第三章《東算抄》內容分析（上）

自本章節起至第五章，筆者先就各卷各「門」之數學知識作一概括性的介紹與「觀測」，並針對內容進行分析、比較、討論。在此不以逐題分析，因為此舉將失去「觀測」之意義，亦恐失去「視野」，筆者希望能將其精華萃取出來，並呈現出其在「東算」中的價值。

3.1 《東算抄》之目錄概述[1]

《東算抄》全書共分卷之一、卷之二、卷之三、卷之四 4 卷 19 門 363 題，但目錄中卻未載入「追錄」部份，且目錄中各卷的標示及文本中並未有天、地、人之別稱，故筆者認為此乃後人所加。

卷之一計有〈縱橫乘除門〉、〈異乘同除門〉、〈田畝形段門〉、〈折變互差門〉〈商功修築門〉、〈貴賤差分門〉、〈差等均配門〉、〈貴賤反率門〉、〈毬隻解隱門〉〈之分齊同門〉、〈物不知總門〉等 11 門 97 題。

卷之二計有〈盈不足術門〉、〈方程正負門〉、〈勾股互隱門〉、〈望海島術門〉、〈缶瓶堆垛門〉、〈倉囤積粟門〉等 6 門 126 題。

卷之三僅有〈開方各術門〉1 門 85 題。

卷之四包含〈問答〉、〈附啓蒙捷術〉（含「假令盈不足」及「開方釋所」）等二部份 28 題。

追錄中有〈堆積還源門〉11 題，另有「盈不足術」2 題、「方程正負」7 題。

從外觀來看《東算抄》，其對數學問題的「包裝」方式，極類似中國算書《算學啓蒙》，目錄內更直接列入〈附啓蒙捷術〉，由此可知《算學啓蒙》對於朝鮮算學的影響。

3.2 《東算抄》之凡例解析[2]

「凡例」主要是針對本書中常用的術語、概念、定義或方法所做的說明，先於書本的開頭列出，於之後解題時便可直接運用，不須再重複贅述，一來可使內容嚴謹，另外可方便查閱。與《幾何原本》將定義與公理先明白闡述的體例，有異曲同工之妙。

朝鮮算書中只有《東算抄》與《九一集》中有類似的用法，而中國算書《算法統宗》於卷一中有「用字凡例」，其中包含七十三項說明；另外清初數學家杜知耕的著作《數

[1] 參閱《東算抄》，收入金容雲編，《韓國科學技術史資料大系· 數學篇（8）》漢城：驪江出版社，1985。頁 79。

[2]參見《東算抄》，頁 79-80。

學鑰》（1681）中亦有「凡例」之體例。[3]而〈東算抄凡例〉較爲精簡，僅有「明釋圓法」、「開方求廉率作法本源圖」、「開方求廉率正負之圖」、「百子圖」等四項。其中的「百子圖」，依其內文所敘述，很明顯地以《算法統宗》爲腳本，再加以更定修改，可見該書之作者或編者極可能研讀過《算法統宗》。

〈東算抄凡例〉中，並無「基本名詞」或「基本算則」的納入。此特點有別於相關的中算書或東算書。例如：〈算學啓蒙總括〉和《算法統宗》的卷一和卷二，主要是對概念和基本算法進行闡述，《默思集算法》的第一門〈布算先習門〉也詳列了所需要的預備數學知識；《籌書管見》亦由基本算則與算法起始。筆者認爲可能是作者或編者認爲其爲「明顯易懂」，或應爲學算之人「必備」的基本知識，故不列入；再者，此書不定位於教科書或提供初學者研讀；另外，以《東算抄》與《九一集》高度的相似性，亦可能爲《九一集》的前身。上述問題筆者於第六章再予以詳述。

3.2.1 「明釋圓法」

自古以來數學家們投注了極大的努力，在求得圓周與直徑之比（圓周率 π ）的近似值上，而所得到圓周率的精確程度，亦足以衡量各民族在各階段的數學水平，《東算抄》所列的各圓周率皆承襲舊有的數值，雖無新意，不過從中可看出其依循之素材，乃自《算學啓蒙》與《算法統宗》中擷取，[4]再加入「周髀圓術」而得：

明釋圓法

古法　周三尺　徑一尺[5]

劉徽新術　周一百五十七　徑五十尺

沖之密率　周二十二尺　徑七尺

智術圓法　周一百尺　徑三十二尺

周髀圓術　周二十五　徑八尺

其中，「劉徽新術」一般簡稱「徽術」[6]，此應爲「古法」的相對稱呼；以 $\dfrac{22}{7}$ 爲「沖之密率」（或曰：密率）[7]，承襲了李淳風注《九章》以來的稱呼[8]；「智術圓法」首見於《算

[3]參閱吳文俊主編，《中國數學史大系》第七卷明末到清中期（北京：北京師範大學出版社，1999 年），頁 205-211。

[4] 參見郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，頁 1129；第二分冊，頁 1272。

[5] 古法一般指《周髀算經》中所採用的圓周率，《周髀算經》在計算夏至日道時採用的是“圓徑一而周三”，其指出“內一衡徑二十三萬八千里，周長七十一萬四千里”。參見郭書春、劉鈍點校，《算經十書》（台北：九章出版社，2001），頁 33、頁 43。

[6] “…於徽術，以五十乘周，一百五十七而一，即徑也。以一百五十七乘徑，五十而一，即周也。新術率徑猶當微少…”；“又術曰：徑自相乘，三之，四而一。…於徽新術，當徑自乘，又以一百五十七乘之，二百而一…”。參見郭書春、劉鈍點校，《算經十書》（台北：九章出版社，2001），頁 94。

[7] 唐長孫無忌《隋書》卷十六律曆卷十一：“…宋末南徐州從事史祖沖之更開密法，以圓徑…爲一丈，圓

法統宗》卷三，「周髀圓術」應爲作者之誤，古法與「周髀圓術」應同爲「**周三尺　徑一尺**」，至於$\frac{100}{32}$雖等同於$\frac{25}{8}$，但於王文素（1463－？）的《算學寶鑑》（1524）中稱：「**按璇璣，周二十五，徑八**」，並給出以此值計算互求的方法。除此之外，有「算聖」之稱的日本算學家關孝和（？－1708）於《算法括要》中將$\frac{25}{8}$稱爲「智術」，且給出推算方法[9]。然而雖給出數種圓周率的近似值，但書中所有相關題目卻只用「古法」、「徽率」、「密率」解題。可能是「古法」計算較簡便，而「徽率」、「密率」的較準確的緣故。

3.2.2 「開方求廉率作法本源圖」

解高次方程的問題或開方問題，在《東算抄》的 363 題中就有 201 個相關問題，佔百分之五十五，可見解高次方程的技巧在當時非常重要。《算法統宗》卷六中有「開方求廉率作法本源圖」，[10]《東算抄》中的的圖（圖 3－1）名稱相同，依《算法統宗》在韓國的流傳，及其後百子圖中所載「…**按統宗則**…」，[11]筆者認爲《東算抄》中的圖，可能參考過《算法統宗》，雖自五乘方延伸至九乘方，但本質上未有差異。兩者圖中的說明文字僅差異在《東算抄》中加入了「**此及橫看**」，筆者認爲此句話是將朱世傑的《四元玉鑑》（1303）古法七乘方圖的「**中藏皆廉，開則橫視**」納入，意指在說明開方時要用到相應橫行中的各項數據，圖中數字排成的三角形，每一橫行恰好是二項展開式中各項係數。

另外，圖左注文爲「**左衺乃積數，右衺乃隅算，中藏者皆廉，以廉乘商方，命實而除之**」，前兩句是指三角形最外邊的兩列數字，分別對應開方之積與隅算，第三句是說明中間的數字，分別對應開方過程中出現的各廉（各次項係數），最後兩句是指開方算法，開方時要用到相映橫行中的各數據，開方或解方程式時用所得的商去乘各次項係數，再從實中減去。[12]

周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽；　數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽；正數在盈　之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五；約率：圓徑七周二十二…指要精密，算氏之最者也，所著書，名爲綴術，學官莫能就其深奧，是故廢而不理。”引自華羅庚，《從祖沖之的圓周率談起》（北京：科學出版社，2002）。

8　“…臣淳風等按：依密率，以七乘周二十二而一，即徑；以二十二乘徑，七而一，即周。依術求之，即得。”　參見郭書春、劉鈍點校，《算經十書》（台北：九章出版社，2001），頁 94。後人自此常稱$\frac{22}{7}$爲密率，如朱世傑、顧應祥、程大位等亦是如此。

9　“周率三徑率一，爲初。以周率爲實，以徑率爲法，實如法而一，得數少於定周者，周率四徑率一，多於定周者，周率三徑率一，各累加之，其數列于後。”依此而得$\frac{3}{1},\frac{7}{2},\frac{10}{3},\frac{13}{4},\ldots,\frac{25}{8},\frac{29}{9},\ldots,\frac{157}{50},\frac{161}{51},\ldots,\frac{352}{112},\frac{355}{113}$參見平山　諦著，《關孝和》（東京：恆星社，1988）

10參見《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，頁 1309。

11參見《東算抄》，頁 82。

12劉鈍，《大哉言數》（瀋陽：遼寧教育出版社，1997），頁 201。

例如：解 $x^3 = 5832$

由實爲四位數字可知根爲二位數字設 $x = a + b$（a 的位值是 b 的十倍）

則有 $(a+b)^3 = 5832$ 依「開方求廉率作法本源圖」的第四橫列（1，3，3，1）

則可得展開式： $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 5832$

估第一位商，由 $10^3 < 5832 < 20^3$ ，a=10

則　$300b + 30b^2 + b^3 = 5832 - 1000 = 4832$

估第二位商，b=8， $4832 - \left(300 \times 8 + 30 \times 8 + 8^3\right) = 0$

故求得 $x = 18$

若一般化可寫成若 $x^n = A$,—ß$x = a + b$（其中 a 位值是 b 的 10 倍），則

$$x^n = (a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

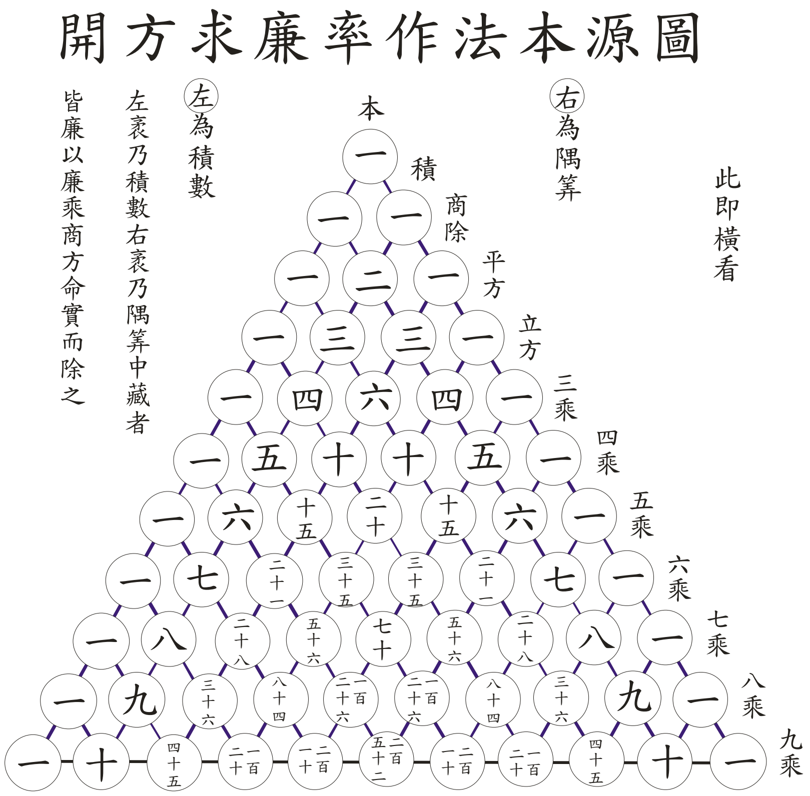
$$= a^n + b\left(C_1^n a^{n-1} + C_2^n a^{n-2} b^1 + \ldots + C_{n-1}^n a b^{n-2} + C_n^n b^{n-1}\right) = A \qquad \ldots\text{（∗）}$$

ŒÌ$b = \left(A - a^n\right) \div \left(C_1^n a^{n-1} + C_2^n a^{n-2} b^1 + \ldots + C_{n-1}^n a b^{n-2} + C_n^n b^{n-1}\right)$

