國立臺灣師範大學數學系博士論文

指導教授： 謝豐瑞 博士

臺灣與美國中學數學職前教師之數學語言相關教學思維及能力探討

研 究 生： 王婷瑩 撰

中 華 民 國 一〇二 年 一 月

謝誌

我的指導教授 – 謝豐瑞老師，在我讀博士班的期間，以知識將我扶養成人，她帶我進入數學教育的世界，體會數學教育領域中的各種思想；她也開拓我的視野，提供我參與國際研究的經驗，領我見識數學教育領域大師的思維。Schön（1983）認為有一種知識為實踐的知識，是一種無聲的知識，這種知識會在我們解決一個問題的過程與方法中展現出來，但我們卻無法去描述它。我對我的老師心存無限的感激，雖然我無法描述它，但我期許我的感謝，能化為實踐的感謝，在我往後的行為中展現出來，以報答她對我的諄諄教誨。

謝謝口試委員提供給我許多關於論文的建議，讓我的論文能更趨良好。特別是羅昭強老師與施皓耀老師，他們不僅是我的口試委員，也啟發我很多想法，我沒有修過他們的課，但他們卻是我最真的老師。如果謝豐瑞老師是我的嚴父，羅老師必是慈母，一個人該怎麼謝謝他的母親，我想，那就是我該謝謝羅老師的態度與方式。施老師將自己豐富經驗、深入思考後，所得關於各種數學知識、數學思維的串連與結構，大方、不吝惜地教給我，提供我打通數學上任督二脈的機會。

謝謝和我一同奮鬥到最後的 118 末日同袍 – 志瑋與嵐婷，謝謝時時關心我的好學弟 – 世偉，綠色的液體和在新加坡晚上收到的問候會永遠在我的記憶裡，也謝謝所有一同協助口試進行的學弟、妹，他們無私的付出讓我能無後顧之憂。

謝謝讓我待了十數載的師大數學系，它已經成為我人生中不可捨去的重要組成。

摘要

本研究探討臺灣與美國中學數學職前教師數學語言相關教學思維，以及兩個國家職前教師在數學語言相關教學能力上的表現。

研究樣本為兩個國家在數學師資培育跨國研究（Teacher Education and Development Study in Mathematics, TEDS-M）樣本的子集（sub-sample），由臺灣、美國分別在其全體樣本中隨機抽出，共有 161 名臺灣中學數學職前教師、172 位美國中學數學職前教師參與研究。

本研究發現，兩國職前教師思維中能連結到之文字敘述數學語言的特徵，都是較為一般性、整體性的描述，例如，抽象、冗長等，並不能做更深入、考量語句組成的分析。然而，分析他們實際提供給學生語句時，卻可發現他們認為學生易理解的語句應具有較程序性，例如，以運算動作取代大量名詞化、提供可操作之具體物件，較低數學專門用語的使用量，較口語化，訊息進展速度較緩慢等等特徵。本研究發現在數學語言相關教學能力表現上，臺灣職前教師在「執行」及「推理與判斷」方面較美國職前教師優異，而兩個國家在「執行」方面的表現都優於「推理與判斷」方面的表現。上述教學思維與教學能力的現象都反映出職前教師思維中所連結的概念，乃屬於 Schön（1983）提出無聲的（tacit）、實踐的知識（practical knowledge）。

在數學語言相關教學能力表現上，本研究也發現，兩個國家的職前教師在思考影響學生理解數學語言的因素時，都缺乏能從數學語言角度切入分析的能力，尤以美國更為嚴重。臺灣職前教師表現並非皆優於美國，在選用能培養學生數學語言能力的教學活動上表現即較美國差，且有相當高比例職前教師僅聚焦於數學概念而非數學語言的培養。

此外，職前教師在描述其想法時，用詞侷限，不能明確、精準使用數學教育中使用的專門詞彙，從 Skemp（1987）的角度，職前教師數學教育

中的概念與承載它的語言連結，職前教師便能自由控制自己思想、與他人溝通，也能促進新概念的形成，職前教師關於數學教育中詞彙的使用乃反映其在師資培育學程中的培養情況（Blömeke et al., 2008），故而此現象值得師培界考量。

關鍵字：數學語言、數學教學能力、數學教學思維、國際比較

目錄

表目錄

圖目錄

第一章　緒論

第一節　研究動機

數學中，定義數學概念時使用的是語言，表徵數學想法時使用的是語言，連結不同的數學表徵時使用的也是語言（Han & Ginsburg, 2001），而在數學溝通中，無論是個體腦中自己與數學的溝通、個體與數學材料的溝通、個體之間的溝通，都需要語言的參與。這樣的看法，可用 Zevenbergen（2001）說過一句話來貼切形容，

