第五章　討論與結論

本章各節是將第四章資料分析及結果做整理，透過討論與個案分析以回答第一章之待答問題，並提出結論。

第一節　國中生「三角形外心與內心概念」的學習困難因素

根據第四章第三節的結果與分析，研究者發現造成學習困難的因素如下：

一、未能以正確、完整的數學語言或符號描述圖形或數學專有名詞。

不正確的敘述包括：「圓在三角形外面」、「把三角形接在圓裡」、「圓心到三頂點等距離」、「把圓放在三角形 ABC 裡」、敘述空白以繪圖表示等等。這些學生仍然使用日常口語來描述，描述的內容與題目不符，或是以圖形來表示，未能以「接」「切」「通過頂點」「交於一點」等的數學語言來描述圖形，屬於 Van Hiele 幾何幾何思考層次的視覺期。Van Hiele(1986)認為提升思考層次必須依靠學習而非隨著年齡增加，研究顯示能正確敘述敘述三角形外接圓與內切圓的比例分別為 77%與 61%，當中也發現少數學生的確未達到層次二－非形式演繹的層次，只能達到圖形辨識與性質描述的層次，提不出適當的策略來說明性質。

另外，學生會以熟悉的性質來敘述數學定義，而且不瞭解定義的意義。研究中發現「敘述三角形外心與內心」的內容分成三大類，以外心為例，包括：「外接圓圓心」、「中垂線交點」、「到三頂點等距離的點」。

訪談 S1 的過程中，表示會以「外接圓的圓心連接到三頂點等距

離」來介紹外心，並認為「外接圓圓心」與「等距離」是一樣的。

訪談 S2 的過程中，發現該生認為「敘述」與「定義」是一樣的，但該生卻以「中垂線交點」敘述外心，以「到三頂點等距離的點」當作定義，並表示想到就寫，沒有理由。

訪談 S3 的過程中，發現該生認為定義是「已經證明過的」，如中垂線的交點;敘述是「看起來像什麼，講一下大概」，如外接圓於圓心。

訪談 S4 的過程中，發現該生回答定義會聯想到圖形，以外接圓圓心作答。

訪談 S5 的過程中，發現該生回答敘述會想到「他是怎麼形成的」，以中垂線的交點作答;回答定義時會想到性質，以等距離作答。

學生敘述外心時，並未想到敘述的內容是屬於「定義」、「性質」或「作法」，也不清楚「定義」、「性質」在數學中的意義。Van Hiele(1986)認為非形式演繹期的學生，應能做到「能根據圖形性質形成定義」、「藉由非形式化的推論，將之前所發現之性質分類做成家譜」，也就是建立性質之間的關係，然而研究發現多數學生並未具備有這種能力。

研究者在國科會的研究計畫中，曾經讓學生經歷「以最佳性質刻畫平行四邊行形成定義」的教學活動，學生能由討論的過程中，得知「兩組對邊等長」、「兩組對角相等」、「兩雙對邊平行」、「對角線互相平分」具有等價關係，並取得「定義：兩雙對邊平行的四邊形為平行四邊行」的共識。同樣的道理，學生知道「外接圓圓心」、「中垂線交點」、「到三頂點等距離的點」都是正確的敘述，但是未經過討論取得共識，雖然教師由圖形關係開始介紹，定義外心為外接圓圓心，教學後學生仍然會以自己熟悉的性質回答相關問題，並當作辨識圖形的依據或推理的已知條件。

二、未能將所學的知識整理成有系統的概念幫助學習。

從「概念」部分的答對率，可發現大部分學生能說出片段的知識，

例如：「三角形必有外心」、「外心到三頂點等距離」、「中垂線交點是外心」與「三邊中垂線共點」的答對率都高達九成以上，但是因為學生對於相關知識之間的關係未釐清，而導致論證困難。例如：能解釋「等距離」的學生比例不到七成；能解釋「中垂線交點是外心」的學生比例為五成；能解釋「三邊中垂線共點」的學生比例為一成。

訪談 S3 的過程中，發現該生以「外心當圓心，取外心到任一點當半徑，畫一圓通過三頂點」來解釋「為什麼外心到三頂點等距離？」，以「兩邊中垂線交點到三頂點等距離，符合外心性質」來解釋「中垂線交點是外心」。該生能說出教學過程中片段的知識，沒有保留知識間的發展程序，以至於論證時錯把知道的性質當作證明的已知或求證。

