨牌至第三塊骨牌所組成，當第一塊骨牌受到外力緩緩的被推至不穩定態，此時的骨牌開始快速地加速傾倒，直到第一塊骨牌撞擊了第二塊骨牌，此撞擊時間點由第一塊骨牌傾倒的數據圖形看來有一個明顯的起伏點。接著第二塊骨牌受到第一塊骨牌撞擊後也開始加速傾倒，之後也跟著撞擊第三塊骨牌，此撞擊點由第二塊骨牌的數據圖形看來也有一個明顯的突起點。如此重複著傾倒加速與骨牌之間的撞擊事件，骨牌已經由剛開始的不穩定傳播，邁向穩定的速率傳播。

(2)穩定區：此區主要為第四塊骨牌至第七塊骨牌所組成，我們由實驗的數據圖可以看出，此區的每塊骨牌角度對時間的變化都有著相同的模式，這表示此區的骨牌都已經在不同的時間下重複著相同的運動模式，所以我們可以推測骨牌已經發展至一定程度的穩定態，然而為了更精確的驗證我們的推測，我們將更進一步的由其角速度對時間的關係圖看出其更細微的運動模式，其角速度與時間的關係圖如圖 4-15 所示。

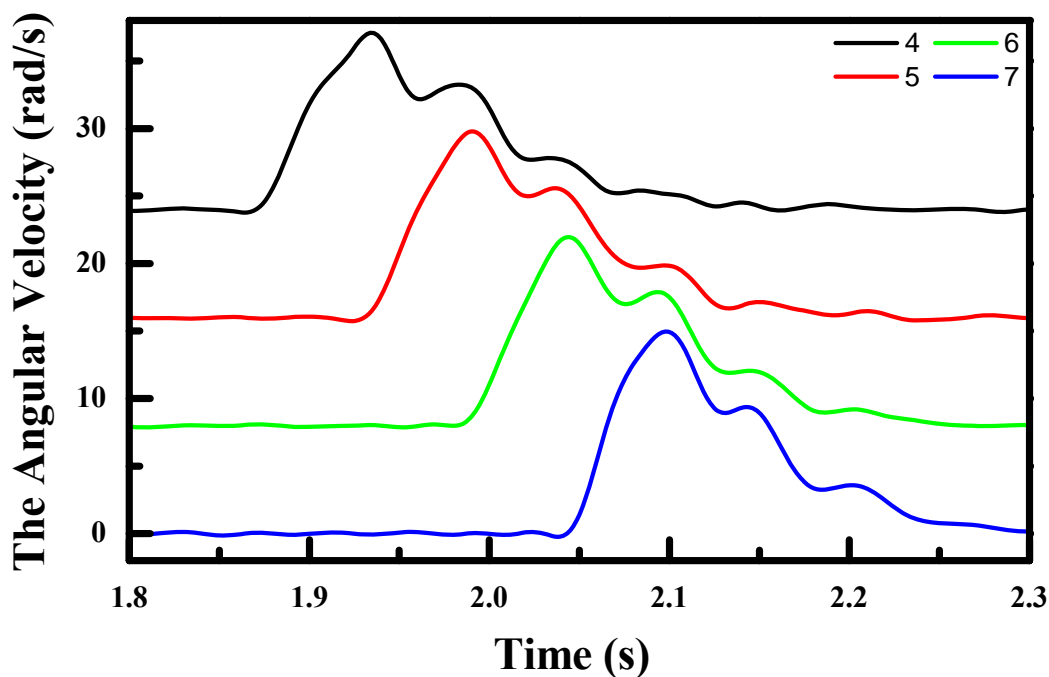


圖 4-15：穩定態下骨牌角速度對時間的變化

我們由圖 4-15 中發現，每塊骨牌主要有三個明顯的峰值，而且峰值出現的模式都是相同的，這表示骨牌在這樣的間距下，每塊骨牌與本身後兩塊的骨牌關係密切，我們可以把他想像成一個孤立子波的傳遞，而形成此孤立子波結構的因素就主要就只由這三塊骨牌交互作用的效應來形成，其概念示意如圖 4-16 所示。