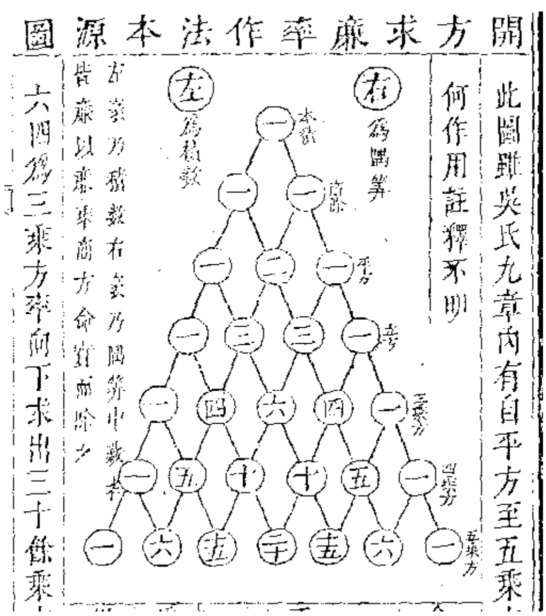
$(x+a)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^{n-i} a^i$ 的各項係數， $C_0^n, C_1^n, C_2^n, \ldots, C_{n-1}^n, C_n^n$ 。恰符合開方法作本源圖中的每一橫列。[13]

三次以上的開方問題無法藉著幾何直觀的模型來解釋，必須藉助二項式展開的係數表，而東算抄中亦有四次、五次方程，故需要藉助「開方求廉率作法本源圖」來求得數值解。

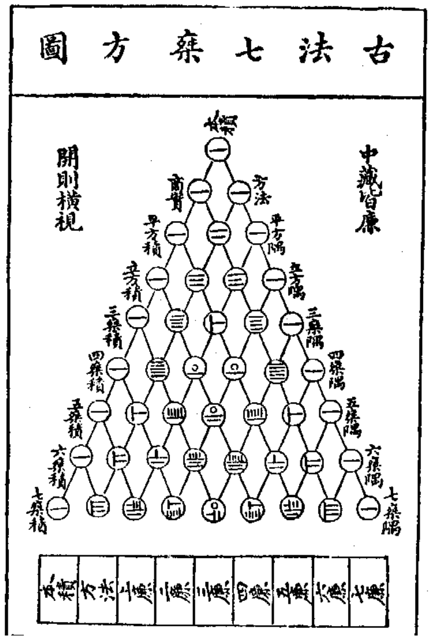
[13] 同上，頁 200。



【圖 3-1 倣《東算抄》之開方求廉率作法本源圖】[14]



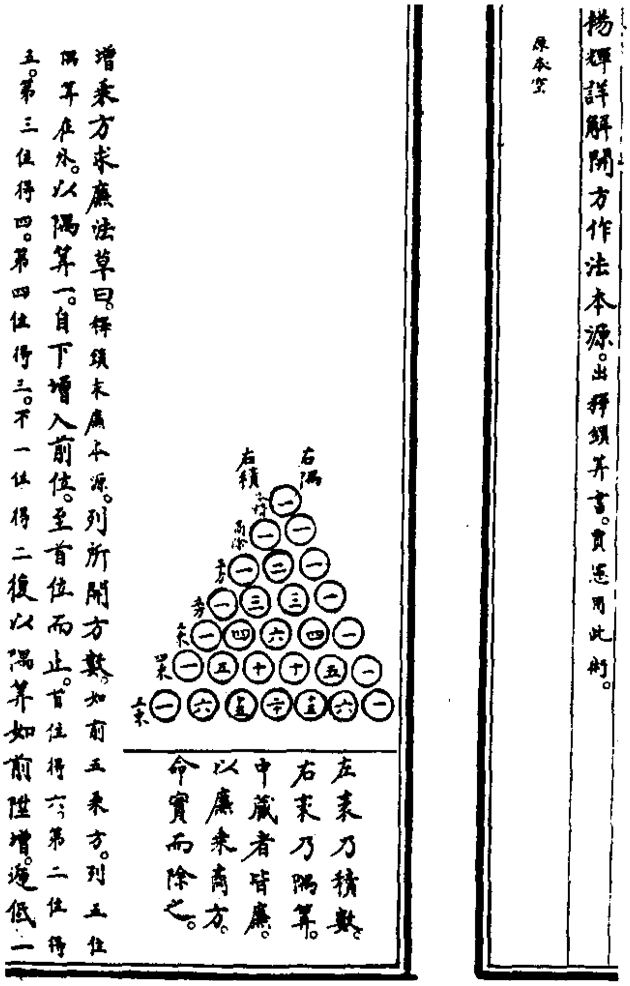
【圖 3-2《算法統宗》開方求廉率作法本源圖】



【圖 3-3《四元玉鑑》之古法七乘方圖】

14 參見《東算抄》，頁 82。（此圖由筆者依原圖繪製）

其實不論是「古法七乘方圖」或「開方求廉率作法本源圖」，應源自「楊輝三角」，《宋史・藝文志》錄有賈憲《黃帝九章算法細草》9 卷（約 1050 年前後），書已無存，但於楊輝之《詳解九章算法》（1261）中載有如下之「開方法作本源圖」，並指明其「出釋鎖算書，賈憲用此術。」，「釋鎖」是宋代數學家開方或解數字方程的代名詞，楊輝在卷末之纂類中引用了「賈憲立成釋鎖平方法」和「賈憲立成釋鎖立方法」，後來劉汝諧撰書名《如積釋鎖》，朱世傑《算學啓蒙》中亦有開方釋鎖門。[15]中國數學家吳敬、周述學、程大位、梅文鼎等人之著作中皆有此種乘方圖。差別大多止於所構造的階層不同罷了。



【圖 3-4《永樂大典》中開方法作本源圖】

3.2.3「開方求廉率正負之圖」

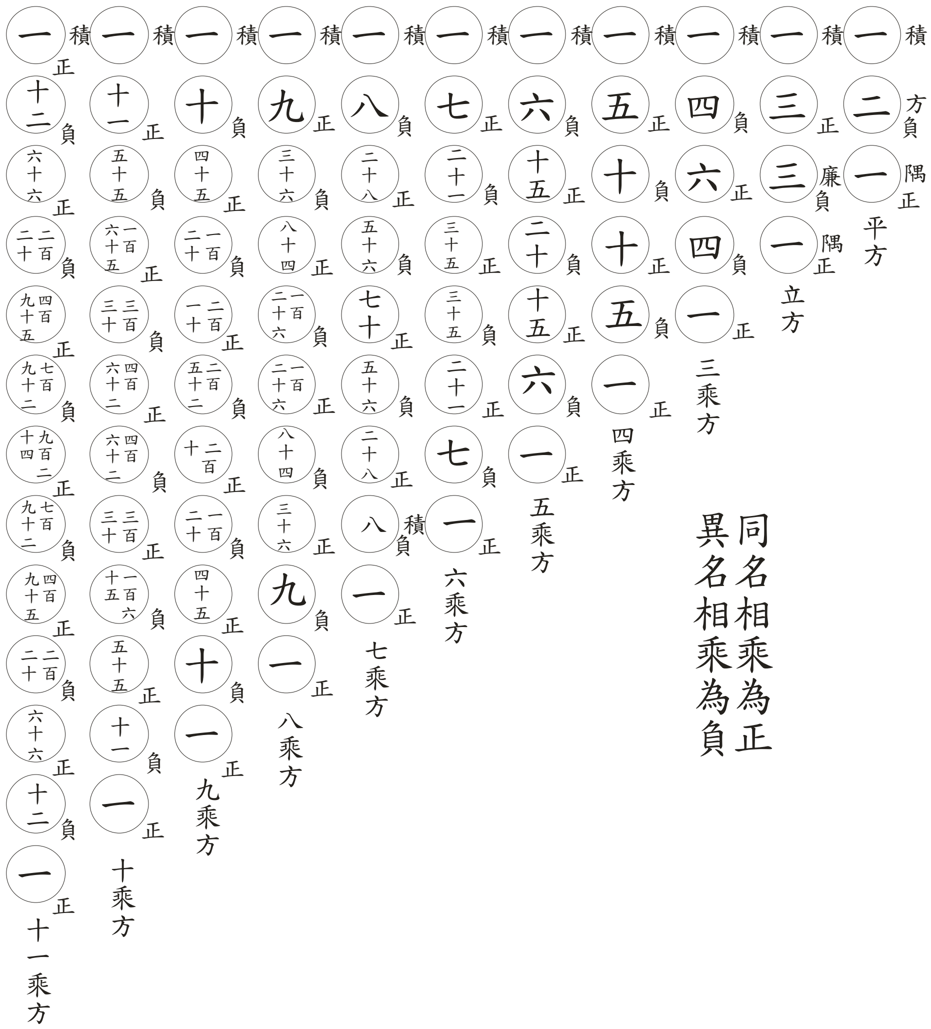
在「開方求廉率作法本源圖」之後又繪製了「開方求廉率正負之圖」，兩個圖之間的差別在於方向不同，且後者在數字旁標有「正負」。「開方求廉率正負之圖」的基本架構是將「開方求廉率作法本源圖」順時針旋轉九十度，並去掉三角形的頂點，即本積部分，筆者認爲以此方式排列是爲了配合籌算式直式的寫法，積與實對應，故置於最上方，

---

[15]劉鈍，《大哉言數》（瀋陽：遼寧教育出版社，1997），頁 198。

置於數字旁的正負，筆者認爲東算家已構造出$(a-b)^n$的公式。

開方求廉率正負圖



【圖 3-5《東算抄》之開方求廉率正負之圖[16]】

3.2.4「百子圖」

凡是縱、橫、斜角數字相加的和都相等的方陣，稱之爲魔方或幻方（magic square），換言之，即將 1，2，3…，n^2個連續正整數，排入n行n列之方陣上，使其每行每列與兩對角線上之n個數字和均相等，縱橫斜角每n個數字和應爲$\frac{n(1+n^2)}{2}$。中國古代將符合此性質的方陣稱之爲縱橫圖，在中國最早對縱橫圖做有系統的數學探究的是楊輝（1220~1280 年），他在《續古摘其算法》卷上錄有縱橫圖二十幅，[17]其中他將十階縱橫

---

[16]參見《東算抄》，頁 83。（此圖由筆者依原圖繪製）

[17] 參閱南宋・楊輝，《楊輝算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第一分冊（鄭州：

圖稱爲百子圖，楊輝的縱橫圖研究對後世深有影響，明代王文素、程大位、清代方中通、張潮、保期壽都曾進一步研究縱橫圖並做改進，[18]此外在日本 17、18 世紀間的和算家，在楊輝、程大位著作的影響下研究幻方亦得到許多新的結果，東算方面於崔錫鼎的《九數略》、裴相說的《書記鎖錄》中也有相關研究。

【圖 3-6 元代阿拉伯數字幻方鐵板[19]】

《東算抄》中收錄百子圖一幅，[20]未言明構造方法，但筆者認爲從兩方面來判斷應是源自《算法統宗》，[21]從外觀來看整幅百子圖的構造與《算法統宗》的不同，僅是在某兩列的上下順序的差異，另一個線索是自百子圖下的敘述：「**按統宗，則縱橫皆五百零五數，其斜角則不合五百零五數，而有盈縮故今考正。**」，由此得知，改正此圖的東算家是以《算法統宗》爲藍本。

縱橫圖的收錄，除了表示更正中算書中的錯誤外，是智力上的挑戰抑或有其他考量？宋代理學家將縱橫圖與《周易》中的「**河出圖，洛出書，聖人則之**」聯繫起來，認爲這些有規律的數字帶有神秘的色彩，[22]朝鮮算學家中不乏實學者（shirhak），或其交遊對象亦有對易理八卦有興趣之學者，而相互討論相關問題，筆者認爲可以再深入研究。

河南教育出版社，1993），頁 1097-1099。

[18]參閱吳文俊主編《中國數學史大系》第七卷明末到清中期，頁 195-204。

[19] 引自華羅庚、蘇步青主編，《中國大百科全書（數學）》，北京：中國大百科全書出版社，1988。

[20] 參閱《東算抄》，頁 84。

[21]參閱《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，頁 1413。

[22]參閱曲安京主編，《中國古代科學技術史綱．數學卷》（瀋陽：遼寧教育出版社，2000），頁 379。

百子圖

九九	八二	七九	六二	五九	四二	三九	二二	十九	二
一	二十	二一	四十	四一	六十	六一	八十	八一	一百
三	十八	二三	三八	四三	五八	六三	七八	八三	九八
九七	八四	七七	六四	五七	四四	三七	二四	十七	四
五	十六	二五	三六	四五	五六	六五	七六	八五	九六
九五	八六	七五	六六	五四	四七	三五	二六	十五	六
十四	七	三四	二七	五五	四六	七四	六七	九四	八七
八八	九三	六八	七三	四八	五三	二八	三三	八	十三
九一	九十	七一	七十	五一	五十	三一	三十	十一	十
十二	九	三二	二九	五二	四九	七二	六九	九二	八九

【圖 3-6《東算抄》之百子圖[23]】

今筆者收錄相關算學家對百子圖進行的改進，以利與《東算抄》中百子圖相互對照：

（一）楊輝、《算法統宗》百子圖：

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

（二）張潮之更定百子圖[24]

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	75	100	74	63	14	53	27	77	17
22	61	38	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

23 參見《東算抄》，頁 84。（此圖由筆者依原圖繪製）
24 參閱吳文俊主編《中國數學史大系》第七卷明末到清中期，頁 200。

（三）關孝和之百子圖[25]

