第貳章　文獻探討

本研究試圖探討高一學生在一元二次不等式運算的解題情形，並分析其錯誤類型與原因，以作為教師在教學內容及程序上改進的依據；並進行電腦輔助補救教學實驗，希望有助改善學生在一元二次不等式學習上的錯誤。

本章分為三部份：第一節討論有關代數錯誤類型及原因之國內外文獻，以期對學生學習代數方面的困難有較深刻的了解。此外，將特別探討不等式錯誤類型及原因之相關研究；第二節是關於學習理論的文獻探討，從概念的形成與學習及不同類別的理解方式出發，冀能從中得知學生概念形成及思考模式；第三節闡述補救教學的相關理念，探討補救教學實施之原則及方法，並呈現以電腦作為輔(補)助教學的文獻及其成效。

第一節 錯誤類型及原因之相關研究

錯誤在數學教育中的重要性是無可比擬的。因為藉由學生的錯誤答案可以讓老師了解學生心中的想法，更進一步改善教學法，以利學生的學習成效。錯誤在數學中和正確的答案一樣重要；錯誤幫助我們了解數學的來龍去脈；錯誤可作為診斷工具，讓我們能了解學生心裡可能的想法；錯誤並非漫無目的發生，而是有其理由。

迷思概念是指學生在自我建構知識的歷程中，發展出與一般公認科學概念相異的看法 (張景媛，1994)，此種概念不僅會干擾學生課堂上的學習，也會影響思考的歷程與最後答案的形成 (張鳳燕，1991)。而錯誤類型是指學生在運算解題的過程中，所產生錯誤的步驟。Engelhardt (1982) 以及 Ashlock (1990) 認為學習者產生迷思概念，會導致學習者在學習歷程的錯誤類型。Baxter & Dole (1990) 指出錯誤是由於不完全的學習和漸漸養成的習慣所造成的。學生使用不同種類的錯誤過程會產生不同種類的錯誤 (Ginsburg, 1989)。因此分析學生錯誤的類型，

以探究學生在某種錯誤類型所使用的錯誤策略為核心，可作為補救教學的方針 (Ashlock, 1990)。

早期的心理學家認為錯誤有兩種:一種是由於不小心做錯而產生，稱為疏忽；另一種是由於學習了錯誤的觀念或程序而產生的，稱為系統性的錯誤。疏忽是由於注意力被分散所導致的 (Anderson & Jeffries, 1985)，它的產生被認為是不規則的，所以沒有引起太大的注意。另一方面，系統性錯誤則被認為是由於某種錯誤知識，或是由於缺乏某些必須知識而引起的，因此較受到研究者的重視。通過對系統性錯誤的研究，可以加深對學習過程的認識，又可以用來診斷學生的錯誤，以減少重複犯錯的可能性。

此外，近年來有一派學者提出某些錯誤可歸咎於直觀法則(intuitive rules)的運作，而非純粹的疏忽所導致。所謂直觀，在心理學上指的是一種不須經過思考或反省的推理歷程，即可對事物或現象的性質作立即而直接地判斷的能力。有鑑於學生用類似的方法處理不同且毫無關連的問題，Stavy & Tirosh (1999) 將此共同反應解釋為直觀的現象，並歸納整理成下列三大直觀法則，而此三大法則常能有效並合理的解釋學生對某些問題的反應。

1. Same A—Same B：當兩物體在 A 量上相同時，即 A1=A2。此數量可能是直接給予的，或邏輯推論而來的。當被要求比較這兩物體的 B 量大小時，學生傾向有錯誤的反應，認為 B1=B2。
2. More A—More B：意指兩物體在一確定、明顯的 A 量上不同，即 A1>A2，當被要求比較這兩物體的 B 量大小時，學生傾向認為 B1>B2。
3. Everything can be divided：與連續細分(successive divisons)有關。此法則會使學生忽略了物體的本質，不論其為數學的(mathematical)或物質的(material)上的，並進而影響學生對連續細分問題的回答。

也許有些學者會將直觀法則所導致的錯誤歸為系統性的錯誤，而非獨立存在的錯誤。然而，不論如何分類，不可否認的是直觀法則往往是導致學生解題錯誤的原因之一。而本研究的結果亦証明了此觀點，將於第四章做較為詳細的討論。

針對學生在數學學習上錯誤類型及原因的研究頗多,但多數的研究是針對小學生在算術運算上的錯誤，以及文字題中對文字理解的困難所做的錯誤類型分類。由於一元二次不等式是屬於代數的領域,而代數概念的建立勢必與純粹算術之間的操作大相逕庭,學生所遭遇的困難及所犯的錯誤類型想必亦不盡相同。因此,本節接下來將探討文獻中有關代數的錯誤分析,以便對學生在代數上的迷思概念有進一步的了解,再進一步探索中學生對於不等式的解題策略及其錯誤類型與原因。

一、代數錯誤類型及原因之相關研究

一元二次不等式是屬於代數的領域,因此代數的學習與一元二次不等式的學習息息相關，而代數不同於純粹的算術，其間參雜著未知數概念的建立及運算，與文字符號的意義等，對代數的學習者常會造成困難。本節將擇取國內外針對代數錯誤類型及原因的研究做一番歸納整理,並對其中幾篇經典文章做更深入的探討，以期更清楚知道學生在處理一元二次不等式時可能面對有關代數方面的困難。

(一) Steinberg, Sleeman, & Ktorza (1990)

Steinberg, Sleeman, & Ktorza (1990) 指出在學習代數時，很多學生並未有正確的「等價觀念」。多數學生學到如何運用轉換方式來解決方程式，但並不知方程式可用來判定兩者是否等價。也就是說：學生以機械化的方式列出解題式子，但是並不真正瞭解式子的結構與意義。

(二) Matz (1992)

在其研究中針對中學生代數解題中的一些「系統性」的錯誤提出一套解釋。他認為錯誤是學生利用外推的方式,企圖將既有的知識應用在新的情境所產生「合理」但卻「不成功」的一種結果。學生經常利用一些外推技巧(extrapolation techniques)把已知的規則及不熟悉的問題做了連結。這些外推技巧使得學生把新問題視為舊問題或學生自動修訂既有的規則以套用於新