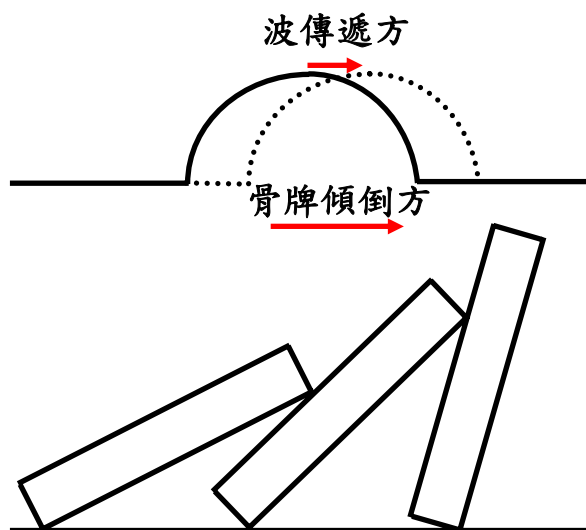


圖 4-16：孤立子波形成示意圖



因此利用波傳動的概念來計算骨牌傳播的速率，我們利用每塊骨牌撞擊的時間差與其時間內行進的距離為每塊骨牌間距與骨牌厚度和，即  $\frac{(s+d)}{t}$  式所表示。我們把測量到的四到七塊骨牌的碰撞時間差列出如表 4-1 所示。

	骨牌四→五 (sec)	骨牌五→六 (sec)	骨牌六→七 (sec)	平均時間差 (sec)
時間差	0.058±0.001	0.059±0.001	0.056±0.001	0.058±0.002

表 4-1：骨牌碰撞時間表

$$v = \frac{(70 \pm 1) + (9.22 \pm 0.22)}{(0.058 \pm 0.002)} = 1.3 \times 10^3 \pm 5.0 \times 10^1 (mm/s) = 1.30 \pm 0.05 (m/s)$$

有了這些資料我們就可以計算出骨牌的傳播速度，其速度大小為接著讓其實驗測量速率與理論公式(2-2-8)式做比較。我們算出其  $K_{\text{effect}}$  為 0.94。這表示實際測量到的骨牌傳播速率略小於理論上所推得的傳播速率，主要因素可能是我們在實驗中不考慮摩擦力的效應，然而此效應還是產生測量上的一些誤差。

骨牌在傳播的另一個重要的問題就是能量，我們針對骨牌能量的兩種形式分別做出探討，一個是骨牌所具有的重力位能  $U$ ，另一個是骨牌在轉動時所具有的轉動動能  $E_K$ ，此兩種能量的交替轉換形成了連續的多米諾骨牌運動。