「數學極奠基於語言」（mathematics is very language-based）。

以傳遞數學的角度來看，語言是舉足輕重的。Corson（1985，引自 Ellerton & Clarkson, 1996）曾指出，所有形式的知識都是透過語言傳遞的。數學當然也不例外。在數學課堂中，教師使用語言以對學生描述數學公式，定義新的數學概念，組織數學概念，也藉由語言對學生提問以促進學生思考（Han & Ginsburg, 2001）。幾乎所有課堂活動，都需要語言的參與，語言是教師傳遞數學、與學生溝通數學的重要媒介。

一般而言，教師進行數學教學時，會同時使用形式化的數學用語與非形式化的教學用語（Gough, 2007）。因此，學生在學習數學時，常常需要同時接觸數學符號與自然語言，他們必須在這兩種語言交互作用的複雜數學活動中進行運思與詮釋（Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998）。並且，這些語言常常包含數學中具有特殊意義的詞彙、數學符號，或以日常生活中少用的語法結構呈現，許多研究指出這些因素都影響著學生的學習（Carter & Dean, 2006; Marr, 2000; Warren, 2006; Zevenbergen, 2001）。

學生在這樣的環境中存活了嗎？

吳秀萍（2004）在其教學的過程中，發現學生對她使用的數學語言，特別是以文字敘述為主的數學語句，不甚瞭解，為此，她進行了探測臺灣中學生數學語言理解的研究，並發現一些很有趣的結果。例如，含有「垂直」的語句，即使是單純的、型如「…垂直…」的語句，學生都有理解問題。她所研究的臺灣中學生中，面對「直線 L 垂直直線 M」時，有近九成的學生認為恰當，學生看似理解「垂直」這個數學詞彙，也理解此類語句。然而，令人驚訝的是，他的研究中，有近五成的學生認為「A 點垂直直線 L」是恰當的敘述，更有超過五成的學生認為「A 點垂直 B 點」是恰當的敘述，我們能說，學生對「垂直」這個數學詞彙真的理解了嗎？吳秀萍的研究指出，學生對「垂直」的理解並不完全，他們的問題出現在數學語言上，不能判斷語詞與另一個語詞組合時的恰當性，他們對「垂直」的關係含意理解是有問題的。

我們不禁好奇，有多少數學教師像她一樣，能知道學生連基本的「垂直」之關係含意理解都有問題？數學教師在使用數學語言時，特別是針對文字敘述為主的數學語句，能覺察學生有理解上的困難？數學教師們會思考什麼樣的原因使得學生理解數學語句有困難嗎？又有多少數學教師能覺察學生有使用數學語句的困難，而在安排教學活動時特別關注培養學生這項能力？故此，本研究將特別針對以文字敘述為主的數學語句，探討數學教師數學語言相關教學能力具備情況為何。

謝豐瑞（2012a）認為，參與跨國研究可使參與的國家檢視、比較自己本國與其他參與國之狀況，得到與單一國家研究不同的參考基準與反思角度。故而，任何一個可與其他國家比較的研究機會，都應把握。在參與數學師資培育跨國研究（Teacher Education and Development Study in Mathematics, TEDS-M）的過程中，我們得到與美國合作進行 TEDS-M 延伸研究（associative study）的機會，藉此機會，我們進行了臺灣、美國中學數學職前教師數學語言相關教學能力的比較。

此外，本研究亦欲藉此與美國合作研究的機會，探討職前教師的思維，因為文化活動（cultural activity）在一個社會中的變異是很受限的，這些活動的現象，對該社會中的人而言，既顯而易見（transparent）又難以察覺（unnoticed; Geertz, 1984）。教學乃是文化活動之一（Stigler, Gallimore, & Hiebert, 2000），教師身為這項活動中的重要角色，對教學中的數學語言，有什麼思維？我們相信，在與其他國家比較之下，思維的特徵將更為凸顯。藉由此研究機會，在探討、比較兩個國家職前教師數學語言相關教學能力的同時，我們也獲得對兩國職前教師數學語言相關教學思維進行探討與比較之機會，從而瞭解他們對於教學中的數學語言有何共同或相異的思維。