訪談 S5 的過程中，發現該生以「外接圓半徑相等」解釋「問題 2：外心到三頂點等距離」，卻認為「問題 3：中垂線交點是外心」不用解釋。研究者進一步詢問「為什麼以交點為圓心可以畫出外接圓」，該生回答「因為外心到三頂點等距離」，再問「為什麼交點到三頂點等距離」，學生才利用中垂線性質解釋。

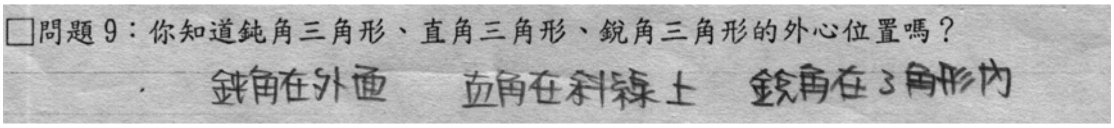
研究者認為學生能熟悉片段的知識，與平時考試常出現相關的題目有直接關係，尤其是大量的選擇題與計算題，學生的確只需要有這些「知識」就能從容應付，也因此造就學生複習時只注意知識的重點整理，而未釐清知識間的關係成為有系統的概念。為什麼建立有系統的概念如此重要呢？Gentner(1997)等人認為在許多學習機制中，類比是唯一提供自我產生較大尺度知識的轉變。邱美虹(2000)認為有對應關係的概念透過類比學習能產生結構上的改變，建議教師可多利用類比策略進行教學，啟發學生想像的空間，連結已知的概念到待學的概念上，達到概念學習或概念改變的目的。當學生能將相關知識形成有系統的概念，學生就能透過類比遷移的方式，有效率的將待學的知識內容，以相同的結構建立知識之間的關係，一方面減少數學知識的記

憶量，一方面有助於學生以更高的觀點欣賞數學。

三、論證觀念不完整，文字表徵與形式論證的能力仍不足。

八成的學生由「外接圓圓心」、「中垂線交點」、「到三頂點等距離的點」三個敘述中，同時選擇兩種以上當作外心的定義。八成以上的學生認為，選擇「圖形觀察」與「作圖經驗」來解釋外心在鈍角三角形的外面是正確的。三成以上的學生以「三中垂線一定共點」來解釋「第三邊的中垂線通過其他兩邊中垂線的交點」。其他錯誤的論證觀念，如循環論證、舉例說明、逆敘述與敘述相同等等也經常出現。至於文字表徵與論證能力不足，由性質的證明與公式的推導，答對率都不到三成即可得知，其中包括大量空白的人數，三成嘗試「解釋三邊中垂線共點」的學生中，有半數學生以錯誤的性質解釋，四成學生能正確的推算出「內心與兩頂點的夾角」，而能夠正確的提出證明只有兩成等等。以 S7 的作答與訪談內容為例：

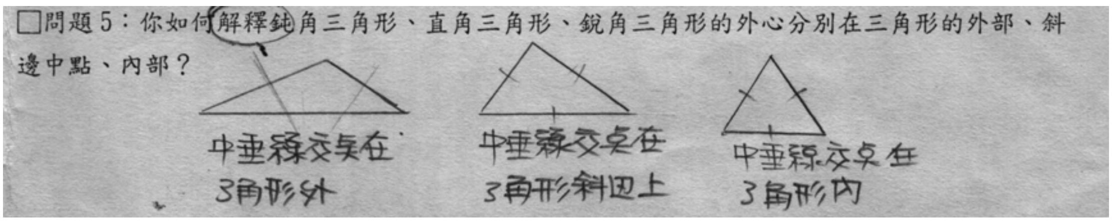
T：那下一個(T 指著問題 9)，你知道外心會在鈍角三角形的外面嘛！ S7：嗯！


□問題 9：你知道鈍角三角形、直角三角形、銳角三角形的外心位置嗎？

鈍角在外面　直角在斜線上　銳角在3角形內

T：直角的中點，銳角的裡面。　S7：嗯！

T：然後你要怎麼解釋？(T 指著問題 5)