我們針對所測量到的骨牌位能變化作圖，其位能圖如圖 4-17 所示。

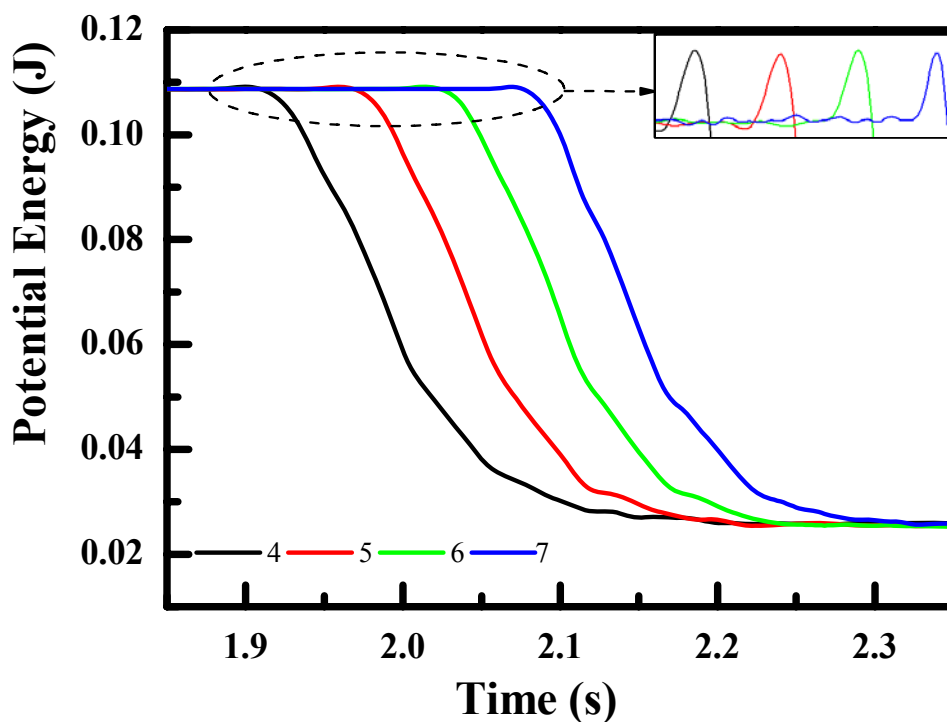


圖 4-17：骨牌位能對時間變化圖

由圖 4-17 的放大區圖我們知道當第  $n$  塊骨牌被第  $n-1$  塊骨牌撞擊時，會由第  $n-1$  塊骨牌的轉動動能提供能量給第  $n$  塊骨牌，使其質心由原本支點的左方被抬起至支點的上方，所以此時骨牌的質心重力位能被提高了，其示意圖如圖 4-18 所示。

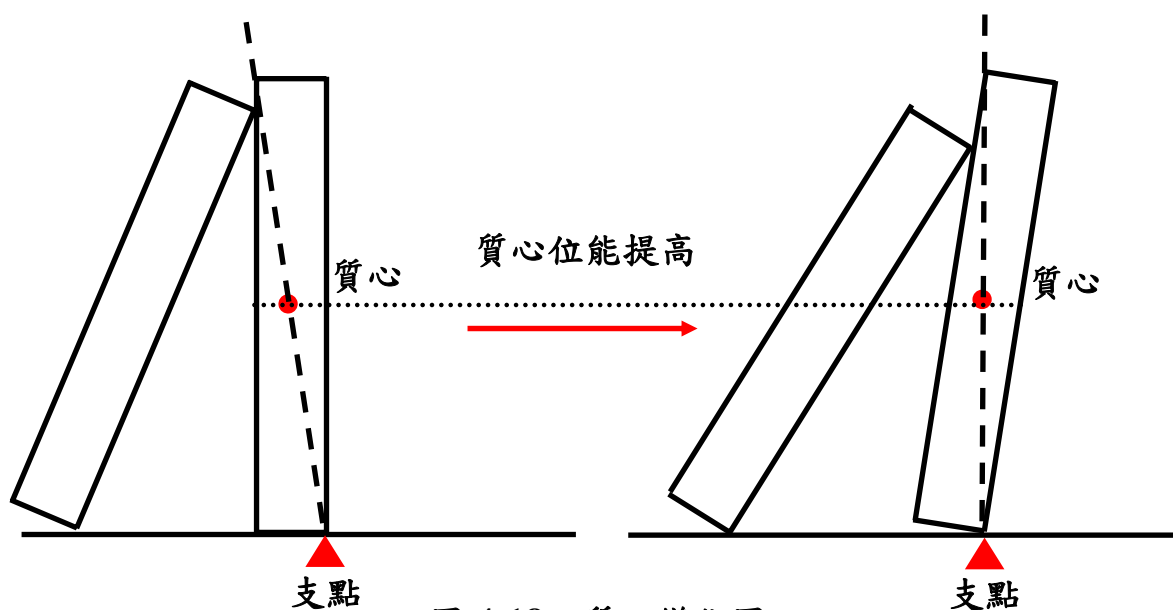


圖 4-18：質心變化圖

當骨牌質心位置被提高，即表示第  $n$  塊骨牌便開始消耗本身的重力位能，轉換成轉動動能直至撞擊下一塊骨牌，其週期性的動能與位能互換致使多米諾骨牌能夠向前傳遞能量。