第二節　研究目的暨研究問題

研究目的

本研究之研究目的在於探討臺灣與美國職前教師的數學語言相關教學思維，以及兩個國家職前教師在數學語言相關教學能力的表現。

研究問題

1. 臺灣與美國職前教師有何數學語言相關教學思維？兩個國家職前教師思維有何異同？

（1） 對文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制之思維

（2） 對學生知能、教學活動、文字敘述數學語句在教學中的機制之思維

（3） 對學生知能在文字敘述數學語句之組成與特徵的機制之思維

2. 臺灣與美國職前教師在數學語言相關教學能力的表現如何？有何異同？

（1） 能選擇應教給學生的數學語言之教學能力

（2） 能選擇應教給特定數學程度學生的數學語言之教學能力

（3） 能使用學生可以理解的數學語言之教學能力

（4） 能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動之教學能力

（5） 能判斷影響學生理解數學語言的因素之教學能力

（6） 能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素之教學能力

第三節　名詞界定

數學語言

做數學或溝通數學時，針對該數學內容會使用之語言，包含數學使用（借用）的詞彙、短語、語句與符號，以及僅在數學中使用的詞彙、短語、語句與符號。也包含這些詞彙、短語、語句與符號的組織方式、組織結構。在傳訊方式上，包含口頭方式與書面方式。

其中數學使用（借用）是指選取之語義為數學中界定之語義，可能與在自然語言之使用時相同或不同。

數學語句

本研究在許多地方會使用到「數學語句」一詞，以特別指定並非廣泛的探討數學語言，而是要探討其中的某特定範疇。

數學語句是數學語言中的一種，但在本研究中界定其為僅在數學中使用且以文字敘述為主的語句，例如，教科書中用以描述數學定義、性質、運算法則等之語句。

雖然數學語句的界定為「僅在」數學中使用的語句，但有些語句，或其中所含的詞彙與符號，在現今生活中已被借用。例如，曾出現過取名為「X」的飲料或電視影集「X 檔案」，即是借用符號 x 在數學中未知數的概念，用以表示未知的事物。或是有時候其他同學考試考得不好時，我們會開玩笑說「他的分數是 ε 」，即是借用符號 ε 在數學中常用以表示很小的正數之想法。或是跟開車者報路時，說「走下一條和這條平行的路」這樣含有數學語詞「平行」的語句，即是借用「平行」的語義，但並非真的指兩條路的距離處處相等或永不相交等，而僅是取該語詞中所含並排、並行的想法而已。

另外，當教師在數學教學中，有時會使用如「這個圖畫的邊緣跟這個天花板的邊緣平行」這樣只含有一個「僅在數學中使用的詞彙」，即「平行」，而其他皆屬於自然語言之詞彙的語句。當這樣的語句在教學中出現，即符合在做數學或溝通數學時出現的詞彙、短語、語句與符號這個界定，並且為僅在數學中使用的語句，故本研究亦將之界定為數學語句。

數學語言相關教學思維

教師面對教學情境所呈現與數學語言相關的問題時，連結腦中的既有概念、經驗，經過感覺、知覺、表象、判斷、推理，而進行形式輸出的歷程。

數學語言相關教學能力

以「執行」與「推理與判斷」兩個數學教學能力運算作用於數學教學元素「數學語言」上，所展生出的數學教學能力。

第四節　研究限制

本研究欲探討臺灣、美國職前教師在數學語言相關教學能力上，表現有何差異。為了能使比較的結果具有代表性，故而選擇搭配 TEDS-M 研究的抽樣。此外，研究對象為職前教師，屬成人研究，資料蒐集上頗具挑戰性，無論是請職前教師來進行填答，或要求職前教師提供一段夠長的填答時間等，都有其困難度，加以能協助施測的人力、經費上的也有所限制，本研究選擇搭配 TEDS-M 的施測。

如此一來，職前教師已接受 TEDS-M1.5 小時之施測的現況，必須納入本研究的考量中。在受限於這些因素下，又為了能盡量確保職前教師填答之有效性，本研究只能設計職前教師可在三十分鐘內完成的問卷，選擇部分從文獻來看頗具價值的面向、數學教學能力進行探測，故而探測的能力上有其限制。

在題型的設計上，雖然開放性問題能提供我們相當豐富的資訊，讓我們除了知道職前教師的教學能力外，也能深入瞭解職前教師的教學思維，但考量職前教師進行 1.5 小時 TEDS-M 施測後的腦力與意願，本研究僅能選擇挑選出部分能力，以開放性問題探測。

臺灣、美國的國情不同，關於職前教師數學語言相關教學能力，美國 TEDS-M 研究團隊的興趣與考量可能與本研究不同，本研究題目設計完成後，還經過美國 TEDS-M 團隊的挑選，兩國皆有意願施測的題目上才得以施測、比較。

此外，在 TEDS-M 的經驗中，我們知道國際比較所探測的內容不能過於複雜或細緻，在分析時，製作的編碼也不能過細，過細的探測項目與分析類別，會造成比較的困難，往往也不是國際比較的興趣。因此，我們在探測能力的選擇與題目的設計上，必須考量美國的情況、意願、興趣，與美國達成共識，這也是造成探測的能力有所限制的原因之一。