□問題 5：你如何解釋鈍角三角形、直角三角形、銳角三角形的外心分別在三角形的外部、斜邊中點、內部？

S7：…解釋外心在外面、邊的上面還有裡面？

T：對，為什麼？　S7：畫出來呀？

T：所以你覺得畫出來就可以解釋了？　S7：因為他是鈍角哇！

T：所以畫出來…　S7：所以這個圖…，跟這個圖有沒有關係？

T：你覺得呢？　S7：有關係吧！

T：嗯！所以…

S7：但是他圖…嗯…啊…他的半徑，就是圓的半徑，圓心和這三個點要一樣長啊！

T：嗯！　　　　　　　　　　S7：所以他只有在外面的時候才能連成一個圓啊！

該生的想法是根據作圖經驗來判斷，以提出事實作為解釋問題的策略。Duval(1998)將與解題和證明有關的認知過程，區分為單純的圖樣過程、自然的推論過程與理論的推論過程，其中單純的圖樣過程隱藏在自然的推論過程中。該生以「中垂線交點為外心」的想法來描繪外心的位置，認知過程屬於單純的圖案過程，說出「外心位置在鈍角三角形的外面才能與三頂點等距離」，屬於自然推論過程中的局部層次，整個解釋的過程中並沒有出現理論的推論過程。

訪談 S1 的過程中，發現該生將「若 O 到 A、B 等距離，中垂線就會過 O」視為中垂線性質，詢問該生何謂中垂線性質時，卻回答「中垂線上的點到兩點等距離」，經過比較後，才更正原有的觀念。

訪談 S2 的過程中，該生表示不會證明三中垂線共點，所以空白。

訪談 S3 的過程中，發現該生引用 AC 與 BC 的中垂線性質，得出 OA=OB=OC 後，敘述「AB 中垂線上的任一點到 A、B 等距離」來解釋 AB 中垂線通過 O 點，研究者詢問該生是否知道性質與逆性質，該生表示不清楚。

訪談 S4 的過程中，該生表示不會解釋「外心在鈍角三角形的外面」，所以選擇「根據作圖經驗」來說明。訪談 S7 的過程中，該生以「畫出來就好了」來解釋「外心在鈍角三角形的外面」，也會利用公式計算內心與兩頂點的夾角，但不會證明。

研究者透過訪談與診斷工具，理解學生不會說明或證明的原因，的確是因為形式論證的觀念與能力尚未成熟，在不知如何論述的情形下，只好以非形式論證的思維來回答問題或空白不作答。另外表徵能力不足，使的學生無法順利的將計算過程轉化成公式的證明。

四、缺少相關的解題經驗，沒有主動繪製參照圖的習慣。

在外心的應用中，由於學生作不出正確的輔助線，能求出正確解的學生不到兩成。在內心的應用中，因為有附參考圖，能求出正確解

的學生比例超過七成。問卷中詢問學生提供參考圖時有何影響，有82% 覺得容易理解題意，82% 覺得容易推理，90% 覺得有助於聯想相關性質，50% 覺得增加解題信心，但是實際上學生並未主動畫出參考圖，例如：解釋外心的位置時，七成學生未畫出所有參考圖，其中有五成學生空白。解釋外心與兩頂點連線的夾角，也是接近五成未畫出參考圖。另外，部分學生誤解題意，以「因為第三邊的中垂線也會通過同一點，所以只要兩邊即可」來解釋「三角形兩邊中垂線的交點即是外心」。

訪談 S3 的過程中，該生認為外心在鈍角三角形的裡面，經研究者詢問理由，該生以外接圓圓心回答，研究者請他當場畫出鈍角三角形與其外接圓，該生才發現錯誤，承認只想像將一個圓套上去，沒有確實畫出參考圖。Duval(1998)將幾何認知過程分成視覺化、構圖與推理過程，他認為構圖過程對於推理本身並沒有幫助，視覺化的過程可能有助於推理，也可能造成誤導。而該生就是被誤導了。

訪談 S4 的過程中，該生能配合附圖解釋外心的位置，研究者詢問「若提供附圖，你會不會解釋」，該生回答「知道」，研究者再問「若沒有提供附圖，你會不會」，該生回答「不知道，不會」。

研究者認為學生知道幾何題通常需要圖形來輔助，但卻未養成繪製參照圖的習慣，導致無法連結相關性質，錯失進一步思考的機會。另外，解題經驗不足，也會造成學生不清楚題意，或做錯輔助圖形影響作答。