8	**7**	**95**	**96**	**4**	**3**	**99**	**100**	**84**	**9**
10	**77**	**23**	**22**	**80**	**81**	**19**	**26**	**76**	**91**
90	**27**	**36**	**35**	**67**	**68**	**60**	**37**	**74**	**11**
89	**73**	**38**	**46**	**51**	**47**	**58**	**63**	**28**	**12**
13	**72**	**62**	**56**	**49**	**53**	**44**	**39**	**29**	**88**
14	**30**	**61**	**57**	**48**	**52**	**45**	**40**	**71**	**87**
86	**31**	**42**	**43**	**54**	**50**	**55**	**59**	**70**	**15**
85	**69**	**64**	**66**	**34**	**33**	**41**	**65**	**32**	**16**
18	**25**	**78**	**79**	**21**	**20**	**82**	**75**	**24**	**83**
92	**94**	**6**	**5**	**97**	**98**	**2**	**1**	**17**	**93**

3.3 卷之一的內容分析

《東算抄》的第一卷，包括 11 門 97 題：〈縱橫乘除門〉，包含等差級數、等比級數、比例分配、納稅、最小公倍數、均輸（平均擔負繇役）等內容，共十二題。〈異乘同除門〉主要內容爲比例分配問題，共五題。〈田畝形段門〉是求各種形狀的田畝面積，共十六題。〈折變互差門〉是求比較複雜的比例問題，共六題。〈商功修築門〉是處理修築工程中的體積計算問題，共六題。〈貴賤差分門〉內有匿價差分、行程問題、最大公因數、最小公倍數問題、三色差分（三率分身）、帶分母子差分、等差數列問題，主要皆與「率」有關的變化題，牽涉到的變數較多，共十三題。〈差等均配門〉收錄四六差分、三七差分、二八差分、折半差分、挨次差分等五類比例分配問題，共七題。〈貴賤反率門〉是與率有關的實務問題，僅二題。〈毬隻解隱門〉是關於球體體積、中空球體厚度的計算，共五題。〈之分齊同門〉有帶分數減法、天文曆法問題、並附春分、夏至、秋分、冬至中星圖四幅，共十四題。〈物不知總門〉內爲一次同餘問題、「河上蕩杯」、「合利」等，共十一題。

3.3.1 縱橫乘除門

〈縱橫乘除門〉的十二題中，題型多樣化，與《算學啓蒙》之〈縱橫因法門〉內容有極大的差異，[26]可謂「包裝」相同而內容有異。其中第一、二題包含等差級數、等比級數各一題；第三、四題抄錄《算法統宗》卷四第四十八、四十九題，是斤秤衡法問題；第五至第八題爲《算學啓蒙》之〈庫務解稅門〉類似題；[27]第九、十題與最小公倍數有

---

[25]參閱平山　諦著，《關孝和》，頁 107。
[26]參見《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第一分冊，（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 1142。
[27] 同上，頁 1130。

關；第十一、十二題分別與《算法統宗》卷八商功章第二十八、二十九題類似。[28]總體而言，除了第一、二題較爲特別外，其餘可歸類爲「率」的相關問題。

3.3.1.1 等差級數問題

〈縱橫乘除門〉的第一題屬於等差級數問題，但若依題意列式計算有所不合，筆者依原解法列式，則發現原題意敘述應做修正，今將原題列於左方，題目之翻譯及解法列於右方，以利相互對照。

〔1〕今有人服藥，初一日服一丸，日增一丸，至十五日，而後日減一丸，至三十日，問共若干？ 答曰：二百四十九。 法曰：置十五丸加一，又以十五丸乘之，合問。	今譯：有人服藥，第一天服用一顆，每天增加一顆，到第十五天後，每天減一顆，直到第三十天，請問共服用多少顆？ 答：240 顆。 解法：（15＋1）×15=240

就此題而言，若依題意應爲求數列 1、2、3、….、14、15、14、13、….、3、2、1、0 之和即 $S=\frac{(15+1)\times 15}{2}+\frac{15\times 14}{2}=225$ 。

但依原題的解法而言，卻爲計算數列 1、2、3、….、14、15、15、14、13、….、3、2、1 之和即 $S=\frac{(15+1)\times 15}{2}\times 2=240$ 。

故筆者認爲此題解法有誤。

3.3.1.2 等比數列問題

〔2〕今有米一升，自初一日增一倍，至三十日，問共得若干？ 答曰：一千七十三萬七千四百一十八石二斗四升 法曰：置一升遞倍至五日乃得三十二升，自乘得一千二十四升乃一十日所得，回至此數自乘，得一百四萬八千五百七十六升乃二十日所得，回至此數以一千二十四升乘之合問。	今譯解法如下： （一）置一升遞倍至五日乃得三十二升： $2^5=32$ （二）自乘得一千二十四升（乃一十日所得）：$2^5\times 2^5=32^2=2^{10}=1024$ （三）回至此數自乘，得一百四萬八千五百七十六升（乃二十日所得）： $2^{10}\times 2^{10}=2^{20}=1048576$ （四）回至此數以一千二十四升乘之： $1048576\times 1024=2^{20}\times 2^{10}=2^{30}=1073741824$

[28]參見《算法統宗》，頁 1343。

於朝鮮算書《默思集算法》上卷之〈差等均配門〉第十七題亦有一類似題，[29]其解法相同：

今有人持錢一文，自初日日增一倍，倍至三十日，問計錢幾何？

答曰：一百七萬三千七百四十一貫八百二十四文。

法曰：初日為兩文，二日為四文，三日為八文，四日為一十六文，五日為三十二文，置次三十二文自乘得一千二十四文，乃十日所得，又置此數自乘得一百四萬八千五百七十六文，是乃二十日所得也，又此數以十日所得一千二十四文乘之，得一十億七千三百七十四萬一千八百二十四文，是即三十日所得也合問。按此二十日所得若自乘則為四十日所得故蓋十日二十日所得相乘是也。

由此可見，東算家解此類問題時的思維邏輯，已有現今指數律$a^m \times a^n = a^{m+n}$的雛形。

3.3.1.3 稅收問題

第五至第八題爲稅收問題，其稅率與《算學啓蒙》之〈庫務解稅門〉相同，充分利用「率」的概念解題：

〔6〕今有客持銀，先稅三十分取一，次稅五十分取三，今共稅了四百五十六兩三十分兩之二十，問元持銀若干？

答曰：五千兩。

法曰：置共稅銀通分內子，得一萬三千七百為實，以二兩七錢四分為法，除之為法數以三十兩為率先後合稅為二兩七錢四分為法合問。

解曰：為法之數，假令三十兩先稅三十分之一，稅則一兩也，其三十兩內減先稅一兩，則餘二十九兩，次稅五十分取三，則一兩七錢四分也，先後合稅，則共二兩七錢四分，此三十兩之稅也。

今譯解法：

解法：

通分內子 $456\frac{20}{30} = \frac{13700}{30}$

13700÷2.74=5000

（2.74 做爲除數，是假設持銀三十兩，兩次所抽的稅共二兩七錢四分）

說明：先假設原持銀三十兩

第一次稅金：$30 \times \frac{1}{30} = 1$

第二次稅金：$29 \times \frac{3}{50} = 1.74$

總稅金：1＋1.74=2.74

[29]參閱朝鮮·慶善徵,《默思集算法》,收入金容雲編,《韓國科學技術史資料大系· 數學篇（1）》,（漢城：驪江出版社，1985），頁 17。

故其完整解法爲原持銀＝$\frac{13700}{30}\div 2.74\times 30=13700\div 2.74=5000$，此乃以比例式「原持銀：原稅金＝持銀三十兩：三十兩所抽之稅金」所求得。

第七題、第八題亦依此法則分別求稅銀與餘銀、原銀。這樣的比例算法在《九章算術》中稱爲「今有術」，並給出一般法則：「以所有數乘所求率為實，以所有率為法，實如法而一」，[30]即以比例式「所求數：所有數＝所求率：所有率」來解題。因「共稅了四百五十六兩三十分兩之二十」，所以本題先假設原持銀只有三十兩，以此先解題求出稅銀，等於先給予「齊同」。[31]

若對「率」的概念能清楚掌握的話，往往能禦繁就簡，尤其在處理數據較大的問題，更能顯現其功效，第八題又是一個佳例：

〔8〕今有客持銀先稅三十分取一，次稅五十分取三，餘銀四千五百四十三兩三十分兩之一十，問元持銀若干？ 荅曰：五千兩。 法曰：置餘銀通分內子，又以五十乘之為實，以不稅者（二十九　四十七）相乘，得一千三百六十三為法而一，合問。 又曰：置三十兩減一，餘二十九兩，內減五十分取三，剩二十七兩二錢六分為法，另置餘銀通分內子，以三十乘之為實，以法除之，又以分母除之，合問。	以現代運算符號表示解法： （一）未抽稅所佔之比例爲 $\frac{29}{30}\times\frac{27}{50}=\frac{1363}{1500}$，故原銀爲 $4543\frac{11}{30}\div\frac{1363}{1500}=5000$。 （二）以三十兩爲準則餘銀 27.6 兩， 今餘 $4543\frac{11}{30}$ 兩，則原銀爲 $4543\frac{11}{30}\div 27.6\times 30=5000$ 即利用比例式：30：27.6 ＝ x：$4543\frac{11}{30}$

第一個解法與《算學啓蒙》相同，第二個解法將數字簡化，以稅率三十分之一爲原則，先取三十兩計算，再依比例關係求解。解題的方式不從「正面攻擊」，而是「迂迴前進」，當然先決條件要對「率」有深刻的認知。

[30]參見郭書春，《中國古代數學泰斗－劉徽》（台北：明文出版社，1995），頁 141。
[31] 同上，頁 144。

「率」在中算中扮演著極重要的角色，李淳風於《隋書·律曆志》“備數篇”就提及：

事物糅見，御之以率，則不乖其本。故隱憂之情，精微之變，可得綜也。夫所謂率者，有九流焉：一曰方田，以御田疇界域；二曰粟米，以御交質變易；三曰衰分，以御貴賤稟稅；四曰少廣，以御積冪方圓，五曰商功，以御功程積實；六曰均輸，以御遠近勞費；七曰盈朒 ，以御引雜互見；八曰方程，以御錯糅正負；九曰勾股，以御高深廣遠。皆乘以散之，除以聚之，齊同以通之，今有以貫之，則數之方，盡于斯矣。

以《九章算術》爲核心的中國古代數學，對朝鮮半島的數學教育和數學研究產生了深遠的影響，直至十九世紀初仍有東算家持續研究及肯定。[32]誠然在教材與考試科目上時有變化，如世宗時期以《楊輝算法》、《算學啓蒙》、《詳明算法》爲算學取才之科目內容，而以「率」爲綱紀的《九章算術》仍爲東算家在學習或研究數學時所重視的，茲以朝鮮『儒家明算者』趙泰耉 (1660-1723)所著《籌書管見》（1718）之〈九章問答〉第五十七條爲例證：

或曰：數之為術，九章盡之矣！是外固無餘法乎？曰：凡籌書所有小數襍法之贅，賸而不切者，愚悉掃去而不論矣！獨朱氏有立天元之法，西人有平三角、弧三角之法，皆創智而得其巧者也。然天元者，小廣之演也；三角者，勾股之奧也，亦豈能舍九章而為法哉？曰：然則子何不於小廣句股并論其法也。曰：言其法之所從來，則固由於小廣若句股，然各有成書，自作一家，則其體例自別矣！且其法理深奧，為衍多方，有未易驟語而領悟者，必須九章貫通無疑，然後可進於此矣！[33]

在往後各章節的探討中，仍能常見其影響，可以如此譬喻：當我們吃了炸雞、漢堡、可樂、薯條，最後再加一片披薩，飽足之際，可不能只肯定披薩的效用。

3.3.1.4 三女歸盟問題

第九題題源可上溯至《孫子算經》卷下第 35 題。與《楊輝算法》中〈續古摘奇算法〉卷下「三女歸盟」問題相同；《算法統宗》卷十五亦有類似題：

[32]參閱吳文俊主編，《中國數學史大系》第二卷（北京：北京師范大學出版社，1998），頁 267。
[33]參閱朝鮮·慶善徵，《默思集算法》，收入金容雲編，《韓國科學技術史資料大系· 數學篇（2）》，（漢城：驪江出版社，1985），頁 193。

〔9〕今有三女歸寧，長女三日一歸，次女四日一歸，少女五日一歸，問幾日相會？

答曰：六十日。

法曰：置三、四、五日相乘合問。

算法皆相同，但只適用於三數兩兩互質的情形。

第十題亦爲求最小公倍數問題，與《算法統宗》卷九均輸章第十九題相同（第四題類似），[34]但算法承襲《算法統宗》之誤：將$[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$以$[a,b]=\dfrac{ab}{a-b}$求之