由於要求職前教師前來接受訪談的方式亦不甚可行，故而，僅能就已蒐集到的問卷資料進行分析，無法做進一步向職前教師探詢。

本研究建議，讀者在推論、應用本研究之結果時，應審慎為宜。

第二章　文獻探討

第一節　語言

人類的發展使得僅對其環境中的刺激進行回應（react to）不再足夠，而必須要瞭解（know）其環境，在此需求之下，人類發展出可以幫助他們進行理解其環境的活動之工具 – 符號（symbol）。而符號的基本功能是表徵（represent）出指涉物（referent），指涉物可能是一個物件（object）、一個概念（concept），或是一個思想（thought）（Werner & Kaplan, 1964）。人類發展出許多不同符號系統，例如：人類的口頭語言、文字等符號，其中包含日常生活使用的自然語言，也包含因應某些學科發展而產生的符號，如：「+」、「×」、「√ 」等數學符號。然而，有些學者對符號有較為廣義的界定，他們認為圖形、圖表，或動作、手勢也屬於符號。許多學者認為，語言是人類使用的符號中，相當重要的一種，是聲音與意義結合的符號（葛本儀，2002；Scheffler, 1997; Werner & Kaplan, 1964）。

一、語言學的發展與語言的界定

語言學的發展，最早可追溯到古希臘時代，但相關的研究工作至今仍方興未艾。不同時代、不同哲學觀、不同派典的研究者進行研究時，在語言領域中，針對的主體不盡相同。而對其研究中所謂的「語言」，也分別提出不同的界定。

古希臘時代的語言學是在哲學的範疇中展開的，希臘人對語言的問題進行兩場論戰。第一場是本質（nature）與約定（convention）的論戰，針對語詞（word）與詞義之間的關係分成兩大派別，一派認為語詞與詞義間的關係乃是基於語詞的形式（form）與其意義在本質上存在的密切關係，即語詞的形式反映其所代表事物的本質；另一派則認為語詞與詞義間的關係是約定俗成的，語詞可以任意改變，只要此改變為人們所接受。雖然這

場論戰沒有結論，卻促進了語詞的結構、意義、形式化模式（formal patterns）的深入研究。第二場是規律（regularity）與不規律（irregularity）的論戰，針對語詞之形式變化的規律性，以及語詞之形式與語詞之意義間關係的規律性。其中一派認為語詞的形式變化具有規律性，即語法狀況（grammar status）相同的語詞會有相同型態的字尾及相同的重音結構，而形式類似的語詞則會有「可類推」（analogical）的意義，反之亦然，另一派則認為語詞的形式變化、語詞的形式與語詞的意義間關係不具規律性。雖然該論戰也沒有結論，卻對語法的理論提供了重要貢獻。古希臘時代的語言研究，最主要的貢獻也就在語法（grammar）上。Plato 將語句（sentence）劃分出名詞性成分與動詞性成分。Aristotle 接受此分法，但又劃分出第三類成分，此類即後來 Dionysius 劃分的連詞、冠詞、代詞。Dionysius 劃分出八種詞類（word classes），即名詞、動詞、分詞、冠詞、代詞、介詞、副詞、連詞，此一分類至今仍對語言學家分析歐洲語言的語法有著極大的影響。與 Dionysius 所關注的焦點不同，Apollonius 則是對整個語句進行分析，他描寫名詞與動詞間的關係，以及其他詞類與名詞、動詞間的關係。這些發展預示了後來主語與賓語的區分（Robins, 1997）。

歷史語言學是下一個語言學史上的重要階段，此時的語言學研究的是不同語言的歷史關係。Dante（1265-1321）認為不同的方言與後來形成的不同語言，是同一語言來源（a single source language）在時間與地域的變遷下形成的。他區分出三種不同的歐洲語系（language families），即日耳曼語系、拉丁語系、希臘語系。Scaliger（1540-1609）則區分出十一種語系，再將之歸類為四大語系，即羅曼語系、日耳曼語系、希臘語系、斯拉夫語系。到了十八世紀，語言學焦點轉到比較歐洲語言與拉丁語的語詞（vocabulary）、結構（structure），並探討語言的歷史關係。十九世紀時，歷史語言學研究進入一個嶄新的階段，語言學界認為此世紀是以歷史比較（comparative and historical）的方法研究語言學的重要階段，歷史比較語言學的理論與方法之發展在此時達到顛峰。Rask（1787-1832）、Grimm