的情境中。

根據Matz (1992) 的研究，學生最常使用也最常「誤用」的外推技巧有二種：一為線性問題(linearity)，係指藉由獨立處理一個可分解物體的每個部份，來解決整個問題。而線性問題又可分為二大類：類化的分配(generalized distribution)，如將 $\sqrt{(A+B)}$ 視為與 $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ 同值，$(A+B)^2$ 等同 A^2+B^2 等；另一類則為重複的應用(repeated application)，學生將過去習得的經驗錯誤類推到新的情境。因為知道 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ 之解為 $x=2$ ，學生就將此概念重複應用到 $\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{7}$ 而得 $3=x+7$ 。第二個常見的外推技巧為類化(generalization)，即是修訂既有的規則以適合處理新的情境。例如學生會類推 $(x-3)(x-4)=0$ 所得的結果，即 $(x-3)=0$ 或 $(x-4)=0$ ，而自動將原有的概念修正類推，認為凡是 $(x-a)(x-b)=k$，則 $(x-a)=k$ 或 $(x-b)=k$，而沒有考量到 0 對整個等式的解的影響。

此外，Matz (1992) 認為運算過程中的錯誤，在代數解題錯誤中的份量亦是不容小覷的。從此觀點出發，Matz將學生常犯的錯誤分為三類：

(1) 由不正確選擇外推技巧產生的錯誤；

(2) 先備知識不足產生的錯誤；

(3) 執行過程時產生的錯誤。

Matz (1992) 亦指出算術與代數間的觀念改變。他提出代數的觀念建立是相當困難的，諸如符號所代表的值(symbolic values)、未知數意義的建立、符號的表徵，如 $43x$ 所代表的意義，以及等式的意義等。這些觀念的建立是須要時間的。

(三) Macgregor & Stacey (1997)

Macgregor & Stacey (1997) 在其研究中指出學生的錯誤常源自於對於新知識只有部份了解，但卻被期望去使用新知識。如學生會錯將 $x+x+5+5+8$ 錯解為 x^2+5^2+8。有些學生會受先前學習數線時往右加、往

左減觀念的影響，而誤認$h10$為$h+10$且$10h=10-h$。還有學生無法連結所學過的代數概念，更因忘記其意義及內容，此舉更容易導致錯誤的產生。

(四) 錯解辨析 (九章出版社，1988)

此書將學生的錯誤類型分為四大類:

1. 由於概念不清產生的錯誤:包含概念實質模糊、混淆相似概念及循環定義概念等產生的錯誤。
2. 由於推理無據產生的錯誤:包含臆造定理、濫用法則、循環論證、論據不足及方法不對等產生的錯誤。
3. 由於忽視條件產生的錯誤:包含忽視概念中的隱含條件、忽視所使用的定理、公式、法則的適用條件、忽視取值範圍的變化、忽視約束條件中的隱含條件、忽視條件的充分性與必要性、錯誤理解條件、遺漏或濫加條件、忽視結論特徵中的隱含條件、把給定的一般條件特殊化等產生的錯誤。
4. 由於考慮不周產生的錯誤:包含審題馬虎、形式套用、顧此失彼、忽視特例、以偏概全及檢驗不當等產生的錯誤。

(五) 簡芳怡 (1999)

簡芳怡 (1999) 在其研究中指出國二學生在因式分解之錯誤類型及原因如下：

1. 將先前學習過的知識做錯誤的類推：如受因數分解的影響，會覺得因式分解的結果只要是因式的連乘積即可，而將$5x^2-10x$因式分解成$5(x^2-2x)$。
2. 受相似的線索所引發，而形成運算上的錯誤：學生在不熟悉完全平方公式、平方差公式如何使用的情形下，相似的線索會互相干擾而產生錯誤。如將公式中的底數混淆，因知$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，誤將$4x^2-9$因式分解成$(4x+3)(4x-3)$。
3. 括號影響學生的解題思維。

4. 死背教學口訣，但不知如何使用或對用在何種情況下不清楚。

5. 僅使用部份的十字交乘法運算規則的某些步驟而已。

6. 缺乏先備知識。

二、不等式錯誤類型及原因之相關研究

不等式在數學領域中一直扮演舉足輕重的角色。在代數、三角函數、線性規劃以及函數的研究中皆可見其蹤跡。然而，針對學生不等式的解題策略及其解題時所遭遇困難之研究並不多見。於下茲將文獻中有關不等式問題的討論整理如下：

(一) 九章出版社「錯在哪裡？中學生解數學題常犯的錯誤分析」(1988)

書中指出不等式主要包括證明不等式及解不等式兩部分。證明不等式及解不等式的過程為不等式不斷變形之過程。不等式的基本性質是不等式做同解變形之根據。正確運用不等式的性質、熟練掌握不等式同解變形之原理、熟練各種類型不等式的解法及常用的證明方法是學好這部分內容之關鍵。然而也正因其複雜性，初學者常常易犯下列的錯誤：

1. 解題不完整：

例：$(a+b)x > b$ 解為(1)當 $a+b>0$ 時，不等式的解為 $x > \dfrac{b}{a+b}$；(2)當 $a+b<0$ 時，不等式的解為 $x < \dfrac{b}{a+b}$。學生完全沒有考慮到當 $(a+b)=0$ 時的狀況，即當 $(a+b)=0$ 時，若 $b<0$，x 可取任何實數；$b \ge 0$ 時，則無解。

2. 錯誤類推：將不等式 $x^2 < 4$ 利用同時開方的方式，解為 $x < \pm 2$。由 $a^2 < b^2$ 得到 $a<b$，是在 a、b 均為正數的條件下才成立的。且同學常將等式方程式的運算與不等式之運算混淆，將方程式 $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ 之運算方式誤用在不等式。

3. 考慮不周全：根據不等式的性質，不等式的兩邊同乘以(或除以)同一個正數，不等號的方向不變。學生未考慮分母的正負值，因此易將不等式

$\dfrac{3x-1}{x-5}<2$去分母得$3x-1<2(x-5)$，並得解為$x<-9$。此舉錯誤地默認了$x-5>0$，然而這是沒有根據的。

4. 先備知識不足：學生解含方根不等式時，常由於不知道方根的數值必大於或等於0，而容易形成錯誤的解。如解不等式$\sqrt{x-1}<x-2$時，會將兩邊平方，得解$x<\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$或$x>\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$，沒有查覺到$\sqrt{x-1}\geq 0$的必要性。
5. 任意平方的錯誤：學生常忽略掉只有當不等式的兩邊都是正值時，不等式兩邊同時平方才是同解的。如解不等式$4-3x<\sqrt{(x-1)(2-x)}$，會逕自平方而得解，而忽略$4-3x<0$的可能性。

