

## 第二章 理論模式

### 2-1 前人研究相關模型的比較與研究動機

自從 1628 年 William Harvey [11]發表血液循環理論,到 O'Rourke 1980[12]年一系列的文章,血管模型從單一血管演變到強調血管系統的整體設計,也從單純的流體力學探討逐漸的加入了生理條件。較為重要的理論如下:

#### 1. Poiseuille's Law (1846):

描述剛性圓柱管中的穩流(Steady flow)。

#### 2. Hales;"Windkessel"Model (1733):

(1)波速無限大(initial wave velocity);

(2)血管短且硬,且沒有波的傳遞(Wave propagation);

(3)適用於體積小的昆蟲或鳥類。

#### 3. Moens-Korteweg (1878):

(1)圓柱純彈性管;對於圓柱型純彈性管,內徑為  $R_i$ ,非黏滯性液體,

它假設了  $\frac{dR_i}{R_i} \ll \frac{dP}{P}$  這表示了它不允許徑向運動的硬管,和生理上是

抵觸的。  $\frac{h}{R_0} \ll 1$  這又說明了它適用的情形是,管徑非常薄,但在生

理上,主動脈這值的比例在年輕個體有 0.11 左右,而老年人則會

到 0.19[11],因此並不恰當。

(2)非黏滯性流體,導致各層(laminae)軸向速度相同。

4. Womersley-剛性管(1955):

血管為無限長不可壓縮的圓柱硬管，所以運動被侷限在軸向。

5. Womersley-彈性管(1955):

(1) 波的傳遞不存在反射波；

(2) 仍然解軸向方向的運動，但修正徑向膨脹(Radial Dilatation)。

6. Womersley-彈性管負載(loading)(1955):

修正上一個理論的  $\frac{h}{R}$  值

7. 類比電路模型 Noordergraaf's Electrical Analogus(1969):

(1) 將血管視為無限多的微量長度的管流元的組合，再將管流元

與傳輸網路元件類比；

(2) 軸向及對流加速度項可以被忽略；

(2) 三個黏滯項以流體阻力乘以流體通量(RQ)表示；

(3) 軸向流體速度在血管內分佈不為徑向位置的函數。

Fry and Greenfield (1964)與 Noordergraaf(1969)對 Womersley 的理論所做的假設做了仔細的分析與探討：

1. 不可壓縮的牛頓流體(Newtonian Fluid)

2. 均勻的圓柱血管(Uniform, Cylindrical Tube)

3. 忽略入口效應(Entrance Effect)

4. 波的傳遞不存在反射波(Reflection Waves)
5. 方程式的線性化(Linearization of Equation)
6. 薄管壁(Relatively Thin Tube Wall)
7. 均向性的管壁彈性(Isotropic Wall Elasticity)
8. 不可壓縮的管壁(Incompressible Wall)
9. 管壁的黏滯性(Newtonian Viscosity of Wall)
10. 管壁的負載(Wall Loading and Constraint)
11. 管壁與流體的密度假設相等(Wall and Fluid Densities)
12. 假設  $\frac{dP}{dt} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$

上述的假設有很多是與生理有很大差距的，例如：血管直徑隨著距離的增加會有縮減(tapering)現象、血管壁與血液密度有所差異。Womersley 公式無法與生理配合，而且應用範圍有限，是因為忽略下列很重要的事實

(1)Lamb,H.(1932)[13]提出血管壓力波傳播的模式(mode)有下面四種

1. 伸縮(distention)模式
2. 軸向(longitudinal)或徑向(axial)運動
3. 扭轉(torsional)模式：血管的扭轉運動

#### 4. 彎曲(flexural)模式

(2) Patel(1969) [14]在活體實驗中得到血管徑向、軸向和環向的彈性

係數 (Elastic modulus):

狗主動脈(cannine aorta)的活體實驗(in vivo)

$$E_{zz} > E_{\theta\theta} > E_{rr}$$

切下血管在外界實驗(in vitro)

$$E_{zz} \approx E_{\theta\theta} = 7.4 * 10^6$$

胸主動脈(thoracic aorta)生理實驗

$$E_{rr} = 5 * 10^6$$

$$E_{\theta\theta} = 7 * 10^6$$

$$E_{zz} = 10 * 10^6$$

由 Patal、Fry 兩人的研究結果，其中徑向的彈性係數最小，所以徑向伸縮模式應該是最容易發生的一種。也顯示出徑向的彈性運動較其他方向的運動更為重要，林玉英教授與王唯工教授從牛頓第二運動定律及彈性力學出發，將心臟視為一個週期性的壓力幫浦，提出「徑向振動理論」來解釋之前理論無法解決的問題。