（1785-1863）、Bopp（1791-1867）為此領域奠定了基礎。Rask 是第一個有系統地比較語詞之形式的人（Robins, 1997）；Grimm 則對德語與其他印歐語言間的語音對應關係有深入的探討，他所發現的語音對應規律被稱為 Grimm’s law；Bopp 的研究聚焦在找出語言的語法結構（李宇明，1997）。十九世紀中葉的歷史比較語言學，Schleicher（1821-68）扮演重要的角色。他根據語言的共同特徵，如：語詞的對應關係、語音變化的結果等，將語言分成不同的語系，假設每個語系中的語言，有其共同的母語（a parent Grundsprache），再透過已經證實的不同語系間關係，畫出各語言間的歷史關係樹狀圖，這是歷史語言學上的重要發展（Robins, 1997）。

在歷史語言學的發展到達顛峰後，語言學家 Saussure 帶領語言學走向另一個完全不同的方向。他的學生根據他上課的筆記整理出於 1916 年發表的《普通語言學教程》（Course in general linguistics），對語言學界的貢獻無與倫比。他將語言學，由歷時性（diachronic）的研究，即將語言在時間中的變化當作研究主體的研究，帶往共時性（synchronic）的研究，即將語言視為在特定時間的溝通系統以進行的研究（Robins, 1997）；也就是說，由 Saussure 起，語言學的研究開始將語言視為一套系統，以之作為研究的對象，對其成分與規則進行描述。另外，為確認研究的主體，Saussure 區分了語言（langue）與言語（parole）；言語指的是個人所說的話，是語言的存在形式（陳新雄等，2005）；而語言，根據 Saussure（1966）的說法，指的是

> 「…人類機能的社會產物…是一組必須的、為社會所接納的規約，也是社會中的成員使用其說話機能時的依據」
>
> （…a social product of our faculty…a body of necessary conventions adopted by society to enable members of society to use their language faculty）

李宇明（1997）進一步解釋，語言即抽象的語法規則系統與詞彙系統。Saussure認為語言和言語之間存在著密切的關係，語言是言語活動的規約，語言的存在使得言語可以被了解。而言語的存在也促進語言的演變。而語言學所要研究的對象是那些相對穩定的規約，而不是每次都可能不同的個人所說的話。

Boas、Sapir、Bloomfield 是共時性的語言學研究的重要代表人物，他們對語言學研究各有其不同的貢獻。Boas 與 Sapir 認為，語言與語言使用者的生活、思考方式有密切關連（Robins, 1997）。Boas 首先提出語言結構的分析應該在語音、語詞、句法這三方面上（李宇明，1997）。Sapir 認為語言對人類生活的影響無所不在，他的研究範疇涉及與語言相關的各個領域，如文學、心理學等（Robins, 1997），他視語言為在社會中長期被使用且延續下來的一種產物，人類說話不像走路是種本能，是因為在人類社會中生活才學會的，從這種觀點出發，使得他對語言的界定有其特有的思維。Sapir（1921）在著作《語言論：語言研究導論》（Language: An introduction to the study of speech）中，對語言界定如下：

>「語言是一種純粹人為的、非本能的溝通方法，在此方法中，人類有意地、自主地由所謂『發聲器官』產生的符號系統以溝通想法、情感、渴望，而且該符號是能為聽覺接收的。」
>
>（Language is a purely human and non-instinctive method of communicating ideas, emotions, and desires by means of a system of voluntarily produced symbols. These symbols are, in the first instance, auditory and they are produced by the so-called “organs of speech”.）

他的界定同時包含語言是一種符號系統，也是一種溝通系統這兩個觀點。與 Saussure 類似，他們都在界定中指出語言的符號系統是人類約定俗成的，但是，Sapir 在界定中強調了語言是用以溝通的觀點，以及語言的符號是能為聽覺所接收的觀點，他的界定突顯出語言之交際功能。

Bloomfield 在語言的界定上與 Sapir 類似，他認為所謂的語言（language），指的是人所發聲音的約定俗成使用方式（the conventional use of vocal sound），是一種符號系統。他不關心語言對人類生活的影響，而將研究重心置於語言研究的方法論上與語言形式的分析上，其對語言學之重要貢獻乃是他強調語言學的研究方法。Bloomfield 受到行為主義者與機械論者之實證想法的影響，使他認為語言研究應具有嚴謹的科學性，所以作法上應將可觀察到的操作（operation）作用於可觀察到的資料上，進行描寫性（descriptive）的報導。他的研究主體主要是針對語法形式（grammatical form），以及音位（phoneme）的類型、變異、結構等。他認為語義（semantic）的研究無法達到像研究語法形式、音位那樣嚴謹，因此語義不在其主要的研究範疇中（Robins, 1997）。在其著作《語言論》（Language）中，可看出他認為語言是一個信號系統（a system of signals），且是詞彙與語法用法的穩定結構（a stable structure of lexical and grammatical habits）。