(二) Tsamir & Almog (2001)

Tsamir & Almog (2001) 研究以色列中學生對各式不等式的解題策略及其所遭遇的困難。其中不等式的類型包括線性不等式、一元二次不等式、分數不等式以及方根不等式。結果顯示出學生對這四種不等式的答對率不一，解題策略也不盡相同。答對率最高為線性不等式，依次為一元二次不等式，分數不等式，最低為方根不等式。至於面對不等式時學生所採的策略可分為以下三種：

1. 代數操弄 (algebraic manipulations)：為最常見的方法。此法包括(a)在不等式的兩邊同時加減一個數、同乘以分母的平方，或兩方同乘以負號並且改變不等式的方向；(b)藉由找出一元二次方程式的根或a的符號或$\Delta=b^2-4ac$的符號來檢視一元二次不等式；(c)認為$ab>0$是$\{a>0$且$b>0\}$或$\{a<0$且$b<0\}$的複合系統。
2. 畫圖 (drawing a graph)：學生藉由畫相關函數的圖解方式來獲得解答。此法只用於解分數不等式及一元二次不等式。所有的學生都將一元二次式置於左邊，讓不等式右方呈現0的狀態。因此唯一所用的圖為拋物線(parabolas)，最後學生再根據此圖形的正負來決定x的值。

3. 使用數線 (using the number-line)：有將近一半以數線解題的學生同時亦採用畫圖的策略。

其分析顯示，以畫圖來解題的答對率最高；相反的，採用代數操弄者往往得到錯誤的結果。正因為圖解為不等式解題的最佳模式，本研究的補救教學也將以電腦輔助圖解一元二次不等式為主體，希望能幫助學生一元二次不等式觀念的建立與保留。

關於學生解題所遭遇的問題，Tsamir & Almog亦分析如下：

1. 排除數值的問題(difficulties with excluded values)：有些學生無法正確知道某些數值是絕對不能存在現有的不等式中，而沒有將其排除在可能的解之外。例如在分數不等式中分母絕不能為0，以及在方根中絕不能存在負數值等。
2. 邏輯連接詞的問題(difficulties with logical connectives)：學生常無法使用正確的連接詞來表示兩組可能的解之中的關係，究竟為「且」(and) 還是「或」(or)。甚至有些學生是完全沒有使用連接詞，沒有標示其間的關係。
3. 積或商因數正負值的問題(difficulties with signs of the factors of products/quotients)：學生正負值的處理常顯得不周全。當一不等式的積或商大於0時，其因數必為同號，同為正號或同為負號，會有二組不同的解。反之，當不等式的積或商小於0時，其因數必為異號，一為正號一為負號，亦會有二組不同的解。然學生常會忽略其中一個可能性。
4. 與分數不等式分母相關的問題(difficulties related to the denominators of rational inequalities)：在處理分式不等式時，學生經常將整個分數平方，而非只乘以與分母相同的數值而已。如解$\frac{(x-5)}{(x+2)}<0$時，學生會將其記為$\left[\frac{(x-5)}{(x+2)}\right]^2<0$，而認為此題無解。
5. 與等式有關的問題(difficulties related to equations)：可細分為三種情形：

(a)將不等式當作等式解；(b)同乘或同除一個不為正的因數；(c)對一元二次的根做無意義的連結。

此篇文章不僅指出答對率與解題策略間的相關性，並精確指出學生解題時之錯誤。更重要的是，讓身為從事數學教育的我們去思考這四類不等式之間的關係與異同，並透過對學生解題策略的了解，改進我們的教學法，以期在教授的過程中達到最大的功效。

(三) 吳季鴻 (2001)

有別於 Tsamir & Almog (2001) 研究以色列中學生對各式不等式的解題策略及其所遭遇的困難，吳季鴻 (2001) 是針對台灣高雄地區高三生對一元二次不等式的錯誤類型及其原因進行研究。根據吳的調查，發現高三學生在一元二次不等式的解題上，存在著七大錯誤類型：

1. 因式分解錯誤：平方公式錯誤、十字交乘錯誤、將 x 項係數當 x^2 項係數作因式分解。
2. 錯誤的運算規則：任意平方、任意開方、移項錯誤、乘法律錯誤、消去律使用不當、多項式的展開錯誤、交換律使用錯誤、不等號較大之一邊任意加至正數。
3. 同號、異號的的處理錯誤。
4. 變號的處理錯誤：分配律的處理不當、負號任意搬動或去掉、不等號兩邊同乘一負數時未變號。
5. 恆正恆負的判斷錯誤：判別式的正負判斷、判別式計算錯誤，導致答案錯誤、 配方時計算錯誤、沒有注意等號、結論錯誤、判別式小於 0 ，能就代公式解，出現「複數比較大小」的情形。
6. 將領導係數當作正數處理：分解因式法解不等式時，正負判斷錯誤；圖解法解不等式時，正負判斷錯誤。
7. 過度使用無解及無限多解：判別式小於 0 時，結論錯誤；代一元二次方程式公式解出現「複數」時，結論錯誤；不等式之係數為非有理數時，結

論錯誤；二次函數圖形和 x 軸沒有交點時，結論錯誤；配方出現完全平方時，結論錯誤；不瞭解「聯集」之意義，而導致結論錯誤。

至於錯誤形成的原因則可分為五大類：

1. 誤用資料
2. 誤譯語文
3. 不合邏輯的推論
4. 扭曲的定理或定義
5. 技術上的錯誤

吳季鴻 (2001) 的研究非常完整且細膩，詳列學生的錯誤類型，對學生的錯誤分類及錯誤的原因皆有精闢的分析，使我們對學生學習一元二次不等式時可能犯下的錯誤有更清楚的了解，同時也讓老師教授此單元前能採取「預防措施」，以防學生「重蹈覆轍」。美中不足的是，吳對每一個錯誤「一視同仁」，沒能查覺每個錯誤所佔的比重不同，因而未能挑出「舉足輕重」的系統性錯誤。更重要的是，吳並無提供解決之道，也沒有進行事後的補救教學，使得此研究對教學可能產生的功效大受影響。此外，吳的施測對象是高三學生，然而一元二次不等式是屬於高一上的課程。不禁令人好奇，在經過兩年的數學洗禮後，高三學生在一元二次不等式解題時所遭遇的困難或所犯的錯誤有無隨著數學知識的更豐富而遞減或類型不同？是否與高一學生所面臨的問題不同呢？而這些問題也將是本研究所欲探討的重點之一。