〔10〕今有天干十位，地支十二位，問干支幾日相配？

答曰：六十甲子。

法曰：干支相乘為實，干支相減餘二為法，除之合問。

此算法只是特例，讀者可自行嘗試，如求（18，30）就不適用。

3.3.1.5 合作分工問題

第十一、十二題分別與《算法統宗》卷八商功章第二十八、二十九題雷同，[35]唯數字與情境略有變化，解法皆相同；《九章算術》將此類問題置於〈均輸章〉之中：

〔11〕今有一夫日耘田三畝，一夫日耕四畝，一夫日種五畝，欲令一夫自耕、自種、自耘，問治田若干？

答曰：一畝四十七分之一十三畝。

法曰：置三畝、四畝、五畝相乘，得六十畝為實，又維乘三畝乘四畝，四畝乘五畝，五畝乘三畝，三位併之得四十七畝為法，除之，合問。

〔12〕今有甲、乙、丙三人各治田一頃，只云甲五日完，乙七日完，丙九日完，欲令三人共治一頃，問何日可畢？

答曰：二日一百四十三分日之二十九。

法曰：置五日、七日、九日相乘，得三百一十五日為實，又維乘五日乘七日，七日乘九日，九日乘五日，三位併得一百四十三為法，除之合問。

---

[34] 參閱《算法統宗》，頁 1347，1350。

[35] 同上，頁 1343。

這類問題的解法可稱爲歸一算法，合作問題的基本模式爲：「甲、乙、丙…等人單獨完成一件事，各需$t_{1,}t_2,t_3..,t_n.$，問若他們合作完成這件事需要多少時間？」解法爲需先算出每人每天完成全部的：$\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_2},\frac{1}{t_3}...,\frac{1}{t_n}.$，則一天內合作完成全部的：$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+..+\frac{1}{t_n}.$，故需要 1÷（$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+..+\frac{1}{t_n}.$）天才能完成工作。

3.3.2 異乘同除門

「異乘同除」爲中算家對比例算法的稱呼，在《九章算術》粟米章中稱爲「今有術」，劉徽稱之爲「都術」，表示具有普遍適用性的法則，宋楊輝將之名爲「互換」，[36]一般的正比例算法，屬於此類。本門共有五題，第一、二題爲比例分配問題；第三至五題爲均輸問題。

3.3.2.1 比例分配問題（合率差分）

分配問題牽涉到衰分，程大位稱：「衰者，等也。物之混者，求其等而分之。」，[37]所謂「求其等而分之」就是按比例分配的意思。《九章算術》衰分術曰：「各置列衰，副并為法，以所分乘未并者，各自為實，實如法而一。」，[38]轉譯爲問題情境即爲：已知有物 A，欲依比例$m_1,m_2,...,m_n$分配，求各數$A_i(i=1,2,...,n)$，其中$m_1,m_2,...,m_n$稱爲列衰，各m_i稱爲未并者，A 爲所分，故

$$A_i=\frac{m_iA}{\sum m_i}(i=1,2,...,n)$$

此乃《算法統宗》之衰分公式，而另一求法爲「差分之法並來分，需要分數一分乘，將此一分為之實，以乘各數自均分。」，[39]即先求一衰之數$\frac{A}{\sum m_i}$，再乘各m_i，便得各$A_i(i=1,2,...,n)$，本門所用的方法爲第一法直接套用公式：

〔1〕今有甲出銀九十六兩，乙出銀八十四兩，營運折了三十兩，問各折若干？
答曰：甲一十六兩，乙一十四兩。
法曰：置甲銀以三十兩乘之，得二千八百八十兩，却以甲乙元出銀一百八十兩，除之，得甲。折銀以減於三十兩得乙折銀，合問。

---

[36]參閱劉鈍《大哉言數》，頁 158。
[37] 參閱郭世榮《算法統宗導讀》（湖北：湖北教育出版社，2000），頁 231。
[38]參閱郭書春、劉鈍點校，《算經十書》（台北：九章出版社，2001），頁 109。
[39] 引自《算法統宗》，頁 1292。

解法爲：甲銀＝$\dfrac{30\times 96}{96+84}=16$ ，乙銀＝30－16＝14

第二題的佈題有所變化，把已知換成兩人的合資，及兩人分別的獲利，反過來求原來每人的資金。東算家對佈題時常會給予變化，這是把握出問題本質的特徵。

3.3.2.2 均輸問題

第三至第五題內容主要是路程遠近及佣價多寡等問題，所牽涉到的內容主要是衰分、反衰分、今有、齊同（重今有術）等術的綜合應用，其重點在「均」，強調公平合理，如佣價或運費，就與路途遠近及其所負重成正比；運送的次數和腳程又與負重成反比。

「率」在此又要上場了，所謂率者，劉徽拓展了其意義，並提出：「凡數相與之者謂之率」，「相與」乃相關之意。[40]在比和比例分配都要用到率。成率關係的數量同時擴大或縮小同樣的倍數，其率關係不變。比如甲、乙、丙三物成比例關係，甲：乙＝m：n；乙：丙＝h：k，已知甲爲 S，則丙爲多少？《九章算術》用兩次今有術，先將乙化爲 $\dfrac{Sn}{m}$ ，再化成丙爲 $\dfrac{Snk}{mh}$ ，稱爲「重今有術」。[41]劉徽認爲可以先把兩個率關係中乙的率變成相同的值 nh ，爲了保持比例不變，則甲的率須變成 mh ，丙的率須變成 nk ，稱爲與乙相齊，即甲：乙：丙＝ mh ： nh ： nk ，如此對甲、丙直接應用今有術，就可求得丙 $\dfrac{Snk}{mh}$ ，這種變換劉徽稱之爲「齊同原理」，[42]今以第三題爲例：

〔3〕今有雇車一輛載重六百斤，行道五百里，與銀三兩七錢半，欲添載一百八十斤，行六百五十里，問與銀若干？

答曰：六兩三錢三分七里五毫。

法曰：置元重加添重共七百八十斤，以元價乘之，再以六百五十里乘之，得一百九十萬一千兩百五十為實。另置元重六百斤，以元道五百里乘之，得三十萬為法，除之合問。

今譯解法：

需付錢＝$\dfrac{780\times 3.75\times 650}{600\times 500}=6.3375(\text{™\_})$

[40]參見郭書春，《中國古代數學》（台北：臺灣商務印館，1995），頁 48。

[41]參見郭書春，《中國古代數學泰斗－劉徽》，頁 152。

[42] 同上，頁 144-147。

再以重今有術另解：

先與重量運算　$A：3.75＝780：600\ \therefore\ A＝\dfrac{780\times 3.75}{600}$

再與里程運算　$B：\dfrac{780\times 3.75}{600}＝650：500\ \therefore B＝\dfrac{780\times 3.75\times 650}{600\times 500}=6.3375$(™_)

在第四題運算上仍是採用齊同原理（重今有術），但在佈題上，筆者認爲有所疏漏，茲以《算法統宗》卷九均輸第六章第十五題加以比較：

《東算抄》	《算法統宗》
今有人負米一石，行二十步，日六十返；今負米一石二斗，行二十五步，問日幾返？	原有人負米一石一斗二升，行三十步，日五十返，今負米一石二斗，行四十步，問幾日返？
荅曰：四十返。	荅曰：三十五返。
法曰：置負米一石，以行二十步乘之，又以六十返乘之，得一千兩百為實，另置今負米一石二斗，以行二十五步乘之，得三十為法，除之合問。	法曰：置負米一石一斗二升，以行三十步乘之，得一千六百八十步為實，另以今負米一石二斗，以行四十步乘得四百八十為法，除之合問。
算式：$\dfrac{1\times 20\times 60}{1.2\times 25}=40$	算式：$\dfrac{1.12\times 30\times 50}{1.2\times 40}=35$

在佈題邏輯上，《算法統宗》較符合“均”之義，應負擔愈重，腳程愈慢才是。而本題中「…負米一石，行二十步…，今負米一石二斗，行二十五步」與實際情境不合。

3.3.3 田畝形段門

〈田畝形段門〉的內容爲各種形狀的田畝面積之計算，共有十六題，包括四不等田、圓田、弧矢田、眉田、牛角田、欖形田、三廣田、箭翎田、句股弧矢合併田、六角田、環田等。在取材上大部分皆不超出《楊輝算法》、《算學啓蒙》、《詳明算法》、《算法統宗》中相關題材之範圍，[43]但皆無圖示表示。

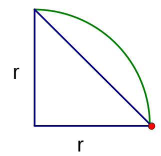
令人好奇的是，在第一題求四不等田問題時居然承襲了《五曹算經》和《算法全能集》的錯誤，以「併東西長折半，…；併南北長折半，….，相乘合問」之公式求積，這類問題已於《楊輝算法》、《算法統宗》中有詳加探討與更正了，[44]就連洪正夏的《九一集》也犯此錯誤，值得再探討。

[43] 參見參見《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第一、二分冊，頁 1-1079~1085，頁 1-1147~1150，頁 1-1391~1394，頁 2-1265~1271。

[44] 同上，頁 1-1084，2-1269。

於第五題中眉田的面積計算，答案正確，但解法卻誤寫爲「併二周折半相乘合問」，應爲「置上下周折半，又徑折半，相乘合問」。此處於《九一集》已有更正。其餘大部分題目所用之公式，皆不逸於《楊輝算法》、《詳明算法》、《算學啓蒙》、《算法統宗》之範疇，在求圓面積方面僅第三題用到密率，第二、十四題用徽率其餘皆用 3。關於第十題曲尺田面積計算，題目爲：「今有曲尺田，內曲二十六步，外曲三十八步，兩頭各廣一十二步，問積若干？」，以如下兩法求之：「置內曲加外曲共六十四步，以半廣六步乘之。」，「置內曲折半，以廣一十二步乘之，得一百五十六步，另置外曲折半，又以廣一十二步乘之，得兩百二十八步，二位併之。」，[45]筆者認爲雖有兩法，其實是用分配律而得的兩個等價之公式，雖保守但儘量避免過度理性重建。

再者，有兩個較特殊之圖形，一爲第十二題的「句股弧矢合併田」（圖 3-7），[46]此類形狀在《算法統宗》中稱爲「圭併弧矢田」，其實就是圓田的$\frac{1}{4}$，亦有兩法：「置句倍之，自乘，又三因四歸，又四而一，合問。」、「置句折半，得十步，三因得三十步，以半句十步乘之。」，將其一般化可得$\frac{(2r)^2\times 3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{r}{2}\times 3\times\frac{r}{2}$，兩者等價，前法由基本定義出發，後法爲化簡之公式。

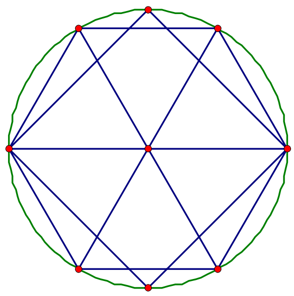


【圖 3-7 圭併弧矢田】

再者，第十三題是六角田（圖 3-8），「今有六角田，每面闊各一十五步，問積若干？」即求正六邊形面積，所給出的公式是錯誤的：「置一面倍之，得三十步為中徑，以一面乘之」、「置一面倍之，自乘，折半」，將其視爲菱形來計算，筆者認爲此算法與《詳明算法》中的公式「併四角半之為從，併上下半之為廣，相乘得積」是相同的。[47]

---

45 《東算抄》卷之一，頁 98。
46 同上，頁 99。
47引自元・安止齋、何平子，《詳明算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍彙編》數學卷第一分冊，（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 1394。



【圖 3-8 六角田】

最爲值得注意的是，在《東算抄》中，首次出現利用天元術解題，便是〈田畝形段門〉中的第十四題及第十六題，兩題皆爲環田的相關問題，其中第十四題只有「**此法宜用立天元術，而不如此捷徑**」的寫法，而未列出實際方法，[48]雖如此不過此題已能利用平方差公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$來解題：

原文

〔14〕今有環田積二百八十五步，只云內外二周相併得一百一十四步，問內外周各若干？

答曰：外周七十二步，內周四十二步。

法曰：列積十二之，三千四百二十為實，以二周相併數一百一十四步為法，除之，得周較三十步，加入於相併數，共得一百四十四步，半之，得外周，減較即內周，合問。此法宜用立天元術，而不如此捷徑

一法：列積為實，以二周相併，折半，得五十七步為法，除之得田徑五步，倍之倍者兩闊步也，三因，得二周差三十步，乃加相併數折半，得外周，減差即內周，合問。

以現代符號表示解法

（一）令外周爲C_1，內周爲C_2

已知$C_1+C_2=114\cdots$（1）

$$\frac{C_1{}^2-C_2{}^2}{12}=285$$

$$C_1{}^2-C_2{}^2=3420$$

$$C_1-C_2=\frac{3420}{114}=30\ldots(2)$$

$$C_1=\frac{(1)+(2)}{2}=72$$

$$C_2=\frac{(1)-(2)}{2}=42$$

（二）利用環田積公式：

R：外圓半徑

r：內圓半徑

$$\frac{114}{2}\times(R-r)=285$$

求得$R-r=5$，以 3 爲圓周率，

$2\times3\times(R-r)=30$爲兩周差

外周＝（114+30）÷2＝72

內周＝72-30＝42

[48]參閱《東算抄》卷之一，頁 100-103。

以上之兩法皆先求出兩周之差，但求內周之方法有別，可見其對運算方式之熟悉，尤其法二以「外周，減差即內周」，以現在之觀點，已經知道 $C_1-(C_1-C_2)=C_1-C_1+C_2=C_2$ 的運算法則了。