## 2-2 徑向振動理論

林玉英教授與王唯工教授根據彈性力學及牛頓第二運動定律，考慮生理上的條件，針對管壁的徑向振動，考慮血管的彈性、黏滯性及所受張力，提出「徑向振動理論」(radial resonance theory)，來探討血管系統的特性[8,9]。

### 2-2-1 徑向振動方程式的推導

考慮一充滿流體的圓柱形(cylindrical)彈性長直管，假設管壁材料遵守虎克定律，且管壁某處發生振動時其截面積仍維持圓形，只有管徑隨時間與軸向位置變化。

討論直管中一小段的情況。如 Fig 2-2-1, Fig 2-2-2 所示。其中  $z$  方向代表軸向， $r$  方向為管之內徑， $h$  為管壁的厚度， $d$  為軸向截面的一極小角度。考慮中心位於  $Z_i$ ，長度為  $Z$  的第  $i$  段直管由圓周上截取夾角為  $d$  的一片管壁。

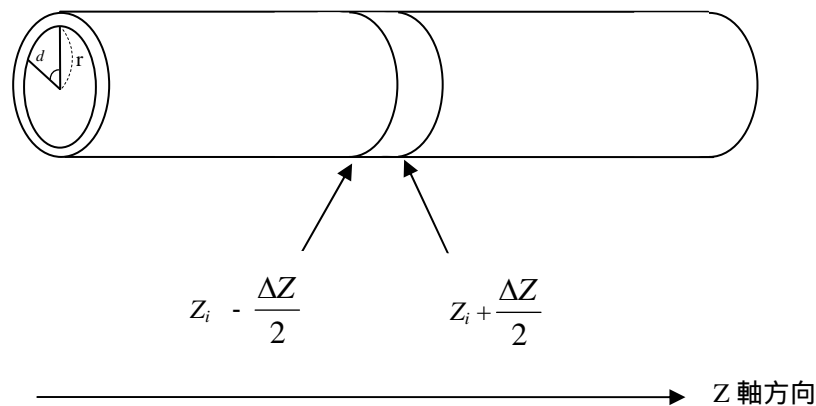


Fig 2-2-1

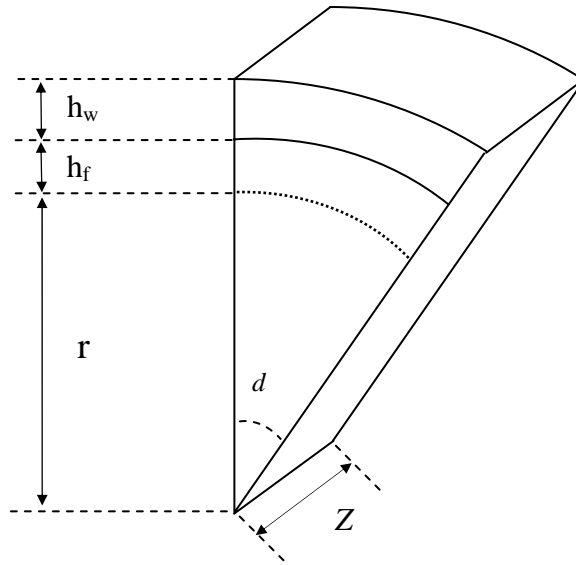


Fig 2-2-2

此時，夾角  $d$  的一小段管壁所受外界的力：

1. 沿壁張力在徑向之分力 (Longitudinal stretching forces)

若血管兩端有外加張力，則當  $\frac{dr}{dz}$  存在時 (管壁有軸向曲折) 有一徑向分力  $T(\frac{dr}{dz})hrd\theta$  ( $T$  為單位面積之張力)，在  $\Delta Z$  之間的合力為：

$$F_T = (T(\frac{dr}{dz})rd\theta)_{z_i+\frac{\Delta z}{2}} - (T(\frac{dr}{dz})rd\theta)_{z_i-\frac{\Delta z}{2}} \quad (2-1)$$

2. 虎克張應力 (circumferential force)