第二節 概念的教學與學習

學生的錯誤往往來自迷思概念的習得以及老師不適當的教學，因此了解學生如何學習、概念如何獲取，以及熟知教師概念教學時所必須持有的教學理念，對幫助學生學習或克服其學習困難是重要且必要的。因此，本節將討論概念的形成與學習以及有關學習方面的理解理論，希望有助於概念的教學。

一、概念的形成與學習

Ausubel (1968) 以認知心理學的觀點提出有意義的概念學習是發生在新知識與學習者舊有概念產生連結同化的過程上。也就是說，個人將新概念與訊息，與原有認知結構相連結，不斷整合新概念與新訊息，使之融為更為紮實的認知結構。

Skemp (1979) 提到概念是把具有相似性共通性的經驗歸類在一起。所以一般來說，概念是泛指「抽象化」的過程、結果，是一種延續性的心智變化，使我們能用已經分類的的舊經驗和相似性、共通性來認知新經驗。它使我們有「分類」的能力。因此要形成一個概念就必須先有實際經驗，而這些經驗又有某些相似性、共通性，將這些經驗與共通性加以分類命名、抽象化即形成概念。

此外，Skemp (1979) 提到形成概念的過程主要包括下列五個重要的特徵:

1. 意識 (realization)

   意識過程是指一個新的概念，透過環境經由感官輸入概念結構，此時新的概念與概念結構中的任一概念都沒有聯繫上。

2. 同化 (assimilation)

   同化過程是指在概念結構中找出與新概念相類似的概念。

3. 擴張 (expansion)

   擴張過程是指以概念結構中已有的概念來領悟這新的概念，使其成為概念結構中的一部分。

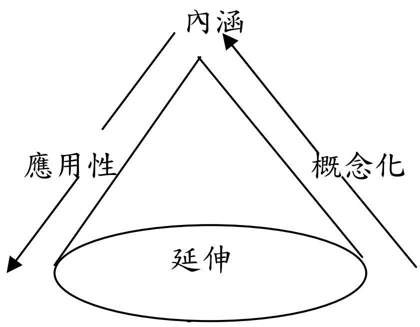
4. 分化 (differentiation)

分化過程是指分辨新概念與一些已有概念間的異同之處。

5. 重建 (re-construction)

重建過程是指當問題的情境改變時，已建立的概念結構雖具有相關性，卻不適用於此情境，此時必須重建個體的概念結構。

Pines (1980) 在「概念及概念的獲得」中提到:人類概念的形成有如一個「圓錐形結構」(如圖2-2-1)，圓錐底部的圓形稱為延伸，表示其為概念的延伸部分，包含所有屬於此概念的事例。頂端稱之為內涵，代表萃取出此概念的特質、共同性或定義等規律性。在學習時，由底部概念延伸部分推至頂端內涵部分(bottom-up)，此過程稱為概念化，即由事例中發現其共同性，此概念化過程是一種歸納方式。若由頂端概念的內涵部分推至底部概念延伸部分(top-down)，則是所謂的應用，此過程是一種演繹方式，即將概念之規律性應用於事例中。由下往上的概念化過程可能導出不正確的概念內涵；同樣地，若是對於概念的內涵特質不清楚的話，則由上往下應用於事例時，就會產生錯誤。



【圖2-2-1】圓錐形的概念模型

施良方 (1996) 則從國外文獻中整理了三種較具代表性的理論，說明概念是如何形成。這些理論分別為：

1. 聯結理論 (association theory)：如果學生能夠正確地識別出某個概念的一個例子，就給予強化，告訴他是對的；如果學生對刺激識別錯了，則告訴他錯了，這樣，學生就不會形成錯誤的聯結。通過一系列嘗試，正確的反應與適當的

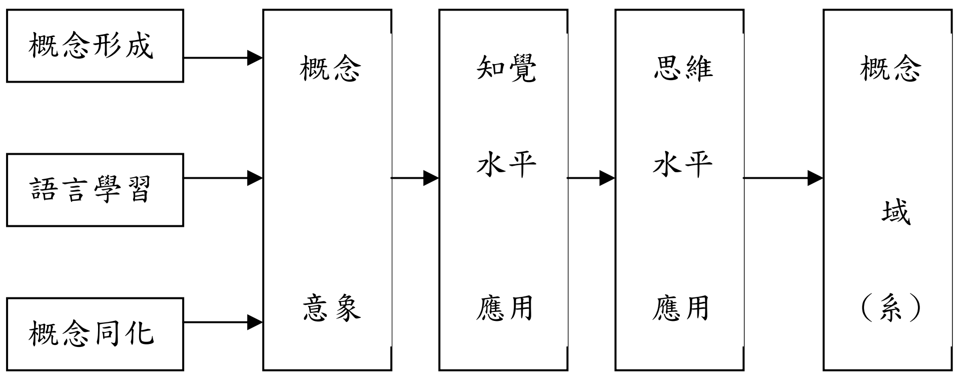
刺激就聯結起來了，因而，學生的概念也就形成了。

2. 假設−檢驗理論 (hypothesis-testing theory)：在概念形成過程中，學生並不是被動地、消極地等待各種刺激的出現以形成聯想，而是積極地、主動地追究這一概念，通過一系列的假設−檢驗來發現這一概念。學生在形成概念的過程中，還會採取各種策略，以求加快發現這一概念的過程。

3. 範例理論 (exemplar theory)：強調記憶中的種種概念，是以這些概念的具體例子來表示的，而不是以某些抽象的規則或一系列相關特徵來表示的。對於任何一個概念說來，都有一些比較典型的範例和一些不大典型的範例，最典型的範例被稱之為典例(prototype)。因此，人們對日常概念的理解，必須著重於對典例的認知，以及其相關內容。