第十六題才給出完整的天元術解題模式：

原文

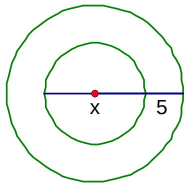
※ 今有環田積二百八十五步，只云田徑五步，問二周若干？

答曰：外周七十二步，內周四十二步。

法曰：立天元一為池徑，加入倍之云數為全徑，自之就分，三之為四段圓積，寄左，又列池徑自之，三因亦為四段池積，以減寄左得，再寄列積四之得一千一百四十步，與再寄相消得開方式蓋偶法空則不能用開方之術也，乃用商除法宜當，乃用商除法得池徑一十四步，三之為內周於池徑加倍之云數三之即外周，合問

又曰：列積四因得一千一百四十步，又列田徑倍之（倍之者即兩邊故也），自乘，三因得三百步，以少減多餘八百四十為實，另列兩邊徑十步，倍之，三因得六十為法，除之，得池徑。三之為內周，又五步倍之，三因得三十，加入內周即外周，合問。

以現代符號表示解法



設池徑爲 x

則全徑爲 $x+2\times5=x+10$

大圓面積：$\dfrac{3(x+10)^2}{4}$

四段圓積：

$3(x+10)^2=3x^2+60x+300\cdots$（1）

池積：$\dfrac{3x^2}{4}$

四段池積：$3x^2\cdots$（2）

（1）－（2）得 $60x+300\cdots$（3）

環田積：

$\dfrac{3(x+10)^2}{4}-\dfrac{3x^2}{4}=285$

$3(x+10)^2-3x^2=285\times4=1140\ldots(4)$

（3）＝（4）$\therefore 60x-840=0$

$x=840\div60=14$

$\text{內周}=14\times3=42$

$\text{ŠOŽü}=(14+10)\times3=72$

除了籌算式中，未標示爲負數外，整體而言爲天元術的標準形式，可見朝鮮算學家在當時已嘗試用天元術解題，在「又曰」中的敘述，仔細觀之，其實是將天元術的過程的簡化。而相對的同一時期天元術在中國以失傳近四百年。

3.3.4 折變互差門

〈折辯互差門〉共有六題，爲較複雜的比例問題。沿用《算學啓蒙》的名稱，但整體而言是與《算法統宗》卷五衰分章中的「合率差分」同一類型。[49]即已知總數及列衰求各衰之數。

第二題爲基本的題型，解題原則是須先求出各衰，再予以「齊同」，緊接著求出一衰應得之數，在依據各衰之比例求出實際數值：

〔2〕今有兵士六千九百四十八人，欲給衣絹。每三人給衫絹七十尺，每四人給裙絹五十尺，問總絹及各絹若干？

答曰：共絹二十四萬八千九百七十尺，衫絹一十六萬二千一百二十尺，裙絹八萬六千八百五十尺。

法曰：以三人互乘五十尺，四人互乘七十尺，以乘總兵為實，分母相乘得十二為法，除之，得總絹，另置兵士七因三歸得衫絹，五因四歸得裙絹，合問。

依現代運算式表示解法：

（1） 總絹：

$$6948\times\left(\frac{70}{3}+\frac{50}{4}\right)=\frac{6948\times(70\times4+50\times3)}{3\times4}=248970$$

（2） 衫絹：$6984\times\dfrac{70}{3}=162120$

（3）裙絹：$6984\times\dfrac{50}{4}=86850$

於法曰中「七因三歸得衫絹，五因四歸得裙絹」，應更正爲「七十因三歸得衫絹，五十因四歸得裙絹」。

本門之中的數據要比《算學啓蒙》或《算法統宗》的數據複雜，也就是說，更趨向於「帶分母子差分」的問題，[50]即各衰中有分數出現的情形，例如第三題：

[49]《算法統宗》卷五，頁 1292。
[50] 同上，頁 1299。

「今有人貸銀九萬一千兩，今欲還，無銀，乃還七分綾，八分羅，綾七匹價五十四兩，羅九匹價五十三兩，問若干？」 需先求綾價每匹 $\frac{54}{7}$ 兩，羅價每匹 $\frac{53}{9}$ 兩外，又要考慮綾與羅之比例爲 7：8，一衰應得之數爲 91000÷（ $\frac{54}{7}\times 7+\frac{53}{9}\times 8$ ），下表茲選《算學啓蒙》及《算法統宗》的題目略做比較：

出處	問題	一衰應得之數
東算抄	今有銀四百二十兩，欲買四分綾、五分羅、六分紗、七分絹，只云綾六匹價二十兩，羅九匹價二十四兩，紗十五匹價二十五兩，絹七匹價十兩，問四色匹數及價各若干？	$420\div\left(\frac{20}{6}\times 4+\frac{24}{9}\times 5+\frac{25}{15}\times 6+\frac{10}{7}\times 7\right)$
算學啓蒙	今有錢七千四百九十一貫八百九十文，欲買綾、羅、絹。綾匹價一十二貫七百六十文，羅匹價九貫八百九十四文，絹匹價七百六十六文，需要綾一羅二絹三買之，問三色各幾何？	$7491.89\div(12.76+9.89\times 2+0.76\times 3)$
算法統宗	今有銀一百二十一兩一錢七分五厘，糴米、麥、豆，議要米一分麥兩分豆三分，其米每斗九分二厘，其麥每斗八分五厘，豆每斗三分六厘，問三色併價各若干？	$121.175\div(0.092+0.92\times 2+0.85\times 3)$

原則上此類題目，一般算法爲：若總數爲 A，設各衰爲 $\frac{b_1}{a_1}$ ，$\frac{b_2}{a_2}$ ，… $\frac{b_n}{a_n}$ 等，且各衰以 r_1 ，r_2 ，…，r_n 的比例分配，則 $A\div\left(\frac{b_1}{a_1}\times r_1+\frac{b_2}{a_2}\times r_2+...+\frac{b_n}{a_n}\times r_n\right)$ 爲一衰應得之數。

3.3.5 商功修築門

〈商功修築門〉主要是修築工程問題，包含方錐和方臺的互換，圓錐和圓臺互換，築牆、築堤等問題，共六題。只有第六題牽涉到體積問題，其餘皆爲相似形比例關係的運用。在《算法統宗》卷八商功章中皆能找到同類型的類似題，然而亦不免「遺傳」了其錯誤之處，以第六題爲例：

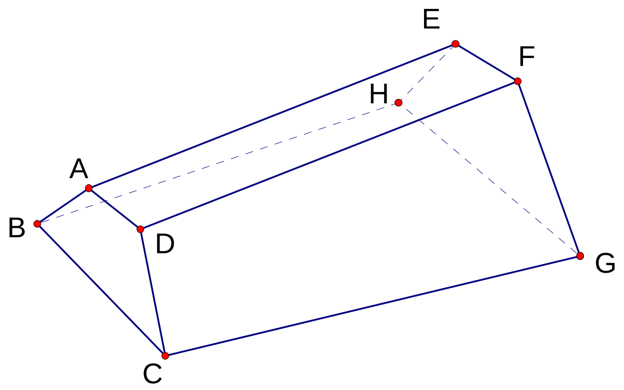
〔6〕今有築堤，東頭上廣四尺，下廣七尺，高九尺，西頭上廣十尺，下廣十一尺高二十一尺，長四十八尺問積若干？

答曰：七千二百尺。

法曰：東高倍之加西高，以併東頭上下廣乘之，折半，又西高倍之加東高，以併西頭上下廣乘之，折半，二數併得七百五十尺，在以長乘之為實，五而一，合問。

解法中「五而一」承襲程大位之誤，應爲「六而一」。[51]洪正夏在《九一集》卷之一最後一題已有更正。正確公式如下：

$$\overline{AD}=a_1,\overline{EF}=a_2$$
$$\overline{BC}=b_1,\overline{HG}=b_2$$
$$\overline{AE}=\overline{DF}=L$$
$$\Rightarrow V=\frac{L}{6}\left[\frac{a_1+b_1}{2}(2h_1+h_2)+\frac{a_2+b_2}{2}(2h_2+h_1)\right]$$



【圖 3-9】

另外，於第二題解法：「置下周以原高除之，得七吋半為法，另列原高內減今高，得截去上高八尺為實，以法乘之，合問。」，[52]筆者發現到「法」的另一種象徵，一般而言，「法」在算則中爲除數，這裡的「法」字用法特殊，只視爲某種代號。

解築牆或築堤問題需要用到比例性質，由第一題及第三題可知，能夠利用分比及比例式解題：

[51] 《算法統宗》卷八，頁 1342。
[52] 《東算抄》卷之一，頁 109-110。

〔1〕今有方錐，下方二十四尺，高三十二尺，今改作方臺，只用上方六尺，問截去高若干？ 荅曰：截去高八尺。 法曰：上下方相減，以高乘之，以下方除之，得下高，內減原高，合問。	用現代比例式表示：H_t：原高，H_u：上方 $H_t : H_u = 24 : 6$ $H_t : (H_t - H_u) = 24 : (24-6)$ $\Rightarrow$‰º,$H_t - H_u = \frac{32\times(24-6)}{24} = 24$ $B, \qquad 32-24=8$
〔3〕今有方臺，上方六尺，下方二十四尺，高二十四尺，今改作方錐，問原錐高若干？ 荅曰：三十二尺。 法曰：置高以上方乘之為實，以上下方相減得十八為法，除之，得上尖高八尺，加臺高合問。	用現代比例式表示： H_u ：上方 Hu：（24＋Hu）＝6：24 Hu＝（6×24）÷（24－6）＝8 原高＝24＋8＝32

3.3.6 貴賤差分門

〈貴賤差分門〉的主要內容包含匿價差分、行程問題、三色差分、等差數列等四類共十三題，仍是與「率」有關的變化和應用。

3.3.6.1 匿價差分類型問題

已知總物價、貴物數、賤物數，及貴賤兩物之價差，求各物價。這就是匿價差分問題。由《算法統宗》的匿價差分歌可知其解題之一般原則：「匿價分身法更奇，多乘高物以為實，得價減總餘又列，共物除餘低價知，低價添多為高價，各乘各物不差池，學者能知此般算，三四物價也相宜。」，[53]在不失一般性下，假設總物價爲 A，貴物數爲 U 賤物數爲 L 兩物價差爲 P 則賤物價爲 $\frac{A-UP}{U+L}$ 。其中 UP 爲歌訣中之「多乘高物」，亦可推廣成貴物價爲 $\frac{A+LP}{U+L}$ ，則歌訣可修正爲：「…，低乘高物以為實，得價加總餘又列，共物除餘高價知，高價減多為低價，…」，[54]《東算抄》的問題，就是先求貴物價：

---

[53] 《算法統宗》卷五，頁 1303。
[54] 同上，頁 1304。

〔1〕今有銀一千八百三兩，共買綾七十五疋，羅一百五十疋，只云綾疋價比羅疋價多九錢四分，問各匹價若干？ 答曰：綾匹價八兩六錢四分，羅匹價七兩七錢。 法曰：置羅以九錢四分乘之得一百一十四兩，以併於原銀共得一千九百四十四兩，以綾羅共數二百二十五匹為法，除之得綾價，內減差九錢四分餘為羅價，合問。	若假設設綾一匹 x，則羅一匹 x－0.94 則 75x＋150（x－0.94）＝1803 $x=\dfrac{1830+150\times 0.94}{75+150}$ $=\dfrac{1944}{225}=8.64$

由此可知，其不泥於傳統，實爲轉化之例證，也契合筆者所言「代代相傳，略有差異」。

3.3.6.2 行程問題與歷史脈絡探討

行程問題共四題，此類問題在《九章算術》與吳敬的《九章算法比類大全》中置於均輸章，而獨《算法統宗》置於商功章，《東算抄》將其置於〈貴賤差分門〉亦符合其旨意，因爲行程問題牽涉到速率快慢及比例問題，可類比於物價之貴賤。此外，《東算抄》又將關於最小公倍數的行程問題納入，使題目的類型更加多樣化。

這方面的問題雖然條件略有差異，但歸結起來皆是要求「相（等）會行里數」或「相會日數」，第二題是等速同向運動問題，若兩人速度分別爲v_1,v_2（設$v_1>v_2$），慢者先行 d，快者再出發，問追到時所跑的路程是多少？此問題可先求追到的時間$T=\dfrac{d}{v_1-v_2}$，再求所走的路程$D=T\times v_2$，但第二題略做一些變化。

〔2〕今有甲乙二人步行不等，先令乙已去三十里，後令甲追去八十里，不及二十里，復追之，問幾里可及？

答曰：一百六十里。

法曰：置不及二十里，以甲追去八十里乘之，得一千六百里為實，列已行三十里內減不及二十里，餘十里為法除之，合問。

解法說明：此題未告知甲、乙的速度是多少，但由題意可之乙先走三十公里後，甲追了八十公里，還少二十公里，故乙走了一百公里，去掉原來差距三十公里，可知乙實際走七十公里。由此判斷兩人之速度比，所以差二十公里，甲需要再走 $\frac{20}{80-70}\times 80=160$ 公里。

第三題爲等速相向問題，若兩人速度分別爲 v_1, v_2（設 $v_1 > v_2$），兩人相距 D，則相會時間爲 $T=\frac{D}{v_1+v_2}$ 。