這些學者對語言有著不同的界定，且僅為語言學中語言界定的一部分，但由這些界定可看出一些共通性，如：語言是一種聲音的符號系統，為人類約定俗成等。

除了語言的界定外，這些學者對於語言溝通的過程也極為重視，Saussure（1966）提出的語言迴路模型（speaking circuit）與 Sapir（1921）的看法相同，都認為語言溝通的過程是說話者以聲音將腦中的概念或想法傳出，聲波為聽話者耳朵接收，再傳到聽話者腦中引動出概念或想法。Bloomfield（1939）則更進一步提出語言溝通過程的一個模型。這些看法都沒有著墨於聽話者接收到聲波之後所產生的想法是否會與說話者相同，也不考慮環境對語言溝通的影響。Halliday（1978）關於域語言（register）的理論則彌補了這方面的不足，也開拓了語言學研究領域的另一扇窗。他對於語言研究乃從語言的功能這個角度出發。他認為語言被使用的情境脈絡（the context of situation）不同，會使對話者選擇不同的語義（meaning）與形式（form）。他將域語言定義為

「語言為了某一特定功能而呈現的一群語義與表達這群語義的語詞與結構」

（a set of meanings that is appropriate to a particular function of language, together with the words and structure which express these meanings）

他認為域語言根據以下三個因素而變，

1. 場域（field）：

   情境脈絡中的語言參與者（participant）正在進行的活動，或對話環境中正在發生的事件。對話主題（subject-matter）常與此因素有關。不同的場域中，可能使用不同的語言，如「爸爸」與「父親」具有相同的語義，但與人提到父親時，若場域是日常生活的聊天，可能會使用「爸爸」，但較為莊重的情境中，如在書信裡，可能會使用「父親」。而相同的語言，在不同的場域中，呈現不同的語義，如：「傳統」這個語詞，可能使用「世代相傳，有傳承延續性質的社會因素」的語義，也可能使用「陳舊、跟不上時代」的語義（伍謙光，1995）。

2. 調性（tenor）：

   受語言參與者在此對話中的角色關係影響，而導致語言之不同專業用語（technicality）量、形式化（formality）程度、不同呈現方式（如：陳述、提問）、不同語調（有力地、威嚇地）等。角色關係包含誰是參與的人，例如：是大人或小孩，是否為某個領域的專家等；也包含參與者之間的關係，例如：師生關係、母女關係等。

3. 語式（mode）：

   對話中使用的溝通形式（channel of communication）。例如：選擇使用口頭方式或使用文字（書面方式）來進行溝通；也可進一步指溝通形式中的特定修辭（rhetorical）方式，例如：命令、廣告、詩歌等中常

有其慣用的不同修辭方式。此因素與語言在其被使用的環境脈絡中，所要發揮的功能有關，例如，語言的功能可能是用以說服、用以解釋，或用以命令。為了達到不同的功能，不同的語式會被使用，而不同語式的域語言有不同的組織方式與組織結構，例如：一般而言，文字（書面方式）中語詞的密度（lexical density）較口頭方式高。

二、語言的特徵與功能

雖然許多學者給出語言的界定，但沒有一個界定可以讓所有學者都認為完美且精確，因此，許多學者轉向對語言進行一些特徵的描述（楊信彰，2005）。每個學者描述的切入點不盡相同，不同面向上的特徵讓人們對語言的全貌有了更進一步的認識。以下特徵是許多學者描述語言特徵時，常會提到的：

1. 抽象性（abstract）：

   語言符號（linguistic symbols）常是表徵抽象的概念。例如「蘋果」這個語詞，所表徵的是蘋果這種水果的抽象概念[1]，不是某一個特定的蘋果，也沒有有限的外延（Bloomfield, 1939）。

2. 任意性（arbitrary）：

   這與 Saussure、Sapir、Bloomfield 在其對語言界定中所提的「約定俗成」是同樣的概念。指的是語言符號與其所指涉物沒有內部的（intrinsic）或必要（necessary）的連結關係。人類可以叫任何事物任何名稱（楊信彰，2005；葛本儀，2002；Devitt & Sterelny, 1999; Lightfoot & Fasold, 2006; Saussure, 1966）。

[1] 概念屬於思維的範疇，語義屬於語言的範疇。概念與語義並不相同，但具有密切的關係，互相依存。概念以語詞來表現，而語詞通過概念來反映客觀世界（伍謙光，1995）。

3. 系統性（systematic）：

語言是一個系統[2]。例如：語詞（word）、短語（phrase）、語句（sentence）等是系統中的元素。而系統中的秩序有：層級關係、組合關係、聚合關係等。層級關係指的是元素層級之間的高低關係，例如語詞是一個層級，語詞與語詞可以構成另一種元素，即短語，短語的層級是較高的層級。組合關係指的是元素與元素組合的關係，例如：「看書」是由「看」與「書」這兩個語詞以動賓關係組合而成的。聚合關係指的是一種「類」的關係。例如：「看書」的「看」可以用「寫」、「讀」、「買」等替換，「看」、「寫」、「讀」、「買」這些動詞具有相同的組合能力，它們之間具有聚合關係（李宇明，1997；葛本儀，2002；Devitt & Sterelny, 1999; Saussure, 1966）。