而國內學者亦對概念學習的過程做了一番研究，也提出類似的看法。董小平等人 (1996) 將數學一般概念的學習過程是「輸入與領會－鞏固與強化－應用與發展」的過程，期間要經過抽象－具體－再抽象－再具體的反覆認知，並把新概念納入原認知結構，最終形成新舊概念相聯繫的比較完整的概念系統。

喻平、馬再鳴 (2002) 分析數學概念學習的心理過程，他們認為數學概念的學習過程可用下面的模式表述：



【圖 2-2-2】數學概念的學習過程

概念同化是指學生利用認知結構中的已有觀念與新概念之間的相互作用去獲

取概念。概念形成是從個別實例到抽象本質去獲取概念的方式。語言學習則包括文字語言以及符號語言的學習。而概念意象就是學生的頭腦中和概念名稱相聯繫的思維圖像以及描述它們所有特徵的性質。

概念在知覺水平上應用，指學生獲得同類事物的概念以後，當遇到這類事物的特例時，就能立即把它看作是這類事物中的具體例子，將其歸入一定的知覺類型。概念在思維水平上應用，指學生學習的新概念被類屬於包攝水平較高的原有概念中，因而新概念的應用必須對原有概念進行重新組織和加工，以滿足解當前問題的需要。因此，學習者首先透過辨別、抽象、假設、檢驗、分化、概括等心理過程，以概念形成或概念同化或數學語言的學習形式獲得概念意象，然後通過概念的知覺水平應用，去消除概念意象中不完整印象與完整概念之間的差異，再透過概念的思維水平應用，最後逐步形成概念域和概念系，從而完整地掌握概念。

基於上述各種概念形成的理論，我們可以清楚的了解到概念是具有抽象性的、其抽象度有層次性上的差別，且概念間常具有共通性的特質。因此，在教導學生學習新的概念時，也必須注意如何將抽象的概念具體化及如何提醒學生概念間的共同性，更重要的是掌握概念間的層次性，以循序漸進的方式來呈現新概念，幫助學生做概念間的演譯與歸納。將這些概念特質謹記在心並運用到概念教學上，相信能讓學生掌握精確的概念，達到教學上的成效。

二、概念的理解

文獻中有不少概念的理解理論，本節將針對Skemp的理解理論及Herscovics的四面體模型理論作一番探討。

Skemp (1995，陳澤民譯)認為「理解一件事情就是把這件事情同化入一個適當的心靈影像中」（p.44-45），也就是能將目標與現存的心靈影像連結，知道要怎麼做了就是理解了。他認為理解有三種類型：因果式理解、機械式的理解和邏輯式的理解。

1. 機械式的理解（instrumental understanding）

Skemp (1995，陳澤民譯) 認為這種理解是能夠將硬背的公式、招數應用於特定的問題，但不知背後原因、原理。這種理解的目標是只要會算對答案就可以了，學生只是在操作一些數學符號。這種學習的方式所建立的心靈影像只是短暫的，其實可算是一種畸形的心靈影像—公式、秘笈。學生背一大堆，各自用於少數題目，偶而若干公式要併用。這種心靈影像幾乎沒有適應力，碰到全新的問題就沒輒了。

2. 因果式的理解（relational understanding）

Skemp (1995，陳澤民譯) 認為這種理解是知道數學概念的原因、原理，並能自行推理、推廣。這種理解的目標是要建立整體的概念結構，並通曉其中相互關聯。新的概念透過教學同化到適當心靈影像中，概念結構又成長多一點，面對特定問題（見過或沒見過）都可能推論出適當解決方法，這也是學生產生因果式理解的最強烈證據。

3. 邏輯式的理解（logical understanding）

Skemp (1995，陳澤民譯) 認為這種理解是能老練地以數學化符號、術語搭配邏輯推理規則，進行形式化的數學概念證明或推演。這種理解的目標是使心靈影像或解題過程妥當的呈現出來，而邏輯式理解所用到的心靈影像似乎是一群由敘述所呈現的概念，而敘述中均含有邏輯推論的過程。

Herscovics (1979) 認為理解有四種模式，而提出四面體的模式(the Tetrahedral Model)，分別是：

1. 機械式的理解 (instrumental understanding)：能運用一個適當的背熟的公式去解題，而沒有去、不用去知道這個公式是怎麼來的。
2. 因果式的理解 (relational understanding)：能夠從普遍性的數學關係中去推演出具體確切的規則或程序。
3. 直覺式的理解 (intuitive understanding)：不必事先分析題目，直接就能解題。
4. 形式性的理解 (formal understanding)：連結數學符號、代數和相關的數學想法，組合成為一系列的邏輯推理。

研究者從學生在「一元二次不等式的解題測驗」的卷面解題過程、事後個別晤談，及主要錯誤類型的產生原因分析中，可以看出許多學生在一元二次不等式解題概念的理解是採機械式理解而非因果式理解，只是機械式的記憶和背頌規則及公式，而沒有弄清楚相關概念背後的原理，也有為數不少的人採用的是直覺性的理解。有鑑於此，研究者針對一元二次不等式解題時主要錯誤類型的所採的補救教學措施，其重點在於建構學生因果性的理解及以圖像幫助概念的釐清與建立。

三、概念導向的教學

數學概念的引入與建立，是數學教學的啟蒙。要使學生認識一些數學概念的來源及意義，理解概念的性質及相互關係，才能進一步會運用已學得的概念去解決問題。因此在數學教學過程中，應當以實例和學生已有的知識為基礎出發，然後才逐步引入新的概念。對於容易混淆的定義定理，最好設法引導學生用對比的方法，認識它們之間的區別以及聯繫。楊弢亮 (1992) 認為數學概念的引入，通常可以採取下列方式來進行：

1. 配合學生的生活經驗：

   數學概念的來源有兩方面：直接從客觀事物的數量關係和空間形式反應而得來，或在抽象的數學理論基礎上經過多層級抽象而得。所以在引入新的概念時，教師應注意收集和運用現實生活中能夠反映數學概念的實際模型和事例，舉出了實際事例，也說明這個概念的客觀現實性。例如，平行線的實例，可以舉出筆直道路的兩排樹木，或兩車輪的軌跡來加深印象。負數觀念則考慮相反意義的量，例如資產的儲蓄與負債、行程的向東與向西的引入等。