假設未發生振動前管壁半徑  $r_0$ ，管壁厚度  $h_0$ ；振動時半徑為  $r$ ，管壁厚度  $h$ 。振動時環向長度的改變量為  $rd\theta$ ，環向的形變 (circumferential stress) 為  $e_{\theta\theta} = \frac{\Delta r}{r_0}$ ，由此產生的應力 (stress) 為  $S_{\theta\theta} = E_{\theta\theta}e_{\theta\theta}$ ，此處  $E_{\theta\theta}$  為環向的楊氏彈性係數 (Young's modulus)。因此由虎克張應力所造成的恢復力 (restoring force)  $F_C$  可以表示成：

$$F_C = -E_{\theta\theta} \frac{dr}{r} \Delta Z r d\theta \quad (2-2)$$

### 3. 管子外面對管壁造成的阻尼力(resistance force)

$$F_R = -R_i \Delta Z r d\theta \frac{dr}{dt} \quad (2-3)$$

其中  $R_i$  為徑向黏滯係數

### 4. 虎克剪應力(shearing force)

由虎克定律，可知剪應力  $S_{rz} = E_{rz} e_{rz} = E_{rz} \frac{dr}{dz}$ 。而此力作用在

$Z = Z_i - \frac{\Delta Z}{2}$  與  $Z = Z_i + \frac{\Delta Z}{2}$  兩平面，其合力  $F_S$  如下式

$$F_S = (E_{rz} \frac{dr}{dz} h r d\theta)_{Z_i + \frac{\Delta z}{2}} - (E_{rz} \frac{dr}{dz} h r d\theta)_{Z_i - \frac{\Delta z}{2}}$$

(2-4)

$E_{rz}$  為剪向彈性係數

### 5. 血管外界壓力對血管壁所造成的力

$$F_{P_0} = -P_0 \Delta Z r d\theta \quad (2-5)$$

$P_0$  為在  $Z_i$  處的平衡壓力

### 6. 兩側流體壓力所造成的力

$$F_P = P \Delta Z r d\theta \quad (2-6)$$

$P$  為流體對管壁的壓力

慣性力為動量對時間的微分： $\sum F_i = \frac{d(P_r)}{dt}$  其中  $P_r$  為此一薄片管壁

(包含其中的流體)的動量，動量  $P_r$  可以用下式表示：

$$P_r = \mu \Delta z r d\theta \frac{dr}{dt} \quad (2-7)$$

其中  $\mu = \rho_w h_w + \rho_f h_f$ 。  $\rho_w$  為管壁的密度，  $h_w$  為管壁厚度，  $\rho_f$  為管內流體密度，  $h_f$  則為與管壁一起振動的液體厚度。

將式(2-1) (2-2) (2-3) (2-4) (2-5) (2-6)帶入式(2-7)，可得

下式：

$$d\theta\mu\Delta Z \frac{d}{dt} \left( r \frac{dr}{dt} \right) = d\theta \left\{ -\frac{E_{\theta\theta}}{r} r\Delta Z dr + (E_{rz} h + T) r \frac{dr}{dz} \Big|_{z_i + \frac{\Delta Z}{2}} - (E_{rz} h + T) r \frac{dr}{dz} \Big|_{z_i - \frac{\Delta Z}{2}} \right\} - R_i r \Delta Z \frac{dr}{dt} + r \Delta Z (P_i - P_0)$$

對 積分

$$2\pi\mu\Delta Z \frac{d}{dt} \left( r \frac{dr}{dt} \right) + R_i \Delta Z 2\pi r \frac{dr}{dt} + \frac{E_{\theta\theta}}{r} \Delta Z 2\pi r dr - 2\pi r \Delta Z (P_i - P_0) = (E_{rz} h + T) \left[ \left( 2\pi r \frac{dr}{dz} \right) \Big|_{z_i + \frac{\Delta Z}{2}} - \left( 2\pi r \frac{dr}{dz} \right) \Big|_{z_i - \frac{\Delta Z}{2}} \right] \quad (2-8)$$

再另外定義  $A_i = \pi r^2$

Area Compliance

$$C_A = \frac{dA}{dP} \Rightarrow C_A \int_{P_0}^{P_i} dP = \int_{A_0}^{A_i} dA \Rightarrow C_A \Delta P_i = \Delta A_i$$