4. 符號性（symbolic）：

語言是符號組成的，它使用某些聲音（在語言學中，視聲音為符號）來指稱某些事物，該事物的特點便賦予在該聲音上 （李宇明，1997；楊信彰，2005；葛本儀，2002；Halliday, 1978; Saussure, 1966）。

5. 生成性（productive）：

語言由有限的語詞與有限的規則構成，但卻可以造出無限的語句。例如：使用「你」、「我」、「知道」三個語詞，就可以造出無限的語句，如：你知道了、你知道我知道了、我知道你知道我知道了、你知道我知道你知道我知道了...。（李宇明，1997；葛本儀，2002；Lightfoot & Fasold, 2006）。

6. 線性（linear）：

---

[2] 系統是由元素構成，能執行特定功能的體系。至少涉及三個要素：系統的元素、系統的功能、系統的秩序（葛本儀，2002）。

當語言以聽覺符號傳遞時，可看出其線性，符號隨著時間依序出現，不能像圖形這樣的視覺符號，同時整體性地呈現（葛本儀，2002；Saussure, 1966）。

7. 可學性（learnable）：

任何一種語言，在提供人們機會的情況下，都可以被人們學會（謝國平，1998；Devitt & Sterelny, 1999）。

Sapir（1921）在其對語言的界定中，提出語言的功能，即溝通想法、情感、渴望。Bloomfield（1939）認為，在科學的活動中，如：觀察、報導觀察結果、陳述假設、計算、預測、檢驗預測等，語言都發揮著重要的功能。語言在不同的目的下，以不同的方式被使用，發揮不同功能。Devitt 與 Sterelny（1999）曾經在提出語言的特徵時，認為「功能強大」（power）是語言具有的特徵之一。因此，想要完全列舉出語言的功能是不可能也不需要的（Halliday, 1978）。以下幾個面向的功能是許多學者都曾經提及的。

1. 溝通功能（communicating）

人類需要瞭解他人以及被他人瞭解，需要語言來瞭解他人所要傳遞為何，需要語言來表述自己的感覺或想法給他人知道，語言是這些行為的重要工具。雖然人類還有語言之外的溝通手段，如：手勢、圖形、舞蹈、鈴聲等，但比之語言，它們能承載的訊息量少很多。因此，語言是人類溝通不可缺少的工具（李宇明，1997；楊信彰，2005；葛本儀，2002；Halliday, 1978; Lightfoot & Fasold, 2006; Sapir, 1921）。

2. 思維功能（thinking）

語言是思維的重要工具。以邏輯思維為例，它是一種很重要的思維類型，進行邏輯思維時，常常是利用概念進行判斷、推理，而邏輯思維中的概念又往往利用語詞、語句等語言來呈現，判斷、推理的歷程也

往往使用語言作為思維的工具。（李宇明，1997；楊信彰，2005；葛本儀，2002；Bloomfield,1939; Halliday, 1978）。

3. 認知功能（recognizing）：

語言是思維的重要工具，而大部分的知識又是以語言的方式呈現，也就是說，語言在作為思維的工具、思維的對象上，都佔著重要的地位，這便造成語言在認知功能中的重要性。另外，語言也是一種分類系統，人類認識這個世界，一般都得侷限在這個分類系統中，在這個系統中去觀察世界、認識世界、形成概念。因此，語言是重要的認知工具（李宇明，1997；楊信彰，2005；Bloomfield,1939; Halliday, 1978）。

三、文字

由前述 Saussure、Sapir、Bloomfield 對語言的界定，可以知道他們認為語言的符號系統是種聲音的符號系統，然而，文字的符號系統是否也為語言的符號系統之一？關於文字（writing）與語言的關係，學者們有著不同的看法。

Saussure（1966）認為語言是由聲音符號（vocal sign）構成的，而文字符號系統是語言的書寫形式（written form），與語言是兩個不同的系統，文字是語言的表徵方式（represent）。他反對在他之前的語言學家在探討語言時，不將聲音符號與書寫形式區分開來的作法，他認為雖然語言的聲音符號系統與文字符號系統關係密切，但語言學所要探討的對象，絕不是二者的結合，而僅是聲音符號的系統，文字符號系統並不在語言系統之中。