2. 利用模型圖表提供的實物教材：數學概念的引入過程可以是充分利用教材所提供的感性材料，先用實際事物或模型、圖表，使學生獲得關於新概念的直觀形象，再提出概念的定義。例如，使用圓錐、橢圓球等幾何模型，圖解三角函數曲線、對數曲線、統計圖表，使學生對有關新概念產生深刻印象。

3. 由定義引入：數學概念也可以先由定義引入，再用感性材料來加以證實。
4. 由舊概念引入新概念：從「種」概念引入「類」概念：如在平行四邊形概念的基礎上，可由增加內涵而直接引入菱形和矩形概念。
5. 採用對比方法：如根據分數的運算法則和簡單性質引入分式的概念及其運算。由等式的概念和性質引入不等式的概念和性質。
6. 利用逆反關係：如加法與減法、乘法與除法、乘方與開方、指數與對數。
7. 運用概念的推廣、特例的聯繫：如三角函數概念的推廣、指數概念的推廣。

上述為概念教學的基本準則，然 Skemp (1995) 指出概念的學習應是學生自我的建構。因此，Skemp (1995) 認為教師的職責就是為學生提供學習環境，讓他們通過自己努力而理解，亦即教師應幫助學生做到智性學習，而非只是讓學習變成一種慣性學習，使學習者成為一個只聽候施教者吩咐的人，面對每一個新情況缺乏信心獨立去處理的能力。如 Skemp (1995) 所說的：「學習者必須在自己的腦海中，自行形成概念建構機略；施教者需要編排漸進式概念，層次分明的教材，更需要設計有感官經驗的學習活動。」

由上面的文獻得知，概念的形成與學習是抽象的、有共通性、有層次性的。而學習者本身是建立概念的關鍵人物，當其有強烈的動機與完整的先備知識，概念的學習將不是一件難事。而身為教師的我們，必須提供足以引起學生動機的教材，呈現新概念，給予學生充足的時間自我檢視已學及新習得概念間的異同，引導學生從自我建構中發現自己的迷思概念，進而建立正確的數學知識。

第三節 補救教學

補救教學(remedial instruction)是一種「評量—教學—再評量」的循環歷程。即教師經由評量發現學生有學習困難後，診斷出問題所在，針對問題設計一連串適切合宜的教學活動，或改進教學策略，以幫助學生克服學習障礙，達成該階段的學習目標。換句話說，補救教學基本上是診療教學模式，其重點在於瞭解學生的學習困難後，精心設計課程內容及慎選教學策略，俾能適合學生的個別差異。

因此，有效的補救教學來自於正確的診斷。透過診斷的觀察、測驗、晤談，教師可以對學生的先備知識及迷思概念有所瞭解，然後再決定補救教學的方向，直到學生能達到學習目標。張新仁 (2000) 把補救教學的歷程分為三個階段：第一階段是藉由篩選，診斷出誰需要進行補救教學；第二階段則從學生的評量資料中，包括學習困難報告、作業、測驗、教室觀察記錄等，瞭解學生的學習困難所在，以求對症下藥；第三階段則為研擬教學策略，設計符合學生需要的補救教學活動。

由於本研究的目的是探討學生一元二次不等式的錯誤類型及其原因，並檢視利用電腦輔助所進行的補救教學之成效。於下將針對補救教學的實施原則與補救教學常見的模式分別討論之，並將在本節最後討論電腦輔助教學的優點及其至今對數學教學的影響。

一、補救教學的實施原則

欲有良好的補救教學成效，在實施教學上必須要有良好的教學策略。以下將綜合許多學者（Otto, McMenemy, & Smith, 1973；許天威，1986；杜正治，1993；李翠玲，1993；徐貞美，1993；張新仁，1995；張新仁，2001）提出成功的補救教學進行原則及策略，並參考Stein, Smith, Henningsen, & Silver（2000）在 *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction：A Casebook for Professional Development* 書中所提到的理想的數學教學願景，從教材設計及教學

法與教學技巧的方向切入，歸納整理實施補救教學應遵循的法則如下：

(一)、教材設計

1. 分析基本能力

一般的補救教學的課程設計應考慮學生的基本能力、學科能力、學習動機，並選擇合受試者能力的教材。任何單元的學習都需要有相當的起點程度，才能順利的到達終點。學生有先天上的個別差異，例如年級、程度、先備知識及心智能力(注意力、理解力、觀察力等)，相關能力的不足必然造成學習的困難。因此老師在設計補救教學課程時，不僅要考慮到學習目標，還得考慮到學生的相關能力，再配合適切的教材與教法，方能達到事倍功半之效更需要把學習的主體放在學生身上。

2. 編製適合受試者能力的教材

設計一套好的補救教學課程，是達成補救教學成效的最主要基礎。學習困難學生適用結構化較強、認知歷程較明確、難度較低的自編教材，並且採用反覆練習、循序漸進和活潑變化的教法。因此宜根據學生的程度選擇合適的教材，可簡化原有教科書內容、另行編選坊間教材，或自行重新設計教材。

3. 重視數學連結

讓數學融入生活，與生活相連結，與其他領域連結，學生除了可以對老師所要教導的數學概念有一定程度的瞭解之外，也可以瞭解到數學的多樣及豐富的特性。透過連結所呈現的數學不再只是單調、疏離的數學公式或符號，而可以是一門有趣、可親近的學科，這樣有意義的學習可以幫助學生體會數學之美。

4. 提供豐富的具體操作活動及利用電腦多媒體

教師應結合具體與半具體的操作學習於整個補救教學活動中，給予學生多方面的感覺經驗，期能從具體與半具體的學習經驗中，與抽象的數學符號連結起來，引導學童從具體、直觀中去瞭解數學原理，直到學生有能力去表達他們瞭解的數學語言及抽象符號。因此教師可採用多元化教具並利用電腦

多媒體來輔助教學。對於中、低程度的學生而言，學習活動應以有變化、生活化、情境化、具體化為原則。

(二)、教學技巧與方法

1. 建立良好的師生關係

良好的師生關係是有效教學的第一步，擁有良好的師生關係，才能擁有良好的上課氣氛，提高學生的學習意願，學生的學習才能事半功倍，因此在進行補救數學技巧，包括基本事實教學之前，應該建立良好的師生關係。