第三題與《算法統宗》卷八商功章第二十七題之差異，僅於數字、交通工具、地名：

《東算抄》	《算法統宗》
今有自京自萊州一千二百六十里，馬從萊州向京，日行八十里，人從京向萊州，日行六十里，問人馬幾日相會？ 荅曰：九日，人行五百四十里，馬行七百二十里。 法曰：置一千六百二十里為實，併入人馬日行四十里為法，除之得九日，以乘各日行里，合問。	今有大都至杭州四千二百七十五里，馬從大都往南行一百二十里，船從杭州往北日行七十里，問船馬幾日相會？各行若干？ 答曰：二十二日半，馬行二千七百里，船行一千五七十五百里。 法曰：置四千二百七十五里為實，卻併船馬日行共一百九十里為法，除之得二十二日半，又為實各以原行里數乘之，得各行數。

筆者認爲可由佈題之地名差異，瞭解當時的時空背景或社會文化之脈絡。大都（今北京），昔日爲元朝首都，而浙江杭州（南宋時都城，舊稱臨安），元水師於至元十三年（公元 1276 年），沿海南下，攻佔臨安，滅南宋。元朝爲了海上的軍事活動和大規模的海運漕糧，大量建造船隻，其數量質量遠超過前朝，元代的四桅遠洋海船在南洋、印度洋一帶居於航海船舶首位，載重量約在三百噸左右，在繼承宋代的造船技術基礎上又有進步。[55]它爲明代建造五桅戰船、六桅座船、七桅糧船、八桅馬船、九桅寶船、創造十分有利的條件。

[55]參閱張靜芬著，《中國古代造船與航海》（台北：臺灣商務印館，1995），頁 106-107。

【圖 3-10 大運河】

元代的漕運將南糧北運，影響深遠至今，《元史・食貨志》中記載：「當舟行風信有時，自浙西至京師，不過旬日而已。」運量最高時達三百五十二萬餘石，以當時分春秋兩次起運，預估每次需一千七百六十餘艘船（每艘船運量約一百二十萬斤）同時參加運輸。[56]另外當時被稱爲「汗八里」的大都，也是世界著名經濟中心之一，從非洲海岸、日本、朝鮮、南洋各地都有使團、商隊來到大都。而杭州早在宋太祖開寶四年（公元 971 年）就在杭州設市舶司，掌管嶺南及兩浙路各港對外航海貿易收稅等事務，[57]成爲發展航海貿易重要的機構。

此外，於元世祖至元二十九年（公元 1292 年），在郭守敬主持開鑿通惠河後，從北京到杭州的京杭大運河全線貫通，在南北貨物的交流上，更爲便利與迅速。[58]所以程大位佈題時選擇大都與杭州，自有其道理，更何況程大位本人就是以經商起家。

《東算抄》以「萊州至京」佈題，筆者對此欲瞭解其時代脈絡，朝鮮在「甲午更張」之前均視中國爲宗主國，中、朝自古文化交流密切，連帶的學制、官制等等都受到中國之影響，甚至連地名也不例外。朝鮮有多處的郡縣名稱和中國相

56 同上，頁 115。

57 外國商船到達中國港口必先報告市舶司，由它派人上船檢查，徵收其貨物的十分之一做爲進口稅收，叫做「抽分」。抽取的貨物解送京城上繳國庫叫「抽解」，「抽解」是政府的重要財政稅收。此乃「就物抽分」及「庫務解稅」的由來。

58 陳美東、杜石然、金秋鵬、范楚玉著，《簡明中國科學技術史話》（台北：明文出版社，1992），頁 349。

同，如楊州、廣州、襄陽…等，在慶尙道有東萊一處，但其別稱爲萊山，[59]朝鮮並無萊州之地名。而在中國山東省境內有萊州一地，唐太宗貞觀十八年（公元664 年）太宗以高麗不聽勿攻新羅諭告，決意興兵擊高麗，遂命張亮率兵四萬，戰艦五百艘，自萊州犯海取平壤。[60]

宋代對高麗主要的南北兩條路線，北線從山東萊州出發橫渡黃海，用兩天可到朝鮮半島西南海岸的甕津。宋代高麗遣宋使五十七次，宋使往高麗三十次，兩國來往很多。中、朝間貿易是先由官方透過朝貢和特賜的方式，後來才逐漸發展成民間貿易。明朝朝鮮使節進入南京的路線：先底蓬萊，再經登州、萊州、青州、懷安諸府、取道大運河南下，清代朝鮮使團所行路線與明代差異不大，可見萊州與朝鮮的關連。[61]至今萊州地區仍有許多的韓國僑民，而萊州地區之生意人多能通漢語與韓語，因此，筆者認爲《東算抄》中的萊州應爲中國之地名，而「京」是指北京。上述可說是在研究數學文本之數學內容時，窺見其歷史脈絡之一例證。

3.3.6.3 最大公因數與最小公倍數問題

第四題至第六題牽涉到最大公因數與最小公倍數的概念：

〔4〕今有甲乙兩人同時啟程，只云甲日行八十五里，乙日行六十五里，問甲乙所行各幾日，而行里適等？

答曰：甲一十三日，行一千一百五里，乙一十七日，行一千一百五里。

法曰：置甲日行八十五里，乙日行六十五里約之得五為法，列八十五里為實，五除之，得十七日，為乙之日；又列六十五里以法除之，得十三日，為甲之日，乘各行，合問。

又曰：置日行相乘得五千五百二十五里為實，另列甲、乙日行八十五、里六十五里約之得五為法，除之，得行里一千一百五十里，合問。

解法一應用到（a，b）＝d，a=dh，b=dk，（h，k）=1，則〔a，b〕=dhk 的概念。解法二先求行里數即兩者之最小公倍數，是運用$[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$之原理。兩種方法都必須先求出最大公因數，也就是「置甲日行八十五里，乙日行六十五里約之得五」。

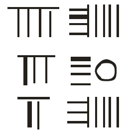
---

[59]參見圖書刊行會編，《中國・朝鮮地名異稱辭典》（日文），東京：圖書刊行會，1993。頁 99。
[60] 參閱張靜芬著，《中國古代造船與航海》，頁 77。
[61]參閱陳尚勝，〈明清時代的朝鮮使節與中國記聞－兼論《朝天錄》和《燕行錄》的資料價值〉，中國海外交通史研究會，《海交史研究》第二期（福建：中國海外交通史研究會，2001）頁 38-54。

第五題將條件增至三人，並以第四題之思維解題：

〔5〕今有甲乙丙三人行步不等，甲日行四十五里，乙日行四十里，丙日行三十五里，問幾日而各所行里數相等？

答曰：甲五十六日，行二千五百二十里；
乙六十三日，行二千五百二十里；
丙七十二日，行二千五百二十里。

法曰：列三人日行相約得五，以除四十五里得九為甲分母，以除四十里得八為乙分母，以除三十五得七為丙分母，乃列於左行，又列各日行於右行，以左行互乘右行 ，三位各得二千二百二十里，此相等之數，以各日行除之得各日，合問。

本題解法，亦先求出三數之最大公因數（45，40，35）=5，再依籌算式

9　45

8　40　以左行互乘右行（左行表分母）得行里數爲 $\dfrac{7\times8\times9\times45}{9}=2520$

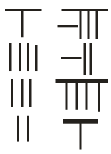
7　35

其依據原理爲（a，b，c）＝d，a=dh，b=dk，c=dm，〔a，b〕=dhkm，但 h、k、m 須兩兩互質，此題 7、8、9 恰兩兩互質。又法曰中「三位各得二千二百二十里」應更正爲「二千五百二十里」。

第六題再擴增爲四項，（A，B，C，D）＝d，A=dh，B=dk，C=dm，D=dn 但 h、k、m、n 兩兩不互質：

〔6〕今有欲買牛、馬、騾、驢，而其牛隻價十八兩，馬隻價十二兩，騾隻價九兩，驢隻價六兩，問四色各幾隻價適等？

荅曰：二牛、三馬、四騾、六驢，價皆三十六兩。

法曰：列四色隻價互相約之得三為法，以除各價，得牛六、馬四、騾三、驢四，乃列於左行，又列各價於右行， 以左行互乘右行四位，各得四百三十二兩為實，各以其價除之，得牛二十四、馬三十六、騾四十八、驢七十二、就四位互相約之不能約則止得十二，卻為法，以除牛二十四得牛二，以除馬三十六得馬三，以除騾四十八得騾四，以除驢七十二得驢六，以除四百三十二，得等價三十六兩也。

今譯解法：

（18，12，9，6）=3

6 18
4 12
3 9
2 6

4×3×2×18÷18=24
6×3×2×12÷12＝36
6×4×2×9÷9=48
6×4×3×6÷6=72

（24，36，48，72）=12

牛：24÷12=2
馬：36÷12=3
騾：48÷12=4
驢：72÷12=6

其解法原理與步驟爲：

（1） 先求最大公因數 d
（2） 令 A=dh，B=dk，C=dm，D=dn
（3） 再求（kmn，hmn，hkn，hkm）=d’
（4） 利用（kmn/ d’）×dh=（hmn/ d’）×dk=（hkn/ d’）×dm=（hkm/ d’）×dn
則以 kmn/ d’， hmn/ d’， hkn/ d’， hkm/ d’爲所求

本題亦可利用比例性質解之：設牛：a、馬：b、騾：c、驢：d

$$18a = 12b = 9c = 6d$$
$$6a = 4b = 3c = 2d$$
$$a:b:c:d = \frac{1}{6}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2} = 4\times3\times2:6\times3\times2:6\times4\times2:6\times4\times3$$
$$= 24:36:48:72 = 2:3:4:6$$

上述三題，分別探討各類情形，可看出東算家之嚴謹，及對求最大公因數、最小公倍數問題已有深刻的領悟。

3.3.6.4 三色差分（三率分身）問題

第七題屬於三色差分類型，楊輝在〈續古摘奇算法〉將其稱爲「三率分身」，[62]題目型態爲：已知甲、乙、丙三物單價，又知共價及買共物若干，求甲、乙、丙各多少？此問題其實是「貴賤差分」之擴展，在現代數學中可歸類爲二元一次不定方程，《張邱建算經》的百雞問題亦爲此類。[63]本題的算法利用楊輝所給的解

[62]參見楊輝，《楊輝算法》，頁 1107。
[63] 參見《張丘建算經》收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第一分冊，（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 293。

法原則，[64]先定出其中一物之數量及錢數，就可將原題轉化成一個二色差分問題，再以二色差分法解題，至於如何先定一物之數，則採用《算法統宗》的方法「三色、四色差分之法，俱先定中等，惟留首尾二色，以貴賤差分法筭之，不拘五、六、七、八、九色者做此。」[65]

3.3.6.5 年齡問題

第八、九題主要是「貴賤差分」及「帶分母子差分」問題，但其解法有別於中算，《東算抄》的解法事先求出一組符合題意且數字較小的解，再依實際數目予以「齊同」，今以與《算法統宗》同類型與第九題加以比較。

〔9〕今有昆仲季三人，昆謂季曰：汝年紀比我四分之三，二弟年紀比我六分之五多於汝四歲，問各年若干？
答曰：昆四十八歲，仲四十歲，季三十六歲。
法曰：置六分為甲衰，四歸三因得四分半為丙衰，五為乙衰，於乙衰內減丙衰餘五，以除四歲得八，以乘各衰合問。

其解法為：昆取 6 則仲為 5 季為 4.5，二弟多於季 4 歲但依上述僅多 0.5，則應乘 8 倍，故三人各為 48,40,36 歲。

而《算法統宗》的解法過於繁複：

今有昆仲三人，小弟謂：長兄曰我年紀比汝四分之三，次兄年紀比汝六分之五我多八歲，問三人歲數各若干？
答曰：長兄九十六歲，次兄八十歲，小弟七十二歲。
法曰：置六分之五、四分之三，以母四互乘子五得二十為次兄之差，又以母六互乘子三得十八為小弟之差，又以母四、六相乘得二十四為長兄之差，另以二十減去十八餘二為法，先置長兄差二十四，以八歲乘之得一百九十二為實，以法二除之得九十六為長兄之歲；另以次兄差二十以八歲乘之得一百六十為實，以法二除之得八十為次兄之歲；另以小弟十八亦以八歲乘之得一百四十四為實，以法二除之得七十二為小弟歲數，合問。

對於這類問題，東算家對「率」的掌握能力已有所提升。

3.3.6.6 等差數列問題

〈貴賤差分門〉的最後兩題為等差數列問題，一般形式為已知等差數列前 n_1

[64]參見楊輝，《楊輝算法》，頁 1106。
[65]引自程大位，《算法統宗》，頁 1305。

項之和S_1；後n_2項之和S_2，求各項爲多少？其原則爲先求公差：

$$S_1 = n_1 a + [1 + 2 + ... + (n_1 - 1)]d = n_1 a + \frac{n_1(n_1 - 1)}{2}d$$

$$S_2 = n_2 a + [(n-1) + (n-2) + ... + (n - n_2)]d = n_2 a + \frac{n_2(2n - n_2 - 1)}{2}d$$

$$n_1 S_2 - n_2 S_1 = n_1 n_2 \left[n - \frac{n_1 + n_2}{2}\right]d$$

第十三題「竹節容米」問題，在《九章算術》中就有此類型的題目，楊輝《詳解九章算法》、《算法統宗》中竹節數爲九節，《算學啓蒙》中爲七節，《東算抄》爲十二節，東算家在佈題時不只完全複製（clone），會在題目上尋求變化，以凸顯其對運算能力的掌握。

