數學解題中「亂中序」的趣味

許建銘

高雄市立龍華國民中學

一、前言：

我在電視節目上看到這個遊戲：在一張紙上畫了一個$3\times4=12$個方格的矩形，每個方格內又畫了一隻白兔或紅兔(如圖 1-1)。節目主持人要參加遊戲的人預先想定好任意一隻紅兔，但不能說出或指出哪一隻，然後依照主持人的指示步驟移動。

紅	白	紅	紅
白	白	白	紅
紅	紅	白	白

圖 1-1

步驟(1)：左右移動到最近的一隻白兔。

步驟(2)：上下移動到最近的一隻紅兔。

步驟(3)：斜線移動到最近的一隻白兔。

步驟(4)：左右移動到最近的一隻紅兔。

參與遊戲的人依循指示完成四次移動後，主持人竟然毫不猶豫指出最後的兔子是第二列最右邊灰底方格內的紅兔。

下面是一個美國人發明的遊戲：表演者事先準備八張由上而下寫好 6 個數字的紙卡(如圖 1-2)，然後任由參與者選擇其中的 N 張，再並排成 6 個 N 位數，表演者很快就可以算出它們的總和。(如圖 1-3 中，取 N=5 為例，即選出 6 個 5 位數求總和。)

7	3	5	4	8	7	0	9
4	2	6	7	9	8	7	5
5	9	3	7	1	5	1	8
2	1	2	2	3	3	2	3
4	3	4	1	4	4	9	7
3	1	3	6	6	8	2	6

圖 1-2

假設參與者選了如圖 1-3 的五張紙卡，且以隨意次序排成 6 個 5 位數，表演者很快就算得答案為 219751。

	3	4	7	5	0
	2	7	4	6	7
	9	7	5	3	1
	1	2	2	2	2
	3	1	4	4	9
＋	1	6	3	3	2
2	1	9	7	5	1

圖 1-3

兔子遊戲的設計原理由讀者自行揣摩，筆者僅解答數字紙卡的問題。原來任何一張紙卡上面的 6 個數字和，早已「索隱」在由下而上的第三與第四個數字組成的二位數。只要將這幾個二位數的十位數字的位值全部升值 10 倍(如圖 1-4)，就可輕而易舉算出正確的總和。

$$
\begin{array}{r}
9\ 7\ 5\ 3\ 1 \\
+\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2 \\
\hline
2\ 1\ 9\ 7\ 5\ 1
\end{array}
$$

圖 1-4

「控制論」的創始人 Norbert Wiener(1894—1964)被喻成一位神童，他在 18 歲的時候，就獲得哈佛大學的數理邏輯博士學位。這位天才在頒授博士學位的儀式上發生一件有趣的事情，當時哈佛大學的校長問他幾歲，Norbert Wiener 不愧是數學天才，竟然機巧地回答:「我的年齡的立方是一個四位數，四次方是一個六位數，而這兩個數恰好使數字 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 全部都用上。」沒想到這個年齡妙題，立即引發人們在會場上熱烈討論。

因爲 $21^3=9261$，$22^3=10648$，所以說 Norbert Wiener 最多 21 歲；又 $18^4=104976$，而 $17^4=83521$，所以 Norbert Wiener 至少有 18 歲。由此推得他的年齡只會是 18、19、20、21 這四個數的其中之一。我們再對這四個數進行驗算與篩選：由於 $20^3=8000$；$19^4=130321$；$21^4=194481$，都不合每個數字必須恰好出現一次的條件要求，所以最後只剩下 18 了。而且 $18^3=5832$，$18^4=104976$，剛好把 10 個阿拉伯數字 0~9 全部用了一遍，所以 Norbert Wiener 就是 18 歲了。

一個特殊問題的研發，除了原設計者外，應該很少人能夠真正了解問題背後的創作泉源或靈感，大概也只有 Norbert Wiener 才知道是怎樣的經驗累積甚至電光石火，讓他有緣覺察到 18 的三次方與四次方有著如此美麗的巧遇。