五、未熟悉預備知識，缺乏利用已知性質推理的能力。

有 66% 的學生能說出中垂線性質，五成的學生能利用中垂線性質證明中垂線交點是外心;只有不到一成的學生能說出中垂線逆性質性質，或以逆性質證明三中垂線共點。預備性質不熟悉，直接影響學生的論證能力。另外，有 65% 的學生能說出角平分線性質，只有 28

% 的學生能利用角平分線性質證明角平分線交點是內心，可見學生缺乏利用已知性質推理的能力。

第二節　解決學習困難因素之有效的教學策略

研究者根據第四章第四節至第六節—有系統的類比教學實驗、問卷調查、訪談的結果與分析，整理後來回答此問題。

一、設計有系統的教材進行類比遷移

研究者認為外心與內心概念具有強烈的對應關係，因此以類比遷移為策略設計教材，進行補救教學實驗。類比學習的成效，與教材是否具有類比系統性有關。當學生越容易察覺外心與內心概念間的高階關係，學生進行類比遷移的效果越好。這樣的類比學習，能有效的改善以下學習困難因素：

(一)以不恰當的用語描述圖形

學生以「包圍」「放在裡面」來描述外接圓與內切圓的關係並不恰當，一方面沒有完全吻合圖形的特性，一方面不熟悉「接」與「切」的數學用語。藉由外接圓產生的類比效應，可以讓說出「與三邊相切」的學生比例由 56% 增加至 74% 。

(二)不熟悉角平分線逆性質

藉由外心教材中對於中垂線性質與逆性質的提示，能讓學生敘述角平分線逆性質由 0% 提升至 36% ，有顯著的改善。

訪談 S2 的過程中，發現該生模仿外心教材寫出角平分線逆性質「已知 $OX=OY$ 且 $OX\perp AC, OY\perp BC \therefore O$ 在 $\angle A, \angle B$ 的角平分線上」，但內容有些瑕疵。詢問的結果發現該生仍需參考中垂線逆性質才能說的出來，而且看不出錯誤的敘述，可見該生仍然不清楚性質與逆性質之間的關係。

訪談 S5 的過程中，該生宣稱並未參考外心教材，從 Q2 的回答「角平分線到兩邊垂直等距離」與外心教材「中垂線通過圓心」可印證。結果該生仍然能寫出角平分線逆性質「已知 O 到 AB、AC 垂直等距離，∴O 在∠A 與∠C 的角平分線上」，雖有瑕疵，但詢問下能說出「先有後果啊，才知道原本的那個性質吧！」，並找到∠C 是多寫的。可見該生已瞭解性質與逆性質之間的關係。

研究者發現受訪的學生理解「逆性質」的程度不同，經過一節課的教學，能完整寫出來的學生大概也只有三分之一，可見邏輯與推理的訓練需要一段時間，不可能一下子就完成。

(三)不會引用角平分線性質與逆性質進行推理

藉由外心教材的示範，能讓學生利用角平分線性質，或角平分線通過內切圓圓心的現象，來解釋交點為內心的正確率，由 28% 提升至 67% ，而學生能利用逆性質解釋角平分線通過圓心的正確率達到 34% ，有顯著的改善。

訪談 S7 的過程中，發現該生能確認以中垂線逆性質證明通過圓心的事實，並以「因為到兩邊作垂直是半徑呀！這個半徑和這個半徑會一樣，所以他會在他的上面沒錯啊？」「如果他到兩邊等距離，他就會在角平分線上」來證明。

訪談 S8 的過程中，發現該生將角平分線性質與逆性質完整的列出，並說明如何利用逆性質證明角平分線通過內切圓圓心。詢問後回應「學這邊的」、「懂他的意思」，表示的確發揮類比遷移的效果。

因此研究者認為推理訓練，只聽教師的示範是不太可能理解的，一定要讓學生親自經歷，慢慢摸索，才能由模糊的概念趨向明朗。

(四)不會解釋「三角形中三條角平分線共點」

藉由外心教材中，利用弦的中垂線通過外接圓圓心的性質來解釋「三線共點」，能讓學生跟著利用角平分線通過內切圓圓心的性質，解釋共點的正確率，由 6% 題升至 74% ，有顯著的改善，因為此證明