3.3.7 差等均配門：等比數列問題

等比數列問題爲〈差等均配門〉的主軸，除了第五題、第七題爲等差數列。其題型包含四六差分、二八差分、三七差分、折半差分、挨次差分等五類，共七題。項數爲九項的就有五題，七項的有一題，而在《算法統宗》同類型問題中最高爲五項，再次彰顯東算家的運算能力。基本解題法則爲先假設首項爲 a，再乘以公比，得到各衰後，以衰分術求得各項實值。

第一題爲四六差分問題，由小至大排列，則公比爲$\frac{6}{4}$，故設首項爲四，再用「加五得各衰」，即每次乘 1.5，即可求得次衰，各衰求得後，再以「衰分術」進行運算。

爲了使計算方便，首項的假設非常重要，要避免乘以公比後產生「奇零」的情形，尤其是三七差分時要特別注意，第七題就提出三種假設方式：

〔3〕今有羅九千九百五十四匹，令甲乙丙三七分之，問若干？

答曰：甲：六千一百七十四匹，
乙：二千六百四十六匹，
丙：一千一百三十四匹。

法曰：置總羅為實，別置一數以七為法，二次乘之得甲衰四十九，三因七歸得乙衰二十一，三因七歸得丙衰九，

解法一：

甲衰爲 7^2，

乙衰爲 $7^2 \times \frac{3}{7} = 21$，

丙衰爲 $21 \times \frac{3}{7} = 9$

9954÷（49＋21＋9）＝162

再乘各衰，即由大到小，有 n 項，則首項之衰爲 7^{n-1}

併得七十九為法，除實得一百二十六匹，以乘各衰得，合問。 一法：置一以三為法，二次乘之得丙衰九，三歸七因得乙衰二十一，甲衰四十九，亦得。他皆倣此 一法：置一以七為法欲先求下衰則以三為法三次乘之三位則三次，九位則九次，得首位衰次，三因七歸得各衰甲三百四十三、乙一百四十七、丙六十三，併得五百五十三為法，除羅，得十八，以乘各衰，亦得。下亦倣此	解法二： 丙衰3^2， 乙衰$9\times\frac{7}{3}=21$， 甲衰$21\times\frac{7}{3}=49$ 即由小到大，有 n 項，則首項之衰爲3^{n-1} 解法三： 置一以七爲法（求下衰則以三爲法），n 項則 n 次，得首位衰次 如：甲衰$7^3=343$， 乙衰$343\times\frac{3}{7}=147$， 丙衰$147\times\frac{3}{7}=63$ 直接假設：由大到小，有 n 項，則首項之衰爲7^n， 由小到大，有 n 項，則首項之衰爲3^n

除了比《算法統宗》多了兩種解法外，由解法一、二可知其對等比數列性質的瞭解，對於數列順序的變換，可以掌握公比的改變，「三因七歸」轉換爲「三歸七因」，解法三提供了直觀且便捷的假設法：「三位則三次，九位則九次」，由第四題更可以瞭解東算家之靈活，不拘泥於固定的通則。

〔4〕今有米二千一十六萬六千九百六十二石，今九等三七分之，問各若干？

此法依第三題之解法三解題：「置一以七為法，八次乘之得甲」，爲何不用「九次乘之」？筆者認爲是考慮到$7^9=40353607$已超過總數了，若要求一衰之數，便會出現奇零的情形。

由第五題發現，東算家對等差數列性質已有相當程度的認知，並發展出有別於中算的方法：

題目	解法
今有米二百五十二石，今七等人分之，只云甲乙丙數與丁戊己庚數同，問各該若干？ 荅曰：甲：四十五石，乙：四十二石， 丙：三十九石，丁：三十六石，	總米七歸即 $7a_1+21d=252\Rightarrow a_1+3d=36$爲丁 總米折半 3 歸，即甲乙丙之和除以 3 即$a_1+5d=126\Rightarrow a_1+d=42$爲乙

戊：三十三石，己：三十石，庚：二十七石， 法曰：置總米以七歸得丁三十六石，又總米折半三歸得乙四十二石，乃乙丁相減餘折半得差三石，次遞加減，合問。	故公差爲（乙－丁）÷2＝3

當中算家仍「執著」於先假設各衰，再進行轉換的「絕招」時，東算家發展出另一種解法，並掌握了對等差數列的一般假設法，實是「變異」之所在。

第七題的挨次差分，又可看出東算家的巧思：「今有金六百二十一兩，令九子挨次差分之，問各若干？」，其中「法曰：列一、二、三、四、五、六、七、八、九併得四十五為法，除總金得九子所，十三兩八錢，遞加一倍合問。」是利用挨次差分的基本性質，「各衰分別爲 1,2,3…,n 的差分」。而「又曰：置總金以九子除之得第五子所得九十六兩，五歸得第九子所得一十三兩八錢，遞加一十三兩八錢，合問。」，運用了算術平均數的特性。

3.3.8 貴賤反率門

〈貴賤反率門〉乃沿用《算學啓蒙》之稱呼，共兩題，題型與解法皆同。所謂貴賤反率即與率有關的實務問題。「貴賤反率見九章粟米，其錢多物少者錢為實物為法，謂之其率；錢少物多者物為實錢為法，謂之反其率。」，[66]此門的特點爲「貴率與賤率相差一個單位」，如此可一般化爲不定方程問題，並求一組特解：已知總金爲 M，共買物 W，假設物價分別爲 x，（x+1），買物 y，（W－y），則不定方程爲 xy＋（x＋1）（W－y）＝M。

類別	題目	解法
其率	〔1〕今有錢六十九文共買珎珠二十八箇，欲其貴賤率之，問每箇價及各該若干？ 荅曰：大每箇價三文，共十三箇，價三十九文。小每箇價兩文，共十五箇，價三十文。 法曰：置錢以珎珠除之得二文為賤價，加一文為貴價，餘實十三乃大珠之數，以此反減於下法即為小珠，合問。	69÷28=2…餘 13 則賤價爲 2 文，貴價爲 3 文，且大的有 13 個；小的有 15 個
反其率	〔2〕今有錢二十四兩，買木二百四株，以貴賤率之，問每兩各該若干？ 荅曰：每兩大木八株，共九十六株，價十二兩。	204÷24=8…餘 12 故大木每兩 8 株，小木每兩 9 株，各買 12

[66] 參閱孔國平著，《李冶朱世杰與金元數學》（石家莊市：河北科技，2000），頁 335。

	每兩小木九株，共一百八株，價十二兩。 法曰：置木以錢除之得八株為貴物，加一株為賤物，餘實十二為賤木價，以此反減於下法得貴木價，合問。	兩

3.3.9 毬隻解隱門

此門內容全爲球體體積的相關問題，分爲實心與空心兩類共五題。球體體積皆以$\frac{9}{16}D^3$（D 爲直徑）做運算。[67]第四題爲《東算抄》第三個以天元術解題的題目：

〔4〕今有金毬一隻重六百八十四斤，只云厚二寸，問外高及內周各若干？

答曰：外高一尺二寸，內周二尺四寸。

解法：

（1）設內徑爲 x

684 斤－＞684 立方寸

$V=\frac{9}{16}D^3 \Rightarrow 9D^3=16V=16\times 684=10944$，　（術文中九歸爲多餘）

$4^3\times 9=576$，　$4\times 3\times 9=108$，10944－108=10368

即$\begin{aligned}&9(x+4)^3-9x^3=684\times 16\\&108x^2+432x-10368=0\end{aligned}$（以籌算式表示）

（2）立天元一爲外高（設外高爲 x）

內徑：$(x-4)$

$(x-4)^3\times 9=16\times 684$

$9x^3-108x^2+432x-576$

$9x^3-(9x^3-108x^2+432x-576)=684\times 16$

$108x^2-432x+576=10944$

$108x^2-432x-10368=0$

此題除了用天元術外，所提供的兩種方法，假設的變數也不同，分別爲內徑、外高，一題多解的模式，在《東算抄》中經常出現，有此可知《東算抄》的「抄」不能以「抄襲」的「抄」視之。

[67] 此爲《九章算術》少廣章之球體體積公式，劉徽雖指出此公式不正確，但仍爲後世所沿用。

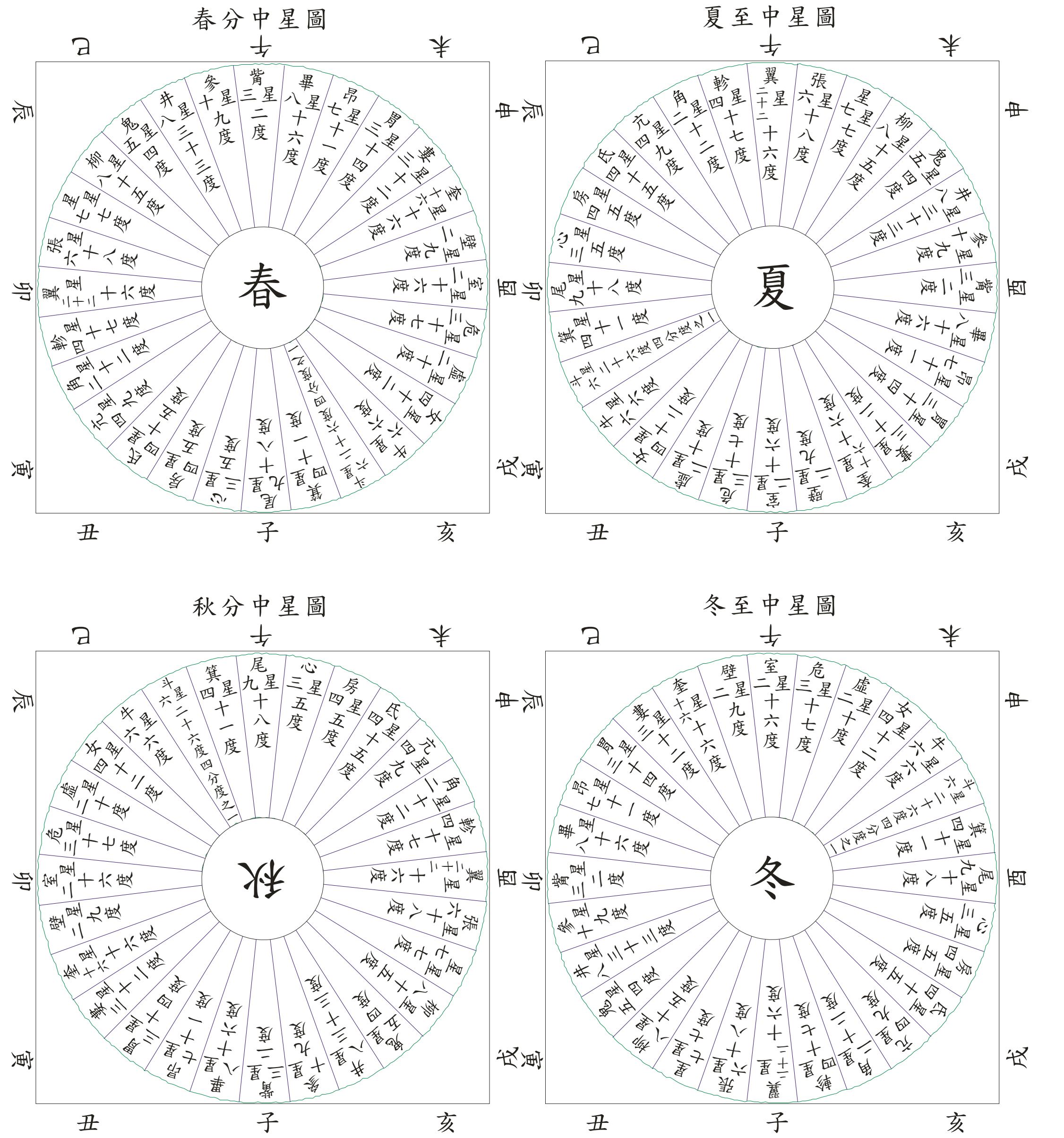
3.3.10 之分齊同門

「之分齊同」即各種分數問題，含約分通分及四則運算，在天文歷算中，由於數字較爲複雜，而爲求準確性，就必須以繁複的分數表示，尤其在求回歸年或交食週期時，需要有高度的數學能力及方法，分數的運算是最基本的，《東算抄》將其與天文歷法相結合，而不是只有單純數字的運算，可以再度領略到其佈題時的巧思。