一個看似混沌複雜的情節裡，可能蘊藏著永恆的結果；一個原本依靠單純理由就可以真相大白的謎底，若不慎受到表象迷亂，可能因此失去破題的契機……就是這種直覺與執著，讓許多解題者即使一時解不出問題，也不會洩氣失望，甚至愈挫愈勇、流連忘返，一旦被他弄懂解開了，解題者會不禁讚嘆「造物者」心思的神奇。

基於上述的理由，筆者認爲一個夠大眾化、值得玩味再三的數學遊戲，除了具備很簡單的操作法則，以及親和力很強的遊戲目標外，應該還要帶給遊戲者「亂中有序」的真情感動，這不只是遊戲本身的設計重點，也是遊戲在教育上很重要的意義和貢獻。

二、本文：

(一)遊戲名稱：佳偶天成。

1.預期效果：

表演者從其背後一次抽出兩張同點數的紙牌共 13 份。

2.準備事項：

點數 1~13 的紙牌一黑一紅各 2 張，而且 26 張牌的首部 13 張與尾部 13 張的點數排列次序相同，例如：7，A，11，9，8，3，Q，4，2，5，K，6，10，7，A，11，9，8，3，Q，4，2，5，K，6，10。(一疊紙牌的牌面朝上或朝下時，包含最上面一張而不包含最下面一張的連續紙牌，可稱之爲「首部」；反之，包含最下面一張而不包含最上面一張的連續紙牌，可稱之爲「尾部」。)

3.演示步驟：

(1)表演者將 26 張事先排好次序的紙牌打開成扇形，讓參與者約略看過後再收成原狀。

(2)進行「洗牌」：紙牌背面朝上，將尾部的一些牌不改上下次序放置於首部，反覆進行多次相同動作。

(3)將紙牌背面朝上並拿到自己背後，由首部數 13 張牌(但不改變上下次序)，再翻轉整疊 13 張牌成背面朝下，然後放置於 13 張背面朝上的牌堆下方。

(4)表演者從背後同時抽出整疊牌的最上面與最下面各一張牌，並使它們合成背面朝外的一對牌，然後置於桌上。

(5)快速重覆如(4)的動作，直到 13 對同點數的紙牌全部分散置於桌上，並通過參與者一一檢驗。

4.原理解說：

(1)將尾部的一些牌放置成首部的「洗牌」方式，並未改變紙牌的環狀排列關係(如同坐摩天輪)。

(2)無論經過多少次的「假洗牌」，由首部往下數的第 k($k<14$)張牌必定與第 k+13 張同點數。

(3)將尾部 13 張紙牌整疊翻轉成背面朝下，將使這些牌成反序排列。也因此整疊 26 張牌的首部第 k($k<14$)張必定與尾部倒數第 k 張同點數。故本演示得證。