只需要一步推理，因此學生很容易就成能完成。

訪談的過程中，學生都能指出共點是因為「角平分線必通過圓心」，例如 S5、S6、S8 等等都認同這樣的證明方式。

(五)整合相關的知識，將概念有系統的整理

以外心的概念為例，將「外接圓圓心」「中垂線交點」「至三頂點等距離的點」三個觀念，透過自然的學習歷程「發現—解釋—應用」作適當的串連。先提供圖形讓學生察覺現象(弦的中垂線通過圓心)，引入學生熟悉的性質(半徑等長，中垂線性質)，解釋構圖的原理與存在性。然後提示不熟悉的性質(中垂線逆性質)，證明發現的現象，或以圖形的操作(非形式論證)解釋。最後應用於「共點」的證明。這樣的教學模式用於補救教學時，學生的現場反應極佳，從問卷與訪談中也能得知，學習單的編排方式受到學生的肯定。

二、利用局部推理與模仿，提升學生形式證明的能力

根據國科會「九年一貫數學能力指標的詮釋：國中平面圖形部分」的研究報告指出，學生由非形式論證過渡到形式論證中，局部推理(排序、配對、接龍)與模仿(類化計算題、轉化非形式證明、模擬論證格式)能在過渡期的中後段，提供一定的協助。因此研究者在教學實驗中，加入局部推理(接龍)與模仿(類化計算題)，得到的資料也證實能有效的改善以下學習困難主要因素：

(一)缺乏解題經驗，沒有繪製參照圖提供輔助

教學實驗中加入局部推理(Q5)，試圖解釋銳角三角形的外心位置，結果有 95% 的學生能填入正確的敘述，並有 32% 能正確的論述直角與鈍角三角形外心的位置。問卷中有 69% 的學生認為動態圖形會讓自己考慮其他的情形，引出多方面的想法。

訪談 S2 的過程中，發現該生能根據弧度來判斷外心在銳角三角形內，並說出「所對的弧一半，一百八的一半」來判斷直角，同理說

明鈍角三角形。其他的學生也是同樣的反應，在提供圖形的情況下，能模仿教師連接直徑作為輔助線，以半圓一百八的弧，配合圓周角的性質，來解釋所對的角為鈍角或銳角。

教學實驗中提供未完成的圖形 (Q6)，讓學生自行畫出外接圓來探討外心與兩頂點的夾角公式。83% 的學生能依循前兩圖畫出外接圓，以外接圓的圓周角算出答案的學生人數增加，證明出公式 360-2∠F 的比例是教學實驗前的兩倍，達到 40% 。

訪談 S9 的過程中，發現該生因為前面兩個三角形都有外接圓，所以跟著畫。能說出圓周角的性質，根據性質算出正確的夾角度數，並指出正確的公式為 360-2∠A。教師詢問「當初為什麼不會解釋呢？是沒有圖還是沒有想到？」學生回答不會用文字解釋;再問「若診斷時提供圖形，會不會解釋呢？」，學生表示應該會。建議學生以後要自行會參考圖，學生也能認同。

(二)文字表徵與論證能力不足

有 22% 的學生能解釋內心夾角公式 90+(1/2)∠A，其餘學生有舉數字列式說明，有提出不完整的證明，有 54% 空白。分析計算題中有 31% 的學生能列出算式作答，41% 的學生能以公式求解，可見中間的落差在於會列算式但不會證明。因此研究者設計類似局部推理的計算過程(Q6)，讓學生依照計算格式，轉化成形式證明。結果有 57 % 能正確的完成證明，效果顯著。另外研究者先提供有圖形的計算題(Q7)，讓學生算出內切圓半徑，再請學生證明。結果證明的正確率比診斷結果多了一成以上的學生。

針對(Q6)進行訪談。訪談 S1 的過程中，發現該生計算錯誤，但仍能根據計算的過程進行推理，提出正確的證明。訪談 S6 的過程中，發現該生承認只會公式，但利用計算過程來引導學生，以對應的方式一步步將數字轉化成文字，學生很快就能理解，也認同提供局部推理的好處。訪談 S7 的過程中，發現該生仍無法證明沒有附圖的公式，

看到學習單上的計算題，才想起自行推導的過程。

針對(Q7)進行訪談。訪談 S3 的過程中，發現該生當初是利用內心性質列出算式計算，而非以公式算出答案，但是當時未將過程寫出來，所以沒有提出正確的證明。訪談 S4 的過程中，發現該生當初是以公式算出答案，並列出計算式當作證明。當研究者將數字改成文字，該生仍能提出正確的證明，並表示只要有圖他就能證明出來。其他能列出算式的受訪者，也表示如此。