則式(2-8)

$$\Rightarrow \mu C_A \frac{d^2 P_i}{dt^2} + R_i C_A \frac{dP_i}{dt} + C_A \frac{E_{\theta\theta}}{r} \Delta P_i - 2\pi r (P_i - P_0) = (E_{rz} h + T) \frac{1}{\Delta Z} \left\{ C_A \left[ \left( \frac{dP_i}{dz} \right) \Big|_{z_i + \frac{\Delta Z}{2}} - \left( \frac{dP_i}{dz} \right) \Big|_{z_i - \frac{\Delta Z}{2}} \right] \right\} \quad (2-9)$$

上述是在  $Z = Z_i$  處  $Z_i - \frac{\delta z}{2} \sim Z_i + \frac{\delta z}{2}$  間，壓力波隨時間的變化

對於任意  $Z$  而言，將上式表示法稍作改變



$$Z_i \rightarrow Z$$

$$\delta z \rightarrow dz$$

$$P_i - P_0 \rightarrow P(z, t)$$

$$R_i \rightarrow R$$

$$r \approx r_0$$

$$\text{且令} \quad \kappa \cong \frac{E_{\theta\theta}}{r_0} - \frac{2\pi r_0}{C_A} \quad \tau = E_{rz} h + T$$

可整理得一可描述彈性管上隨著位置及時間變化的二階偏微方程式

$$\mu \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial t^2} + R \frac{\partial P(z, t)}{\partial t} + \kappa P(z, t) = \tau \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial z^2} \quad (2-10)$$

由此式出發，可討論壓力波在黏彈性(viscoelastic)管中，因徑向振動所造成的傳播現象。

## 2-2-2 徑向共振理論的脈衝響應解

令  $P = P_i - P_0$  且管長為  $L$  ,  $P_0$  為靜水壓(外接水槽提供的壓力) ,  $P_i$  則為血管壁  $Z_i$  處所測量到的壓力。且在  $t = 0$  時於  $Z = \xi$  處打入一脈衝波 (Impulse) , 即加入外力  $F_{ext}$  , 則(2-10)式可以寫成:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + b \frac{\partial P}{\partial t} + \omega_0^2 P = V_\infty^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{2\pi r_0}{L_m C_A} F_{ext} \quad (2-11)$$

其中  $L_m = 2\pi r_0 (\rho_f h_f + \rho_w h_w)$

壓力隨時間的變化可表示如:

$$P(z,t) = P_i(z,t) - P_o(z) \quad (2-12)$$

其中,  $b$  為阻尼常數,  $r_0$  未振動時管壁半徑,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$  主動脈天然的角頻率,  $V_\infty$  為波速。

1. 如兩端外接水槽, 相當於兩端閉管:

其邊界條件為

$$P(z=0,t) = 0$$

$$P(z=L,t) = 0 \quad (2-13)$$

而管中各點的壓力強度依各個天然頻率不同, 如 Fig 2-2-3 所示

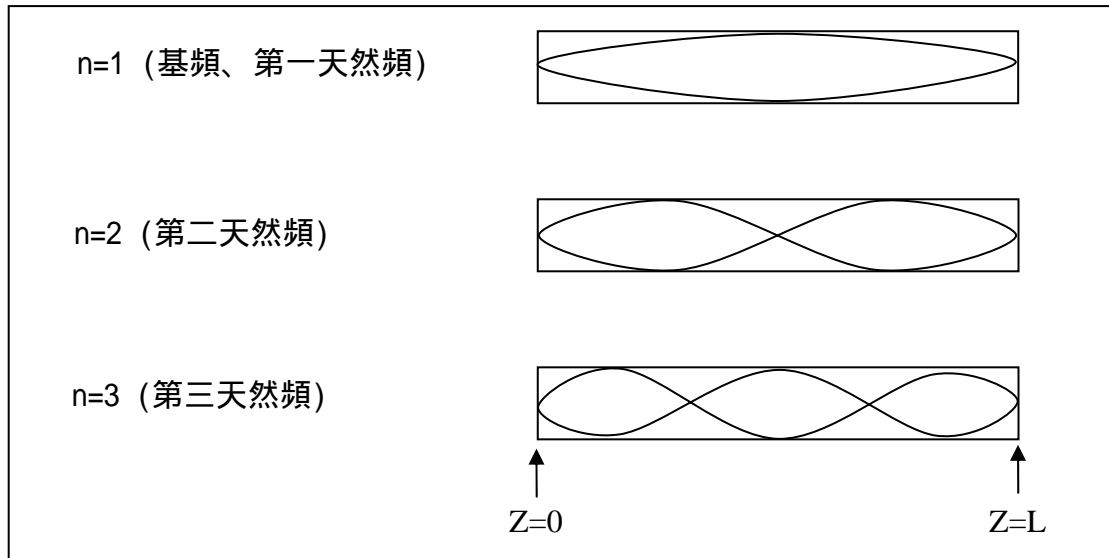


Fig 2-2-3

脈衝波的週期為  $T$ ，於極短時間  $\Delta T$  將水打入，如此外力  $F_{ext}$  可以寫成下式：

$$F_{ext}(z, t) = F(t)\delta(z - \xi) \quad (2-14)$$

其中

$$F(t) = \begin{cases} F_o & NT - \frac{1}{2}\Delta T \leq t \leq NT + \frac{1}{2}\Delta T \\ =0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2-15)$$

當  $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$F(t)$  可以寫成一個 Fourier cosine series

$$F(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \omega_m t \quad (2-16)$$

式中

$$\omega_m = \left(\frac{2\pi}{T}\right)m \quad (2-17)$$

$$a_o = F_o \frac{2\Delta T}{T} \quad (2-18)$$

$$a_m = F_o \frac{2 \sin(m\pi \frac{\Delta T}{T})}{m\pi} \quad (2-19)$$

當  $T \rightarrow \infty$  , 則相當於脈衝波。

利用 Green's function method (Migulin, 1983; Butkov, 1968) , 與邊界條件 (2-13) 式 , 可以解出偏微分方程(2-20)的解如(2-21)式

$$\frac{\partial^2 P_\omega}{\partial t^2} + b \frac{\partial P_\omega}{\partial t} + \omega_o^2 P_\omega = V_\infty^2 \frac{\partial^2 P_\omega}{\partial z^2} + F \delta(z - \xi) e^{-i\omega t} \quad (2-20)$$

此處  $F = 2\pi r_o a_m / L_m C_A$  ,  $\omega = \omega_m$ .

$$P_\omega(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi\xi}{L} \sin \frac{n\pi z}{L} e^{-i(\omega t + \phi_n)} \quad (2-21)$$

其中

$$A_n = \frac{2F}{[(v_n^2 + \omega_o^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2]^{\frac{1}{4}}} \quad (2-22)$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{-b\omega}{v_n^2 + \omega_o^2 - \omega^2} \quad (v_n = \frac{n\pi V_\infty}{L} \quad n=1,2,3,\dots) \quad (2-23)$$

振幅最大值發生在  $dA_n/d\omega = 0$  的地方 , 與外力的頻率為  $\omega$  與天然頻  $\omega_{Rn}$  相同時

$$\omega_{Rn}^2 = v_n^2 + \omega_o^2 - \frac{1}{2}b^2 \quad n=1,2,3,\dots \quad (2-24)$$