(二)遊戲名稱：雙色好合。

1.預期效果：

找出各種收牌法，使得桌上的四疊牌若以某疊爲首收成一疊後，由首部連續發出兩張一組的牌中，必有一紅一黑。

2.準備事項：

(1)一副 52 張的紙牌。

(2 撿一份背面朝上、上紅下黑、紅黑交錯的牌共 26 張。

(3)撿一份背面朝上、上黑下紅、黑紅交錯的牌共 26 張。

3.演示步驟：

(1)表演者將兩份 26 張的紙牌背面朝上分置於桌面的右側(右上方與右下方)。

(2)從兩份牌的首部各取任意張數的牌置放至桌面的左側，使桌面上有四疊牌(如圖 2-1 中，右上方 A 疊、右下方 C 疊、左上方 B 疊、左下方 D 疊)。

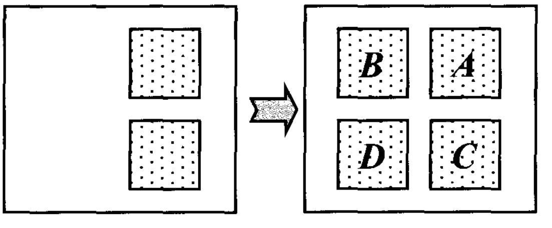

圖 2-1

(3)表演者請參與者找出各種收牌法，使得以 B 疊爲首所收成的一疊牌，由首部一次連發兩張牌都有一紅一黑。

4.參考解答：

①B＋A＋D＋C；②B＋A＋C＋D；

③B＋D＋C＋A；④B＋D＋A＋C。

5.原理解說：

(1)B＋A 與 D＋C 這兩疊牌皆有 26 張。

(2)一疊紅黑交錯排列的紙牌，若張數有偶數張，則首部第一張牌與尾部最後一張牌(以下簡稱「頭尾牌」)異色，即使經

過多次的「假洗牌」，也會雙色成對；若張數有奇數張，則頭尾牌同色。

(3)A＋B、B＋A 的環狀排列關係相同；C＋D、D＋C 的環狀排列關係相同。

(4)由(1)、(2)、(3)可推得①與②的收牌法能達成遊戲效果。

(5)無論多少疊偶數張且雙色成對的牌堆相疊，也會達成雙色成對的效果。

(6)B 疊牌有偶數張的情況：

由 B＋D＋C＋A ＝B＋(D＋C)＋A 與第(5)點推得③的收牌法可以達成效果。若 D 疊也有偶數張牌，由第(5)點推得④B＋D＋A＋C 顯然成立；若 D 疊有奇數張牌，此時 D 疊的頭尾牌同色(同令爲正)，C 疊的頭尾牌同色(同爲負)，A 疊的頭尾牌異色(分別爲負、正)，也可推得④B＋(D＋A＋C)成立。

(7)B 疊牌有奇數張的情況：

若 D 疊也有奇數張牌，此時 D 疊的頭尾牌同色(同令爲正)，C 疊的頭尾牌同色(同爲負)，B 疊的頭尾牌同色(同爲負)，A 疊的頭尾牌同色(同爲正)，可推得③B＋D＋C＋A 與④B＋D＋A＋C 成立。

若 D 疊有偶數張牌，此時 D 疊的頭尾牌異色(令分別爲正、負)，C 疊的頭尾牌異色(分別爲正、負)，B 疊的頭尾牌同色(同爲負)，A 疊的頭尾牌同色(同爲正)，可推得③B＋(D＋C)＋A 與④(B＋D＋A)＋C 成立。

(8)本演示得證。(③與④可另參考圖 2-2 與圖 2-3)

情況＼疊	B	D	C	A
偶偶偶偶	負正	正負	正負	負正
偶奇奇偶	負正	正正	負負	負正
奇偶偶奇	負負	正負	正負	正正
奇奇奇奇	負負	正正	負負	正正

圖 2-2

情況＼疊	B	D	A	C
偶偶偶偶	負正	正負	負正	正負
偶奇偶奇	負正	正正	負正	負負
奇偶奇偶	負負	正負	正正	正負
奇奇奇奇	負負	正正	正正	負負

圖 2-3

(三)遊戲名稱：反轉乾坤。

1.預期效果：表演者找出參與者所抽到一張牌。

2.準備事項：一副 52 張的紙牌。

3.演示步驟：

(1)表演者請參與者從一副背面朝上的紙牌中隨意抽出一張，記好點數和花色後，將它放在桌上，但不能讓表演者看到這張紙牌的正面。

(2)表演者將其它的紙牌背面朝上收成一疊(令爲 A 疊)置於桌上另一處。

(3)表演者請參與者任取 A 疊首部 k(k<10)張紙牌，先數清張數，再把它們放在口袋或藏起來，但整個演示過程中表演者不知道 k 的大小。

(4)表演者背向參與者，請參與者將剛才抽的一張牌放置於 A 疊首部第 k 張牌之後(即首部第 k+1 張牌的位置)。

(5)表演者將 A 疊牌拿至自己的背後，並請

參與者任意講出一個大於 k 的數(令爲 m)。

(6)表演者將 A 疊首部的 m 張牌作反序排列(但不改變任何一張牌的牌面方向)，再將這 m 張牌置成 A 疊首部(以上的動作，參與者並不知情)，完成後把 A 疊牌拿至桌面放置。