研究者認為，局部推理與模仿能協助學生熟悉論證的思考模式，減少學生對於證明的恐懼感，但是也只能透過訓練逐步的增加形式證明的能力，由非形式證明層次是不可能輕易的過渡至形式證明層次。

第三節　學生對於補救教學實驗的感受

研究者第一次以「類比」、「局部推理與模仿」作為教學策略設計教材，進行補救教學實驗，難免給自己較大的壓力，擔心補救教學沒有預期中的成效，學生是否會無法適應，過程是否產生溝通不良影響師生的關係，利用上課時間進行實驗學生是否會有浪費時間的感覺。為了解決研究者的疑惑，並希望獲得學生的回饋，故設計感受問卷，瞭解學生對於教學實驗的感受，並作為下次補救教學的參考。

以下是部分學生提出的感覺：

1.學生認為由自己推理出來的結果，記得比較清楚。

2.學生認為在概念系統化的流程中，能思考性質是怎麼出來的，比較容易接受。

3.學生認為教學實驗有附圖，容易聯想，而且可以在圖形上畫輔助的工具，幫助思考。

4.學生認為在概念系統化的流程中，能進行連續性的聯想，能把性質學得比較完整，加深印象。

5.學生認為教學實驗的題目有提示，有圖像，容易了解題意產生想法。
6.學生認為教學實驗用引導方式(指局部推理)，較能了解並寫得出來。
7.學生認為施測時想不到的，教學實驗中會解釋得出來，比較能接受。

研究者發現，69% 的學生於問卷中認同教學實驗的成效，訪談中亦呈現如此結果，這讓研究者解除了心中的擔心與焦慮，並對下次的補救教學充滿信心。另外 20% 的學生認為診斷工具的問題比較好回答，原因包括診斷工具敘述簡潔、題目問的比較清楚、比較容易知道要寫什麼、內容比較仔細；教學實驗都是觀念、不知道想法要怎麼寫。這也提醒了研究者，任何教學法都有其缺點，教師必須顧及其他同學的不同感受。

第四節　「類比」、「局部推理與模仿」的教學策略，能讓國三學生由形式論證的渾沌狀態趨向明朗

綜合本研究的相關結果，研究者發現國三學生「外心與內心概念」學習困難的因素與形式論證能力不足有關，這類學生可稱為處於形式論證渾沌期。透過「類比」、「局部推理與模仿」的教學策略，除了改善學生的學習困難，也增加了學生的論證能力。

一、由「外心與內心概念」學習困難的診斷工具中，發現學生學習困難的因素，與形式證明的特徵作比較，結果如表 5-4-1：

表 5-4-1　學生學習困難的因素與形式證明的特徵作比較

形式論證期	學生學習困難的因素
知道定義的意義與等價的敘述。	學生不清楚「定義」「性質」的意義。
在公設系統能下根據定義證明相關的性質與定理。	學生不熟悉形式證明的架構與方式。 學生無法以形式論證完成性質的證明。

能配合問題自行完成形式化證明，並探討其他不同方式證明。	學生的推理能力不足，僅止於一兩步的推理。 學生未能周詳的考慮到所有可能情形來進行討論。 學生以舉例來解釋性質。
能證明與應用有關敘述之間的關係(如逆命題、否定命題、逆否命題)。	學生不熟悉性質與逆性質的關係。 學生以錯誤的性質進行推理。
證明「策略」，將「策略」一般化。	學生的文字表徵與轉化能力不足，無法將計算過程轉化成公式。 學生無法將外心概念學習過程中使用的策略，應用至內心概念的學習。

二、教學策略提升了形式證明的相關能力與澄清論證觀念

(一)「有系統的進行類比遷移」產生的效果包括：

1. 透過與外接圓的類比效應，74% 的學生能以數學用語敘述內切圓與三角形的關係，而原本只有 56% ，增加了使用數學用語的學生人數。

2. 90% 的學生能回應內切圓的存在性，並說出證明內切圓存在的條件。讓學生注意到「存在性」,「假設有內切圓」再進行推理。

3. 67% 的學生能由角平分線通過圓心，察覺交點即是內切圓圓心，其中部分學生並以性質解釋交點到三邊等距離，而原本只有 28% 。讓學生「假設」有內切圓、「察覺」角平分線通過圓心，說出角平分線的交點即是內切圓圓心。