2. 因「才」、「材」施教

數學科的教學範圍包含極廣，有運算、代數、幾何、證明等，因此其教學宜多樣化，並針對不同類型的學生及教材內容採取不同的教學方法，可採用教科書、作業簿、數學學習站、實際操作、遊戲等活動，以提高學生的學習興趣並達到良好的學習功效。由於每個參與補救教學的兒童之間，具有不同的特質及需求，因此，補救教學針對兒童的能力差異，可採用個別化教學或小組合作學習的方式，輔導學童學習新的技能、練習及演算數學的問題，肯定每一個學生的發展空間。

3. 循序漸進地引導

數學科學習的目的是輔導兒童能主動地從自己的經驗中，理解並建構數學概念，培養溝通的技巧、理性的批判能力及接受並尊重別人觀點的態度。基於此，我們應該尊重孩子的自然想法；不要責備孩子的錯誤，不要急於告訴他解法或代替他學習；欣賞孩子從試著的去做中尋求解題策略；鼓勵孩子的成就，提升孩子的信心；彰顯孩子的學習所得，期許孩子透過成功的經驗，提高學習的興趣和信心。

4. 立即的改正與回饋

立即的改正與回饋是教學過程中最重要的一環。藉由立即的改正，學生可即時更正自身的迷思概念，進而可以提高學習的效果。學習成果良好者亦能馬上得到回饋及正增強，將有助於提高學生的信心及激發其動機。

5. 類化的重要性

在學習的過程中，知識是一步步累積而來的。新知識的建立往往是利用舊知識、舊經驗的基礎。學生學會某些教材後，能應用此經驗再學習新教材，是為類化。應用舊經驗學習新教材的過程，在數學科的教學上及學習中甚為重要。類化的教學將有助於學習單元的連結、觀念的加強以及課程的連貫。然不可否認的，過度、不合邏輯的類推也容易導致迷思概念的產生。因此，妥善運用類化教學與區隔新舊教材間的異同更是刻不容緩的。

6. 提供學習鷹架

以教育心理學而言，能力強的孩子，他們能夠自主地去探索，進行發現知識之旅；但是對一般的普羅大眾，老師適當的介入，給予線索、協助探索，是有正面的教育意義的。其一，可以減少學生的嘗試錯誤率；其二，浪費太多的時間；其三，讓學生能朝正確的歷程邁進。

7. 維持強烈的學習動機

學習動機往往會影響學習成就。為有效的激起學生的學習動機，教師應給予學生足夠的練習機會、協助記憶，以建立其成功的經驗，並增強回饋，使學生能繼續不斷地努力學習。

綜合相關研究文獻的探討及補救教學的原理，本研究發展一元二次不等式補救教學活動設計時，將考量到研究對象的先備知識與迷思概念，確立教學目標及融入教學理念草擬教學活動設計，規劃學習活動安排、學習單及教師佈題，營造整個教學情境佈置。

二、補救教學的模式

實施補救教學的目的，在於提供更有效教學的教學活動，或更多的學習機會，鼓勵學生提高學習效果，達到預定成就水準。限於各種主觀與客觀條件，以及學生個別需要，教師需採用可行性較高，並且較切合學生需要的模式。根據李咏吟等人 (1993)，國內外常用的補救教學模式如下：

(一)、資源教室模式 (resource program)

資源教室模式是現行最常見的補救教學模式。資源教室是一種輔助性教育措施，提供教室與課程，使接受補助教學的學生在大部份的時間，與一般學生在普通教室上課，少部分時間則安排到資源教室，接受資源教師的指導。

(二)、學習站模式 (learning stations)

學習站利用各教室環境，畫出學習區域，不需另闢教室。教材與教具不同於正規課程，以趣味性與啟發性為主要考量。每次進行補助教學可依個別需要與進度，取用適當的教材，教學方式以個別方式實施，教師可以鼓勵學生自動自發學習，可由教師或請程度較優的同儕協助。

(三)、學習實驗室模式 (learning lab)

學習實驗室是一間獨立的教室，設置若干個學習台及學生資料櫃。其設置的目的乃在於針對學習上具有特殊需求的學生提供精心設計的教學活動與設施。採用實驗教學方式，為每位學生建立個人檔案，包括各科學習狀況之詳細記錄，透過各科教師的診斷，以訂定其單元與行為目標。

(四)、套裝學習模式 (learning package)

套裝學習是一種能力本位與自我導向的學習方式，學習目標的研擬必需符合可觀摩與可量化的原則，以循序漸進的方式，協助學生習得一種觀念或技巧。每一套學習材料皆為特定的能力或技巧而設計，提供多樣的活動以達成學習目標。學生可依自主的進度學習。

(五)、電腦輔助教學模式 (computer-assisted instruction, CAI）

電腦輔助教學係利用電腦呈現教材與控制教學進度是一種個別化教學，學生不但可以依自己的能力及速度學習，且可得到立即回饋的效果，頗適合用於補救教學。因此，電腦輔助教學為未來學習實施補救教學的一種極佳方式之一。

本研究所採取的補救教學模式為資源教室模式，並輔以電腦輔助教學，盼學

生能於這樣的環境與教法中，得到學習上最大的效益。

三、電腦輔助教學

(一)、電腦環境對教學的功能

隨著認知科學研究的進步，電腦教學環境融合認知理論，使電腦環境為一個提昇學生學習的境界。利用電腦來協助學生學習，由於電腦可以記憶、判斷和運算，因此，與傳統教學法比較起來，電腦教學環境具有多種特色及功能。以下將整理多位學者 (吳裕益，1986；黃振球，1991；洪榮昭，1992；王立行，1992；Kaput, 1992；謝豐瑞，1993）關於電腦環境對教學影響之研究。

1. 提昇學生學習的動機

電腦環境可呈現動畫、音效、色彩，是較為活潑的教學方式，足以引發學生動機。此外，電腦視窗環境可以使用多重表徵的方式來組合教學素材，學生能夠從教材中獲得豐富的知識，甚至可以讓學生主動去組合其喜好的主題，如此可以激發學生主動學習的動機。

2. 立即回饋

當學生面對電腦時，可根據作答情形立即得到回饋。回饋的設計可分為兩方面，一為資訊的回饋，一為社會化的回饋。資訊的回饋乃是電腦能立即對學生的答案的正確度給予適當的資訊。社會化的回饋包括文字的（或聲音的），類似於教師口頭上的稱讚。換言之，在採用電腦輔助教學之情境中，「師生」間雙向溝通之機會較之於傳統一對多的師生比例的情況將大為增加。