(7)表演者請參與者將口袋或藏起來的那 k 張牌加在 A 疊牌的上方。

(8)表演者只要抽 A 疊首部數第 m 張牌，它就是參與者原先抽到的牌。

4.原理解說：

(1)完成演示步驟(3)時，參與者所抽的牌在 A 疊首部第 k+1 張牌的位置，但經步驟(6)A 疊首部的 m 張牌反序排列後，參與者所抽的牌將成爲 A 疊首部的第 $m-(k+1-1)=m-k$ 張牌。

(2)再由演示步驟(7)將口袋或藏起來的k張牌加在 A 疊牌的上方，參與者所抽的牌將成爲 A 疊首部第 $m-k+k=m$ 張牌的位置。

(3)本演示得證。

(四)遊戲名稱：四花齊放。

1.預期效果：

表演者將重新安排的一副牌，由首部一次連發四張牌，每次都有四種不同的花色。

2.準備事項：

將 52 張紙牌的四種花色分開置放成四堆，再依一張黑桃，一張紅心，一張鑽石，一張梅花的次序，收成一疊。

3.演示步驟：

(1)表演者將整疊牌背面朝上置放桌面。

(2)表演者每次由整副牌的首部取一些牌，由左向右置於桌上，最後共分置成四疊(如圖 2-4，分別令爲 A、B、C、D)。

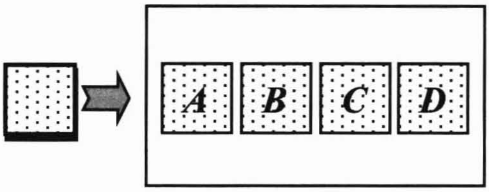

圖 2-4

(3)將 A 疊牌反序排列成 $\overline{A}$ (不改變牌面方向)，置入 B 與 C 兩疊牌之間；D 疊牌反序排列成 $\overline{D}$，置入 $\overline{A}$ 與 C 兩疊牌之間，再由左向右，由上而下將四疊牌收成一整疊(如圖 2-5)。

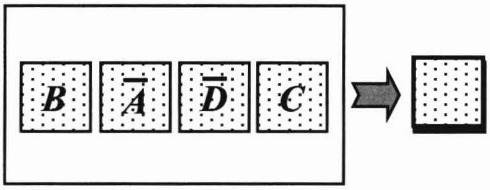

圖 2-5

(4)表演者將整疊牌由首部發牌，一次連發四張牌必不同花色。

4.原理解說：

(1)若 B 疊的張數爲 4 的倍數，則 $B+\overline{A}$ 由首部發牌，四連張必不同花色。

(2)若 B 疊的張數不爲 4 的倍數，假設由首部連續四張一數的剩餘牌有 k 張，也就是四種花色中將少了 4-k 張其它花色的牌，且與原 A 疊尾部的 $4-k$ 張牌同花色。而今 A 反序置於 B 疊之後，恰使 B 疊尾部 k 張牌與 A 疊尾部 $4-k$ 張牌(即

$\overline{A}$ 首部 $4-k$ 張)連成 4 張不同花色的牌。

(3)由(1)和(2)的推論可得：由 $B+\overline{A}$ 的首部發牌，四連張必不同花色。

(4)若由 $\overline{D}+C$ 的尾部逆向看牌，同前三個步驟的推理可得，四連張也不同花色。

(5)若 $B+\overline{A}$ 的張數爲 4 的倍數，則整副牌由首部發牌，四連張必不同花色。

(6)若 $B+\overline{A}$ 的張數不爲 4 的倍數，則由首部連續四張一數的剩餘牌(假設有 p 張)，恰與 $\overline{D}+C$ 的首部 $4-p$ 張牌連成 4 張不同花色的牌，所以整副牌由首部發牌，四連張必不同花色。