接著我們對骨牌在傾倒過程中的動能變化作圖，其動能圖如圖 4-19 所示。

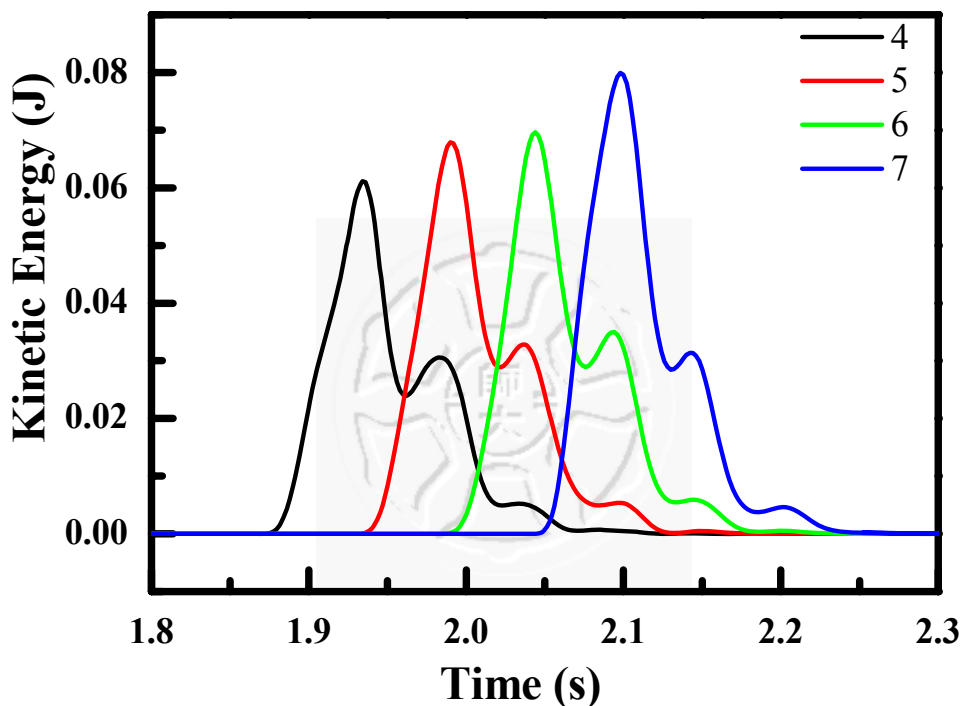


圖 4-19：骨牌動能對時間變化圖

由圖 4-19 我們看出每塊骨牌的動能均呈現相同的週期性變化，主要是有三個主要的峰值，分別代表每塊骨牌重要的兩次重要的碰撞，而且我們也發現骨牌動能的第一個峰值的高度還是持續地再增加，而骨牌動能的第二個峰值與第三個峰值則明顯的能量在同一個量值。另一方面我們如果比較單塊骨牌位能與動能的變化，其能量變化