3. 適應個別差異

電腦視窗環境中具有個別化教育的特質，學習進度可以由學習者自我控制。另外，由於學習者的理解能力不同，所以電腦教學軟體應在教材的設計上分等級，使學習者有機會選擇合適自己的教材。學習者在電腦環境中，能自我控制進度，這樣不但能增加學習效果，也能引發學習動機。

4. 有效改善師生關係

在電腦輔助教學模式中，電腦與人類教師是合作而非對立的關係，教師的角色不再是講授者或是批判學生學習成效低落的批判者，而是學習的促進者。教師的任務不再是將知識傳授給學生，而是引導學生如何去擷取及應用知識，如何思考、判斷及解決問題。因此電腦輔助教學能有效的改善師生之間的關係。

5. 降低認知負擔

電腦環境的動態連結功能，可將概念中的所有表徵一起呈現在畫面中，使學習者不必在學習時，時時佔用工作記憶區去檢索與解碼的工作，而能專注於建立內在與外在連結的工作上，這樣的學習環境可以降低使用者的認知負擔。

6. 提供多樣化的學習型態

電腦可提供學習者更多樣化的學習，如教材可同時包括圖形、文字、聲音、影像等，學生可依自己的學習型態，選擇所喜好的學習方式，增加適應個別差異的能力。由於教材的方式較富變化，如遊戲式和模擬式等，可大為增加學生的學習興趣。其多元感官的訊息輸入和輸出模式，也比傳統的課堂教學更能提供良好反覆練習的情境，故教學效果較佳。

7. 受時空限制少

只要設備足夠，在任何時間及空間均可進行電腦教學。學生偶因重大事故無法到校上課，也可在家自我學習，即使進度較慢，到校上課時仍可在電腦輔助教學的幫助下慢慢趕上進度。

8. 減輕教師負擔

由於電腦輔助教學的課程均事先編寫妥當，教師可以減少準備教材之時間。在教學時，電腦輔助教學可以呈現教材與問題，也可以訂正學生之錯誤，故教師可以減少演講及批改作業之時間，而有更多的時間和心力來作個別輔導。

簡而言之，電腦在整個學習活動的角色扮演上，可以說是一個認知的增強器

或是智慧的擴大器。學習者可以藉助電腦來擴充其思考能力，理解抽象深奧的概念。無疑的使電腦在教學的過程中扮演了一個更積極的角色。

而本研究利用PowerPoint軟體的「動態呈現」與Visual Basic程式所寫成的二次函數繪圖軟體的「動態繪圖」特性，設計能「提昇學生學習的動機」、「降低學生認知負擔」、「減輕教師負擔」的電腦環境，使學生能將一元二次不等式的代數式與其圖形的表徵作正確的連結，促進學生的學習。

(二)、電腦科技在補救教學上的相關研究

國內有關應用電腦科技在數學科補救教學的研究已漸趨成熟，於下將分述幾篇與本研究相關性較強，且利用電腦作為輔助教學的研究及其成效：

1. 陳英娥 (1992) 探討電腦輔助教學方式與解說式教學方式對國中數學科之相似形和二次函數單元進行補救教學之學習成效，並分析學生經由電腦輔助補救教學後的學習態度及反應。實驗組採電腦輔助教學方式；控制組採解說式教學方式進行補救教學。研究結果發現在數學科學習成就上，實驗組顯著優於控制組，且實驗組學生對採用電腦輔助教學進行補救教學持正向態度。
2. 蕭登仲 (2002) 的研究旨在動態幾何軟體中，利用建構學習及電腦視覺表徵理論，創造出使用者可藉由圖像自由操作，來學習等值分數的環境。其目的是在探討利用電腦環境動態連結，將概念中所有表徵一起呈現在畫面中的教學成效。經過實驗教學後，結果顯示學生在保留程度上及解題策略上，皆較優於實施傳統教室教學的控制組學生。
3. 陳正明 (2003) 的研究是探討一位國二學生透過Excel的輔助，進行線性函數的補救教學活動時，學生的線性函數概念三個主要表徵(表列、代數式、圖形)改變情形，以及學生經過補救教學活動後，其學習態度的改變等。該生在前測的三個表徵(表列、代數式、圖形)安置層次分別為「內化」、「內化前」、「內化前」；而在後測以及延後測的三個表徵(表列、代數式、圖形)安置層次分別為「壓縮」、「壓縮」、「壓縮」，顯示經過電腦輔助的補救教學後，學生的概念已有提昇；且經過一段時間後，她的概念保持同一層次，沒有退

縮，且對學習數學的信心也相對增加了。

4. 姚晉雯 (2003) 研究高三學生對平移旋轉的解題表現及其相關因素分析以及進行GSP電腦輔助補救教學實驗。結果發現，使用GSP設計的相關課程，可以提昇學生平移旋轉的能力，且能引發學生學習動機並培養學生的空間能力。進行完補救教學實驗後，從學生的解題表現與學習態度來看，大多對GSP的教學抱持著正面的態度。GSP動態畫面一目了然，對於學生建立概念心像有很大的幫助。此研究顯示出，電腦作為輔助的工具，無疑地能提供更有利的教學情境，幫助學生的學習。
5. 何政謀 (2004) 以GSP軟體設計動態情境課程，對三位數學學習低成就的學生，進行補救教學。結果顯示學生在經由三週六節課的補救教學之後，均已學會解生活情境問題相關的二元一次聯立方程式，也更為瞭解二元一次方程式的圖形變化及方程式係數間的關係。且從晤談及上課情形看來，發現電腦輔助教學讓師生間的互動更為良好。

由上述的研究可證實電腦的環境的確能幫助學學習，而且電腦的環境在數學科補救教學成效上是有正面效果的。因此，研究者嘗試利用大家熟悉、操作簡當的軟體來發展教材，MS Office中的PowerPoint軟體即能符合此特性。多數學校都擁有這套軟體，且多數老師對此軟體有相當的接觸。研究者想利用PowerPoint特性，創造出適合一元二次不等式的動態圖解的教學環境，希望藉由此環境幫助學生克服在此單元的學習困難。