(7)由(5)和(6)本演示得證。

(五)遊戲名稱：龍據四方。

1.預期效果：

表演者將經過事先安排的一副牌，交由參與者作一次彈疊洗牌後收成一疊。表演者由首部一次連發 13 張牌，每次都有 13 種不同的花色(一條龍)。

2.準備事項：

一副 52 張的紙牌。首部 26 張牌的前 13 張與後 13 張的點數排列次序相同，例如：7，A，11，9，8，3，Q，4，2，5，K，6，10；7，A，11，9，8，3，Q，4，2，5，K，6，10。而尾部 26 張牌的點數排列次序爲首部 26 張的反序排列。

3.演示步驟：

(1)將 52 張事先排好次序的紙牌打開成扇形，讓參與者約略看過後再收成原狀。

(2)表演者將整副牌的首部 26 張與尾部 26 張分開成兩疊(也就是從兩張 10 點的紙牌之間分開)。

(3)表演者請參與者左右手各持一疊牌(背面朝上)，並作任意彈疊洗牌一次。(彈疊洗牌：左右手各持一疊牌，在不改變每疊牌原先次序的情況下，讓兩疊牌互嵌成一疊。)

(4)表演者收好經洗牌後的整疊牌，再由首部一次連發 13 張牌，每次都有 13 種不同的花色。

4.原理解說：

(1)如果洗牌後，左右手的兩份牌僅放置成一上一下的一疊牌，此情況已完成問題的要求。

(2)如果洗牌混成一疊後，這疊牌首部的 26 張牌(令爲 A 疊)中，混入原先右手的 k 張牌，則必然有原先左手持牌的尾部 k 張牌夾落至整疊牌尾部的 26 張牌(令爲 B 疊)中。由於左右手所持的兩份牌成反序排列，可推得混入 A 疊與退至 B 疊的這 k 張牌點數完全相同。所以 A 疊的 26 張牌中，1 點至 13 點的每一種牌都有兩張。

(3)令 A 疊牌首部的 13 張牌爲 C 疊，A 疊牌尾部的 13 張牌爲 D 疊。如果洗牌後，C 疊混入原先右手的 p 張牌，則必然有原先左手持牌的首部 13 張牌當中的 p 張牌(當然在這 13 張牌的尾部)，會夾落至 C 疊下方的 39 張牌中。由於左右手所持的兩份牌成反序排列，可推得混入 C 疊與落至 C 疊下方的這 p 張牌點數完全相同。所以 C 疊 13 張牌中有 13 種不

同的點數。

(4)由(2)和(3)可得知整疊牌的首部 26 張牌，由上而下 13 張數成一份，則每一份牌有 13 種不同的點數。

(5)如果將彈疊洗牌後的整疊牌反過來放置，並如同(1)~(3)的思考方式進行討論，就可推得整疊牌的尾部 26 張牌，如果由上而下 13 張數成一份，也是每一份牌有 13 種不同的點數。

(6)本演示得證。

(六)遊戲名稱：水落石出。

1.預期效果：

表演者將參與者選出的一張牌安置於任意張數的一疊牌中，且使牌疊背面朝上。然後逐漸減少手中紙牌的張數，最後僅剩參與者所選的一張牌。

2.準備事項：一副 52 張的紙牌。

3.演示步驟：

(1)表演者請參與者從一副紙牌中隨意取 n 張紙牌($n>2$)，並告知 n 的大小。

(2)表演者請參與者再從 n 張紙牌中隨意抽出一張，記好點數和花色之後交給表演者。

(3)整疊牌背面朝上。假設 $n=2^a+b$ （ $a\in N$ ， $0<b\le 2^a$ ），表演者將參與者所選的牌安置於牌疊首部第 $2b$ 張的位置。

(4)由首部最上方開始，重覆進行減牌動作：拿掉一張後再把一張放到牌疊尾部最下方。

(5)當手中只剩下一張牌時，翻開此牌即爲參與者所選之牌。

4.原理解說：

(1)若 $b=2^a$ ，則 $2b=2^{a+1}$ 。也就是說參與者所選的牌被放置於牌疊的最後一張。則當「把一張拿掉，再拿一張放牌疊尾部最下方」的減牌動作進行完第一輪之後(總共動了 2^{a+1} 張牌)，所選之牌會落在第 2^a 張的位置。減牌動作不斷進行，所選的牌將會出現在第 2^{a-1}……2^1 、 2^0 的位置，所以翻開最後剩下的一張牌即爲參與者所選之牌。