圖如圖 4-20 所示。

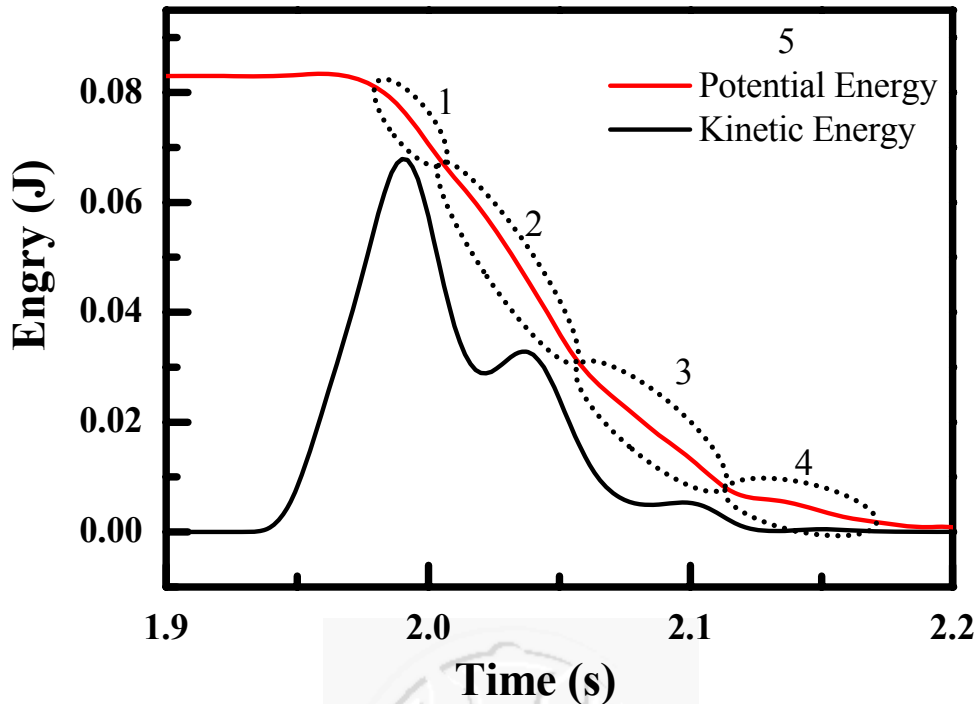


圖 4-20：位能與動能變化對比圖

由圖 4-20 我們很明顯的看出骨牌位能變化主要有四個明顯的不連續區段，其四個不連續區段的分隔點分別對應到骨牌動能變化的三個峰值點，證明骨牌傾倒時位能與動能的變化息息相關，但是由位能損失和動能增加的變化看來，能量並不會侷限在同一塊骨牌上，而是會藉由骨牌間的相互碰撞把動能向前方傳遞出去，最後會有一部份的能量會在碰撞時以其他種能量的形式損耗消失。