以第二、三題爲例，雖然兩者類型相同，但先以特殊情境模擬，不先牽涉天文問題，較不會使讀者「望文生懼」：

題目	解法
〔2〕今有圓池周圍三百六十五尺四分之一，有大小二蟻并行，小蟻日行一尺，大蟻日行一十三尺十九分尺之七，問二蟻幾日相會？ 荅曰：二十九日九百四十分之四百九十九。	池周：$365\frac{1}{4}=\frac{1461}{4}=\frac{27759}{4\times19}$ 大蟻：$1=\frac{4\times19}{4\times19}$ 小蟻：$13\frac{7}{19}=\frac{254}{19}=\frac{1016}{4\times19}$ 相會： $\frac{\text{’rŽü}}{\text{‘å‹a}\ -\text{¬‹a}}=\frac{27759}{1016-76}=\frac{27759}{940}=29\frac{499}{940}$
〔3〕今有周天三百六十五度四分度之一，繞地左旋，日月麗天而并行，日不及天一度月不及天十三度十九分度之七，問日月幾日相會？ 荅曰：二十九日九百四十分日之四百九十九。	與上同，只是情境不同 日等同於大蟻 月可視爲小蟻 周天擇爲池周

再者，此處有春分、夏至、秋分、冬至等四幅中星圖並畫有二十八星宿在各節氣的位置：



【圖 3－11 東算抄之二十八星宿圖[68][69]】

二十八星宿在天文上為一種赤道座標系統，根據的位置可作為修正曆法的參考，而曆法的正確性，攸關民生利害，自古就受統治階級的重視，如圖：唐時銅鏡（圖 3－12）中就刻有二十八星宿圖（外緣第二圈），次圈為八卦圖，再次為十二獸圖，中心為天宮四獸，最外圈有四言詩：「長庚之英，白虎之精，陰陽相親，山川之靈，順天之則，法地之寧，分別八卦，順考五行，百靈無以逃其狀，萬物不能遁其形，福祿來成。」

[68]參見《東算抄》卷之一，頁 147-150。（筆者倣文本原圖繪製，故「秋」字維持原方向）
[69] 同上。

【圖 3－12 唐二十八星宿銅鏡[70]】

最值得注意的是，若依古時人們對於曆法的尊重，參照本門中各項曆法的計算及年代的陳述，可定出《東算抄》的成書時間，茲節錄第十四題加以佐證：

〔14〕按堯典中星圖，則冬至之日，在虛昏中昴，至宋寧宗時冬至日在斗昏中壁，至元延祐時，冬至日在箕八度昏中亦壁中星不同者，蓋天度有餘歲，日不足天漸差而西，歲漸差而東，故東晉虞喜乃立差以追其變，約以五十年退一度，何承天以為太過，乃倍其年，而又反不及，至隋劉焯取二家中數，[71]以七十五年退一度，然今冬至在何度，而昏中何星？

答曰：今冬至在箕宿二度，昏中室宿。

法曰：自延佑甲寅至今戊戌四百五年…

此「延佑」爲元仁宗之年號，甲寅時以干支計算爲延佑元年，即西元 1314 年，「至今戊戌四百五年」，則可推估成書於西元 1718 年，其干支恰爲戊戌。在中國爲清康熙五十七年，於朝鮮則爲李朝肅宗四十四年。

3.3.11 物不知總門

物不知總門主要內容爲著名的「孫子定理」（一次同餘式組）、河婦蕩杯、合利問題，[72]共十一題，此門列於〈之分齊同門〉之後，筆者認爲自有其道理，因

[70] 引自張靜芬，《中國古代造船與航海》，頁 85。
[71] 劉焯（544-610），字士元，信都昌亭（今河北冀縣）人，精於天文學、數學、儒家經學、音律。曾歷任翼州博士、州從事、員外將軍、太學博士等。劉焯的科學貢獻主要爲《皇極曆》，該曆在天文數據測算、天文表格編制、日月交食推算、五星位置推算，都貢獻良多。最早提出了黃道歲差概念和具體數值，對唐代及北宋若干曆法產生很大的影響。
[72] 《孫子算經》「物不知數」問，又有「秦王暗點兵」、「韓信點兵」、「鬼谷算」、「隔牆算」，楊輝將之稱爲「翦管術」。秦九韶稱作「大衍總數術」，及今一次同餘式組解法。

爲在天文曆法上非常重視上元積年的推算，而各種天文週期，如回歸年、朔望月…等，和相應的差數來推算上元積年，則構成一個求解一次同餘式組的問題。

第一到五題皆爲「物不知數」問題，其解法遵循「古法」，[73]皆先求「剩一」之數，再繼續依題目所給的條件求解，五個題目所給的數目分別爲（3，5，7）、（7，8）　、（15，19）、（5，7，9）、（7，9，11）。今以第四題爲例：

〔4〕今有物不知其數，只云五數剩一，七數剩三，九數剩一，問共若干？

答曰：一百零一箇。

法曰：列五、七、九維乘。以五乘七，又以九乘得三百五十為滿法，列位另以九乘七得六十三，再以七因得四百四十一為五數剩一之衰，又以九乘五得四十五，再以五因得二百二十五為七數剩一之衰，乃剩三下併得六百七十五，又以七乘五得三十五，再以八因得二百八十為九數剩一之衰，剩二下併得五百六十，上項七因、五因、八因皆求一之法，三位併之得一千六百七十六，於內減滿法數，至于於自盡，則合問。

今將解法分析如下：

（一）5x7x9=315...滿法

（二）（9x7）x7＝441.. 五數剩一之衰

（三）（9x5）x5＝225.. 七數剩一之衰

225x3=675.. 七數剩三之衰

（四）（5x7）x8=280.. 九數剩一之衰

280x2=560…. 九數剩二之衰

（五）（441＋675＋560）－315x5=101

本題有兩點需要加以說明：（一）依解法及答案表示，題目「九數剩一」應爲「九數剩二」；（二）七數剩三之衰用 45 即可，本題遵循求一法，即剩一，使數目變大。

第六題至第八題爲「河婦蕩杯」問題，此問題早期就出現於《孫子算經》之中，在《楊輝算法》及《算法統宗》中皆有類似題目，《東算抄》的佈題數據較複雜計有（3，4，5）、（3，4，5，6）、（2，3，4，5，6），但解題方式皆與中算相同爲：

[73] 此處乃指《孫子算經》的解法：「今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，問物幾何？」，其解法爲 N＝2x70＋3x21＋2x15-2x105=23 其根據爲 70=1（mod3），21=1（mod5），15=1（mod7），皆先求剩一之數。

P_iŒÂlŽg—pnŽí•¨•i ,‘¥每每人分別使 $\frac{1}{P_i}$ŒÂ•¨•i ,ˆêlŽg—p $\sum\frac{1}{P_i}$“…,

ˆê“…‰Â‹Ÿ÷ $\sum\frac{1}{P_i}$l—p ,$(i=1,2,3...,n)$

另於解題的過程中，做《算學啓蒙》術文中有「依圖佈算」之籌算式，「依圖佈算」是先把部分已知條件和題意寫出「圖」來，然後在此基礎上進行解題運算，就好比把各項條件置於眼前，時刻提醒在解題過程中需注意各項條件，這種方式可以使運算過程清晰與快速，東算家保存了籌算的優點，並加以發揚光大。反觀中國到明代後期，籌算漸淡出中算的歷史舞台。

在〈物不知總門〉中，筆者認爲最有創見的是第九題「合利問題」與第十題「攜酒遊春」問題，雖指涉的對象不同，但內涵是一樣的：

〔9〕今有曾貸銀不知其數，三次出外為商，每次合利而還銀一萬九千兩，本利恰盡，問原銀若干？

答曰：一萬六千六百二十五兩。

法曰：置還銀折半得九千五百兩，又加還銀折半得一萬四千兩百兩五十兩，又加還銀折半得原銀，合問。

又曰：列一、二、四並得七，以乘還銀，折半三次，合問。

又曰：置還銀以七乘之，以八除之，合問。

	本金	利息	還銀
第一次	x	x	19000
第二次	2x－19000	2x－19000	19000
第三次	2（2x－19000）－19000	2（2x－19000）－19000	19000

$$2[2(2x-19000)-19000]=19000$$
$$8x-4\times19000-2\times19000=19000$$
$$8x=7\times19000$$
$$x=\frac{7\times19000}{8}=16625$$

解法：

（一）

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{19000}{2}+19000\right]+19000\right\}=16625$$

（二）

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times (1+2+4) \times 19000 = 16625$$

（三）

$$\frac{7 \times 19000}{8} = 16625$$

解法二與解法三，已將此題解法一般化：若設原銀爲 A，出外 n 次，合利而還，還銀 M，則 $A = \dfrac{(2^n - 1) \times M}{2^n}$ 。

「攜酒遊春」問題，亦可利用此原理解題。

〔10〕今有人携酒遊春，不知其數，只云入市添一倍，逢朋飲六斗，今入適逢朋俱各四，壺乾酒盡，問原携酒若干？

答曰：五斗六升二合五夕。

解法：

（一）

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{6}{2}+6\right]+6\right\}+6\right\} = 5.625$$

（二）

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times (1+2+4+8) \times 6 = 5.625$$

（三）

$$\frac{15 \times 6}{2^4} = 5.625$$

可一般化爲：「今有人携酒遊春，不知其數，只云入市添Ｋ倍，逢朋飲Ｐ斗，今入適逢朋俱各ｍ，壺乾酒盡，問原携酒若干？」若原攜酒 W，則 $W = \dfrac{(K^m - 1) \times P}{K^m (K-1)}$ ，比之於《算學啓蒙》以盈不足術解題便捷許多。

3.4 目錄、凡例與卷之一內容結論

在本節，筆者將歸納整理前三節分析之結果，將目錄、凡例與卷之一內容做統整性的摘要說明，以讓讀者掌握清晰的架構。

3.4.1 目錄與凡例的特色

從目錄與凡例的編排內容來看，《東算抄》已不單只是問題的收集，已經有成書的預備動作，首先就目錄而言有如下幾點：

（1） 目錄的体例是模倣《算學啓蒙》，以「門」爲單元。
（2） 整體來看其名稱涵蓋《九章算術》、《算法統宗》、《詳明算法》、《算學啓蒙》。
（3） 由〈附啓蒙捷術〉可表示編者或作者應有參考《算學啓蒙》。
（4） 〈追錄〉未列於目錄之中，極可能爲後人所加。

其次，由凡例來看可做以下的歸納：

（1） 凡例比《算法統宗》、《算學啓蒙》精簡，不似給初學者研讀或做爲一般教科書之用。
（2） 「開方求廉率作法本源圖」可反映出東算家對解高次方程式的需求，圖之解說文字應是《算法統宗》、《算學啓蒙》之綜合。
（3） 「開方求廉率正負圖」，方向的改變是爲了方便與籌算運算方式對照，已表達出$(a-b)^n$的模式，此圖之來源應再探討。
（4） 由「百子圖」之結構與解說文字，應是直接參考《算法統宗》。

3.4.2 卷之一內容特色：

《東算抄》卷之一的內容勉強可說是書中較爲基本的問題，除了〈商功修築門〉、〈毬隻解隱門〉外，大部分是以各種比例問題爲主，換句話說是以「率」爲經緯。雖各門的名稱與《算學啓蒙》多有雷同，但對於題目分類的方式，有所差異，略嫌雜亂。例如：〈縱橫乘除門〉中就包含了等差級數、等比數列及其他比例問題。〈物不知總門〉的分類方式又與《算法統宗》相同，將孫子定理與河婦蕩杯問題擺在一起。

由卷之一內容中，筆者可以發現本卷的體例和內容的若干特色：

（1） 體例不一：本卷體例成多種形式，計有：

1.「今有」－「答曰」－「法曰」。
2.「今有」－「答曰」－「法曰」－「解曰」。
3.「今有」－「答曰」－「法曰」－「又曰」。
4.「今有」－「答曰」－「法曰」－「又曰」－「又曰」。
5.「今有」－「答曰」－「法曰」－「一法」。
6.「假如」－「法曰」。

（2） 充分掌握「率」的概念。
（3） 知道運用指數律：$a^m \times a^n = a^{m+n}$
（4） 一題多解：從不同的角度解題。
（5） 同一類型多種情境：綜合各家題型。
（6） 利用天元術解題。
（7） 不因襲固定公式或方法。
（8） 利用籌式，列出條件，依圖佈算，使運算加快及清楚。
（9） 對於等差數列、等比數列的性質非常熟悉，並有等差中項及算術平均數的概念。
（10）善用情境佈題。

從本卷〈之分齊同門〉中得知《東算抄》大約成書的年代，有助於我們對韓國數學史研究的完整性，及中韓數學交流情形的再認識。另外，天元術的使用，是一個值得探討的問題，東算家的「數學語言」相對於中算家的差異性何在？再者，從教學或解題的面向來看，多元思考、不同的解題途徑、抓住問題的核心，並注意佈題情境，這些皆可當作我們在數學教學時的策略。

另一個啓人疑竇的問題是，本卷出現的三個錯誤：四不等田面積、堤積問題、六角田面積，前兩者至少於楊輝時就已有更正，爲何仍誤用公式？四不等田的錯誤甚至於洪正夏的《九一集》仍未更正。六角田面積誤植爲菱形面積，但在卷之四〈問答〉部分，又能正確求出正四面體體積（先要求出正三角形面積）。這些問題都值得去探討。