(2)若 $0<b<2^a$ ，則當減牌動作動了 $2b$ 張牌之時，牌疊的張數恰剩下 2^a 張，且所選之牌也正好位於第 2^a 張(尾部最後一張)的位置。由(1)的討論結果可以推知：減牌動作持續進行到剩下一張牌時，它就是參與者所選之牌。

(3)本演示得證。

(七)遊戲名稱：接二連三。

1.預期效果：

表演者請參與者設計未搭成的牌，而搭成「完全牌」的標準是指當桌面上出現或自己抽到某一張紙牌時，會使自己手上的所有持牌加上這張紙牌後，符合「接二」與「連三」的條件：

①接二：兩張同點數的紙牌。

②連三：扣除「接二」的兩張紙牌外，其它的紙牌必須恰好分成多組三張點數相同或三張點數成連續整數的紙牌。

2.準備事項：

每位參與者準備一副紙牌中所有點數 1 至

9 的 36 張紙牌。

3.演示步驟：

表演者請參與者以這 36 張紙牌爲限，且不必考慮已被認定爲搭好的牌(亦即這些牌沒有任何調整搭配的必要或打算)，分別設計未搭成的牌：

(1)四家未搭成的牌：各家都不清楚其它三家手上的持牌，但每一家都只在期待出現 3 點或 4 點的牌，如果各家的未搭牌(每一家的未搭牌張數未必相同)加入這兩張牌的任何一張，都可以搭成「完全牌」。

(2)一家未搭成的牌：使未搭牌加入點數 1 至 9 的任何一張牌，都可搭成「完全牌」。

4.參考解答：

(1)四家未搭成的牌分別爲(甲)3344；(乙)3555；(丙)2224；(丁)4567888。

(2)未搭成的牌爲 1112345678999，其加入點數 1 至 9 後搭成的「完全牌」分別爲：1→111、123、456、789、99；2→111、22、345、678、999；3→11、123、345、678、999；4→111、234、456、789、99；5→111、234、55、678、999；6→11、123、456、678、999；7→111、234、567、789、99；8→111、234、567、88、999；9→11、123、456、789、999。

三、結論：

「五斗櫃」由五個大小相同的長方體抽屜組合而成，主要作爲收納衣服之用。如果平日將衣服做好分層整理，即使在短時間內，也很容易找到想找的衣服。如果只是粗枝大葉的收拾，甚至亂七八糟的充塞，相信有時找衣服的時間會大大多於穿衣服的時間。如果急著找衣服，卻完全不知道衣服放在那一層，這時開抽屜的方式就大有學問了。

如果由上往下一層一層開出來找，那麼要開出某一層抽屜時(除了最上層的抽屜以外)，就得先將它的上一層抽屜關進去，否則即使把它開出來，也可能看不到或根本拿不出抽屜裡的衣服。如果任意選個抽屜開出來找呢？那問題更大了，除了可能遇到和上一種開抽屜方式所碰到的問題外，這種亂槍打鳥的方式，還可能造成某幾個抽屜被開過兩次以上，而某一個抽屜根本沒被開過的烏龍事件。

如果由下往上逐層來找，我們看看到底會有什麼不同。當我們開出一層抽屜並找過一遍之後，如果想再開它的上一層抽屜，根本不必急著關進這層抽屜，就可直接把上一層抽屜開出。而且依照這種順序一層一層找上來，如果還找不著想要的衣服，就可以由上而下逐層再找一遍，仔細找過之後，就順便將抽屜由上而下關進去。

我常跟學生提到這種「開抽屜」經驗，除了讓學生分享「亂中有序」的趣味外，也想藉此教導學生「因『勢』制宜」與「循序漸進」的數學學習方式與態度，並期望它對學生的做人處事會有所幫助。

【附註】感謝台灣師範大學洪有情教授暨其他編審，細心審定並熱心指導筆者投稿的文章，謹此表示敬意和謝意。