我們再把單塊骨牌傾倒運動的數據與多塊骨牌傾倒運動其中一塊的數據放置在同一張圖上作比較，其比較結果的圖形如圖 4-21 所示。

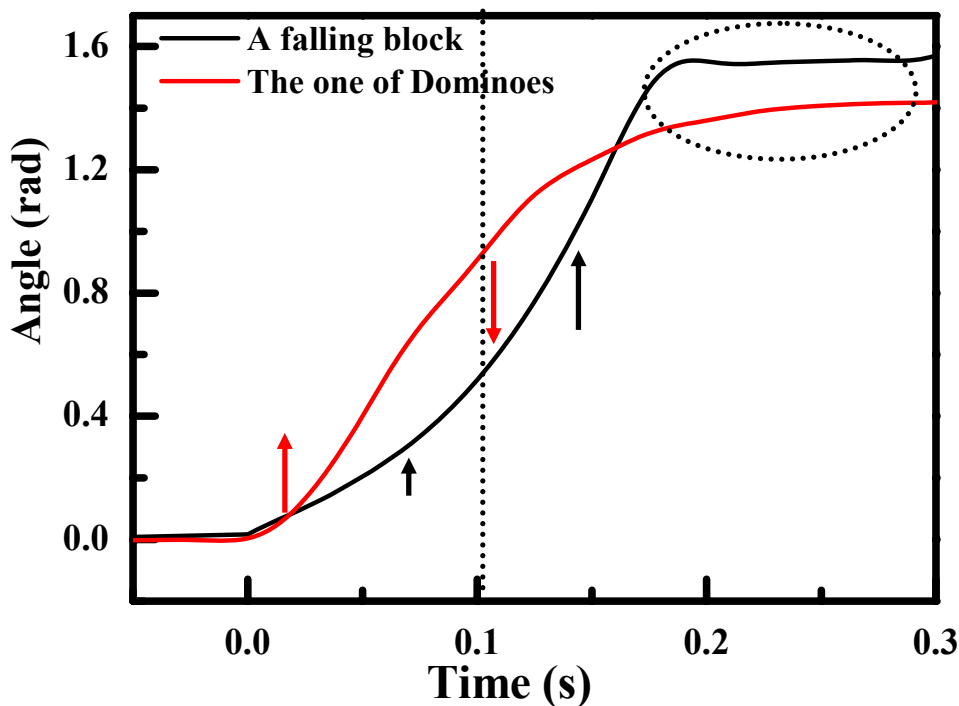


圖 4-21：單塊骨牌與多塊骨牌之一相互比較圖

由圖 4-21 我們可以看出由單塊骨牌運動轉變成多塊骨牌運動時，原本單塊骨牌的運動模式不能適用在多塊骨牌運動模式，因為在多塊骨牌的運動中，每一塊骨牌在傾倒的過程中又受到前後骨牌相互撞擊的影響，使得前段運動中( $0 \leq t \leq 0.1$  sec)多塊骨牌傾倒的角速率比單塊骨牌傾倒的角速率快，但在後段運動中( $0.1 \leq t \leq 0.2$  sec)多塊骨牌的角速率就比單塊骨牌相對的慢，且在最後多塊骨牌傾倒的結束角度因為受到骨牌堆疊的影響，使得其結束角度相對於單塊骨牌的結束角度略小 5.51 度。

接著我們再比較在不同條件下的多塊骨牌運動，其運動條件如圖 4-22 所示，紅色圖示的骨牌表示我們所單一量測的對象，而我們根據其限制條件做出的實驗圖如圖 4-23 所示。