4. 36% 的學生能由中垂線的逆性質，想起角平分線的逆性質加以敘述，辨識「敘述與逆敘述」的不同。

5. 34% 的學生能解釋「角平分線必過內切圓圓心」，而原本幾乎沒有學生完成。

6. 74% 的學生能根據「角平分線必過內切圓圓心」的性質，說明角平

分線均過圓心，並證明共點，而原本只有 6% 。

(二)「局部推理與模仿」產生的效果包括：

1. 提供圖形時，32% 的學生能透過銳角三角形的局部推理練習，以圓周角性質解釋鈍角與直角三角形，而原本只有 13% 。

2. 83% 的學生能跟著模仿畫出外接圓，同時提高完成證明的比例為 40% ，而原本只有 20% 。

3. 以局部推理協助學生完成計算與證明，提升的學生比例超過 20% 以上。

4. 學生由模仿計算題完成公式證明的比例，由 23% 提升至 36% ，寫出公式的學生比例由 41% 提升至 57% 。

(三)問卷的與訪談中，學生認為教學實驗產生的效果包括：

1. 提供主動推理與證明的經驗，更清楚性質的由來。
2. 經歷論證的架構，思考性質是怎麼出來的。
3. 提供參考圖，可以在圖形上畫輔助的工具，幫助思考。
4. 有系統的設計能進行連續性的聯想，加強性質之間的推理與關連。
5. 提供類似動態的圖形，讓學生具有探索、歸納與分析的經驗。
6. 提供「定義」，讓學生釐清定義與性質之間的關係。
7. 提供逆性質的範例，讓學生瞭解性質與逆性質之間的關係，並進一步應用於推理。

三、探究趨向明朗的可能原因

Van Hiele(1986)提出「五階段學習模式」，協助學生由低層次順利提升至高層次。研究者發現教學實驗過程與「五階段學習模式」的教學步驟有部分的相關性。

1.訊息探究(information)

Van Hiele(1986)認為教師在教學前，需經由觀察與提問來了解學生的先備知識，判斷學生所處的幾何思維層次，適時的介紹此階段需

學習的新用語或符號。本研究的診斷工具及扮演訊息探究的角色，並讓學生憶起相關的數學用語與圖形。

2.直接引導(guided orientation)

Van Hiele(1986)認為教師應提供資訊讓學生直接接觸，透過操作、閱讀與探索的過程將學生導引至主要概念，對這些概念建立基本的架構與學習方向。本研究的教學實驗中，教師以有系統的教材進行外心的教學，包括「下定義」、「探討存在性」、「圖形探索」、「察覺性質」、「給定性質證明」、「利用性質推理」等等，引導學生重新建構外心的整體概念。

3.自我表達(explicitation)

Van Hiele(1986)認為學生由活動中獲得一些想法，其中部分與主要概念有關，部分需要修正。研究者於教學活動中提供充分的機會讓學生表達，談論與分享新建構的外心概念。

4.自由探索(free orientation)

Van Hiele(1986)認為教師可斟酌學生的概念理解狀況，提供具挑戰性的題目讓學生發揮探索的本能，利用學生的求知慾增加學生的學習興致。本研究的教學實驗中，研究者提供與外心教材結構對應的「內心學習單」，讓學生以類比遷移的方式主動建構內心的概念，並以「局部推理完成計算與證明」、「模仿計算提完成證明」等例題供學生探索形式證明的模式。

5.統整(integration)

讓學生填寫問卷來回顧教學實驗的過程，學生能重新思考學習數學的模式與形式證明的意涵。

除了符合「五階段學習模式」，研究者認為補救教學實驗能成功的因素有：

1.學生對「外接圓」「外心 O」「中垂線」等等數學用語已經很熟悉，不像初次學習時，教師與學生利用相關用語溝通時仍有困擾。

2.學生熟悉外心與內心的基本概念，熟知它們之間的相似關係。

3.研究者與研究對象有充裕的時間對話溝通。

4.研究者能掌握學生真實的學習困難並提出對策。

5.研究者與研究對象熟識，能兼備診斷、引導與輔助的角色。