如果  $v_o^2 - \frac{1}{2}b^2 = 0$  或是很小 , 則  $\omega_{Rn}$  由天然頻  $v_1$  組成

$$v_1 = \frac{\pi V_\infty}{L} \quad (2-25)$$

$$\omega_{Rn} = n v_1 \quad (2-26)$$

2. 如一端  $Z=0$  外接水槽，另一端夾起，相當於一端開口一端閉口：

此時管中各點的壓力強度依各個天然頻率不同，如 Fig 2-2-4 所示

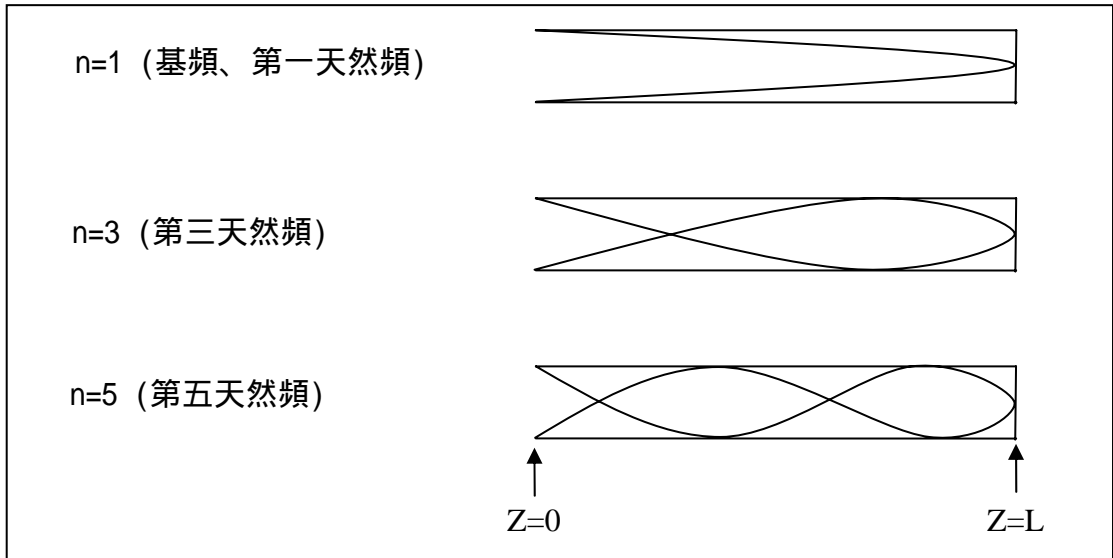


Fig 2-2-4

其邊界條件為

$$P(z = L, t) = 0 \quad (2-27)$$

可解得

$$P_{\omega}(z, t) = \left( \sum_n A_n \cos \frac{n\pi z}{2L} \right) e^{-i(\omega t + \Phi_n)}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \text{odd numbers only} \quad (2-28)$$

## 2-3 徑向振動的動能(TKE)的公式推導

以徑向共振理論為出發點，考慮直管中管壁半徑為  $r$  長度為  $dz$  的一小段，推導彈性管管壁橫波傳輸時的能量，如下：

$P_r$ ：彈性管管壁徑向振動的動量

$h_w$ ：彈性管管壁厚度

$\rho_w$ ：彈性管管壁密度

$\partial r / \partial t$ ：管壁振動速度

$$P_r = 2\pi r \mu_w \partial r / \partial t dz = \mu_w \partial S / \partial t dz$$

(2-29)

其中

$$\mu_w = \rho_w h_w \quad , \quad S = \pi r^2$$

彈性管  $dz$  長度的質量為  $m_w = 2\pi r \mu_w dz = \lambda_w dz$ ，而  $\lambda_w$  為彈性管的軸向單位長度密度，則徑向振動的動能 TKE( The transverse kinetic energy )  $dK_r$  可以表示成：

$$dK_r = P_r^2 / 2m_w = \lambda_w (\partial S / \partial t)^2 dz / 8\pi S \quad (2-30)$$

我們定義 area compliance  $C_A = dS / dp$  ,面積隨時間的變化可以表示成  
 壓力隨時間的變化 , 所以  $dK_r$  亦可表示成 :

$$dK_r = \lambda_w C_A^2 (\partial p / \partial t)^2 dz / 8\pi S . \quad (2-31)$$

將 Area compliance  $C_A$  用[15] pressure-strain elastic modulus  $E_p$  表示 ,  $C_A = 2S / E_p$

所以  $dK_r$  又可表示成 :

$$dK_r = \lambda_w S (\partial p / \partial t)^2 dz / 2\pi E_p^2 \quad (2-32)$$

而單位動脈管壁長度的TKE平均值 , 可用血壓波頻率  $f$  及振幅  $p(z)$  寫成 :

$$d\bar{K}_r / dz = \pi \lambda_w S f^2 p(z)^2 / E_p^2 \quad (2-33)$$

從這個式子中我們可以推論出五個結論 :

- (1) TKE 跟動脈血管壁的線密度  $\lambda_w$  或厚度成正比 ,
- (2) TKE 和動脈內血液流通面積  $S$  成正比 ,
- (3) TKE 與壓力波振幅  $P_{\max}$  平方成正比 ,
- (4) TKE 與 the pressure-strain elastic modulus  $E_p$  平方成反比 ,

(5) TKE 與心臟頻率平方成正比，如果考慮TKE中  $f^2$  項，則顯示出壓力波高頻的部份也佔了重要的角色。

如果於長度為  $L$  的彈性管兩端給予靜壓產生穩定橫向簡諧振動，其中

$$p(z) = p_{\max} \sin(n\pi z / L) \quad , \quad n=1,2,3,\dots \quad (2-34)$$

則平均總動能可以寫成：

$$\overline{K_r} = L\lambda_w S \omega^2 p_{\max}^2 / 8\pi E_p^2 = \pi M_w S f^2 p_{\max}^2 / 2E_p^2 \quad (2-35)$$

其中  $M_w$ ：彈性管的總質量