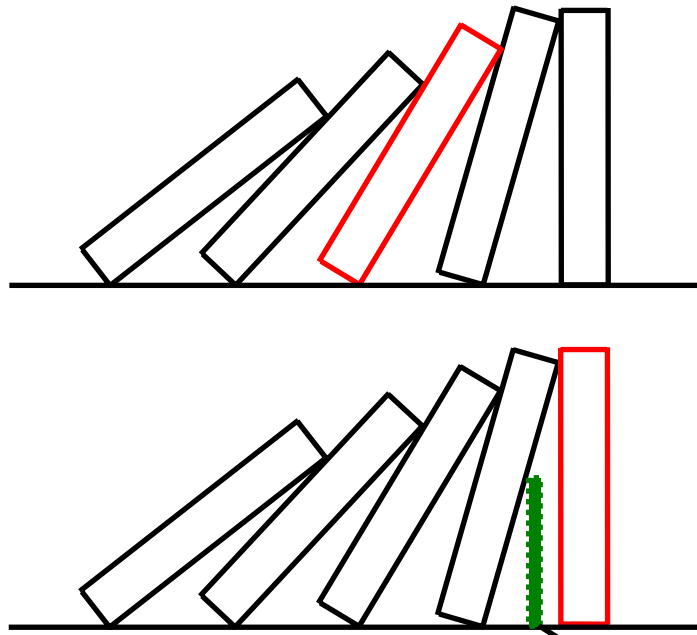


圖 4-22：限制條件示意圖

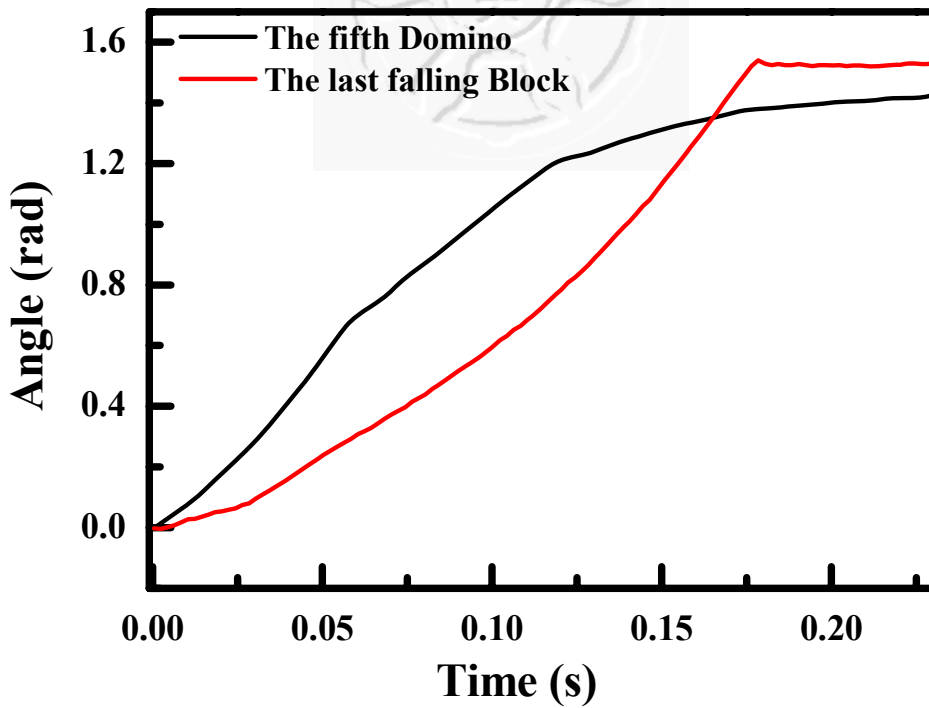


圖 4-23：多塊骨牌在不同位置下相對比較圖

我們由圖 4-21 與圖 4-23 作比較看出骨牌如果在只受到前一塊骨牌的撞擊下，其運動狀態與單塊骨牌傾倒的模式相同，差別只在於初角速度的差別，多塊骨牌最後一塊比單塊骨牌所具有的初角速度大，我們由先前相同的模擬求出其初速度量值為  $\omega=6.3 \text{ rad/s}$ ，此大小為單塊骨牌緩慢被推倒所給予的初角速度大了約 3.3 倍，可見多米諾骨牌運動是具有能量傳遞的功能，它藉由碰撞把能量向下一塊骨牌傳遞，並利用每塊骨牌原先所具有的重力位能作為補充傳遞時所損耗的能量，我們推測在一特定的能量轉換效率下，多米諾骨牌將會達到終端的速度。

最後我們針對骨牌運動時總角動量與總能量是否守恆做出探討，其骨牌的總角動量時變圖與總能量時變圖如圖 4-24 與圖 4-25 所示。

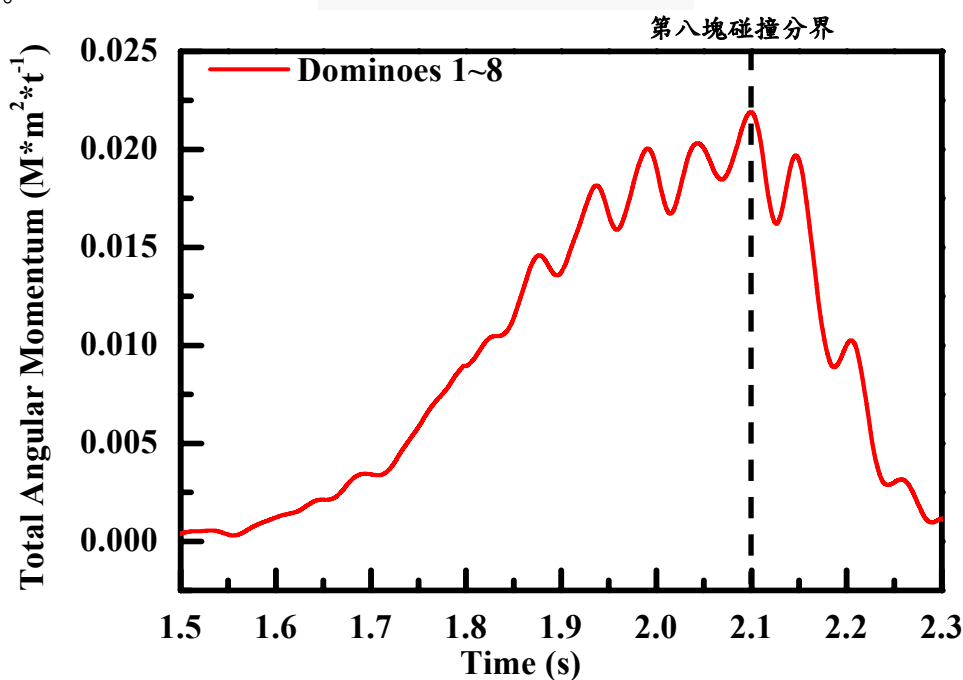


圖 4-24：總角動量時變圖

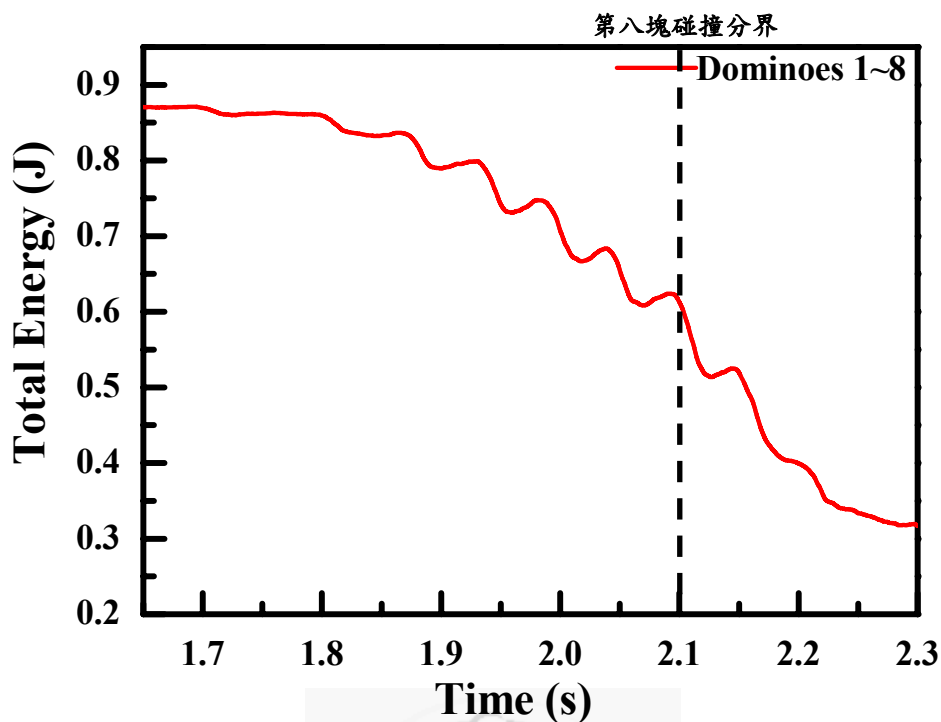


圖 4-25：總能量時變圖

我們由圖 4-24 顯示出骨牌運動進行到穩定態時，骨牌之間的總角動量會在一定的高度下做出週期性的動量改變，即表示骨牌碰撞時總角動量並不守恆，是屬於非彈性碰撞，因而造成總角動量會有週期性的變化結果，因此在很多骨牌文獻中假設角動量守恆為一定值的條件在我們所測量出的實驗結果中並不成立。

接著我們畫出全部八塊骨牌總位能與總動能和的時變圖，由圖 4-25 之結果可看出，一開始八塊骨牌的潛在位能為一定直值，受到骨牌運動的影響，總位能隨時間一直在減小，但總動能的增加並沒有位能減少的快速，因此我們發現總能量隨著時間減小，但其減少的過程中能量會有週期性的振盪變化，而不是呈現階梯式下降變化，其總能



量會增加的原因推測是忽略了骨牌相互撞擊時產生骨牌位移的能量沒有考慮進去，因此在骨牌相互撞擊的一小段時間後，骨牌位移的能量轉換回骨牌的角動能，因而造成總能量向上增加，直到下一個碰撞為止，但以能量守恆的觀點上看來，骨牌傳遞時總能量是一直減少，而在有一些骨牌文獻中提到骨牌運動時總能量守恆的這個假設，在實驗的結果中並沒有發現這個現象，因此這個假設在骨牌實驗中仍然不成立。實驗至此已經達到一系列的分析與比較，其目的除了在測量出骨牌運動時能量的變化，也在比較與骨牌理論模型的差異，提供理論模型計算另一個實驗的參考。