Bloomfield（1933）的看法與 Saussure 類似，他也認為聲音符號與文字是兩個不同的系統，文字不包含在語言的系統之中。他在其著作《語言論》中明確說明文字並不是語言，只是一種用來記錄語言的可見記號而已

（writing is not language, but merely a way of recording language by means of visible marks），所謂的語言，指的是聲音符號的部分。他指出，目前為人們所使用的語言中，有許多是不久之前才有對應的文字的，有些甚至時至今日都沒有對應的文字。並且，縱使在語言有了對應的文字後，在很長的人類歷史中，大多數使用語言的人們是無法閱讀文字的。一段說出來的語言（speech-utterance）不會因為其中的一部分是否被文字記錄下來而改變。文字僅是一種外在的設備（device），如同錄音機一樣，是能將過去語言的特徵保留下來讓後人觀察的工具。

Langacker（1967）也認為文字僅是語言的一個書寫表徵，一種語言有對應的文字是一種例外的現象，許多人使用的語言並沒有對應的文字，而這些人仍順利地使用著他們的語言。葛本儀（2002）也認為文字是記錄語言的書寫符號系統。這些學者的看法類似，認為文字系統不包含在語言的系統中。

有些研究者雖然也採將文字當成語言的一種紀錄方式的觀點，但卻強調文字在語言學研究的重要性。Lightfoot 與 Fasold（2006）認為許多語言學的研究將重心放在口頭語言（spoken language）上有其合理性，因為口頭語言比文字（writing）早六千年出現，發展的時間長很多，並且每個社會中皆有口頭語言，但卻只有部分的社會有文字，即使有文字的社會中，也是每個人都學習口頭語言，卻非每個人都學習文字。不過，他們提出一個不同的觀點來支持他們認為文字應在語言學研究中佔有一席之地的想法。他們認為語言既然作為一個工具，就應該持續地改變、適應以反映使用者的需求（the tool of language is constantly being adapted to meet the changing needs of its users），而文字的發明與發展即是語言一個重要的適應，文字的發明與發展使得人們可以詳細地記錄、分析其生活中的事物，可以與素未謀面的人溝通，可以藉由以文字呈現的資料組合、比較不同人的想法，可以儲存、搜尋大量的資訊。因此，他們認為語言學的研究應同時考慮口頭語言與文字兩個系統。

有些學者的想法則與上述學者不同，他們將口頭語言與文字當成與語言的兩種傳訊媒體。Halliday（1978）雖然沒有像上述學者一般，在其著作中花一些篇幅討論文字與語言的關係，但由其在著作中的描述，如「…我們所說或所寫的語言…」（…the language we speak or write…），可以看出他並沒有將文字與語言特別區分開來，語言可以被「說」或是被「書寫」，這是兩種傳訊方式。另外，在其討論關於域語言的概念時，他認為影響域語言的因素「語式」，即對話中使用的溝通形式，可以是口頭語言，也可以是文字這種書面方式，這也可以看出他認為語言可以經由口頭語言或文字兩種方式傳遞。

Devitt 與 Sterelny（1999）的想法與 Halliday 類似，他們認為語言具有「獨立於媒體」（medium independent）這項特徵，媒體可以選用口頭語言，也可選用文字。楊信彰（2005）提出語言是基本上是以聲音為媒體的（primarily vocal），但文字是語言的擴展，此擴展使得語言掙脫了時間與空間的限制。他認為雖然在某些語言中，口頭語言或文字常表現出不同的特徵或語句結構（sentence structure），但它們都是語言的傳訊方式。

四、語言的語義面向

一般而言，語言學家在探討語言中，語詞、短語、語句的意義時，常由「詞彙意義」與「語法意義」兩類意義切入分析（李宇明，1997）。Portner（2006）認為語義是語詞（word）、短語（phrase），與語句（sentence）的字面意義（literal meaning）。語義是由詞彙意義（lexical meaning）與語法結構（grammar structure）交互作用而展生出來的，也就是說，語詞、短語、語句的語義，是由其組成部分（parts）與這些部分的組合方式（the way they are put together）所決定。此外，Portner（2006）認為語言使用的情境脈絡（context of use）也是決定語義為何的重要因素。例如，「新鮮」在語義上，

有「鮮潔不陳腐」的意思，有「新奇、罕見」的意思，也有「新穎、嶄新」的意思，而語言使用的情境脈絡可以決定究竟意義為何。

事實上，關於語言的意義之探討，Portner（2006）提出語義（semantic meaning）與對話意義（speaker's meaning）兩種。對話意義指的是一個語言使用者使用其語言時，實際想傳遞、溝通的內容，此意義的決定是來自語義與語言使用的情境脈絡之交互作用（圖 2.1.1）。對話意義關注的是語言在實際使用時所傳遞的意義。這與 Halliday 提出的域語言是類似的概念。

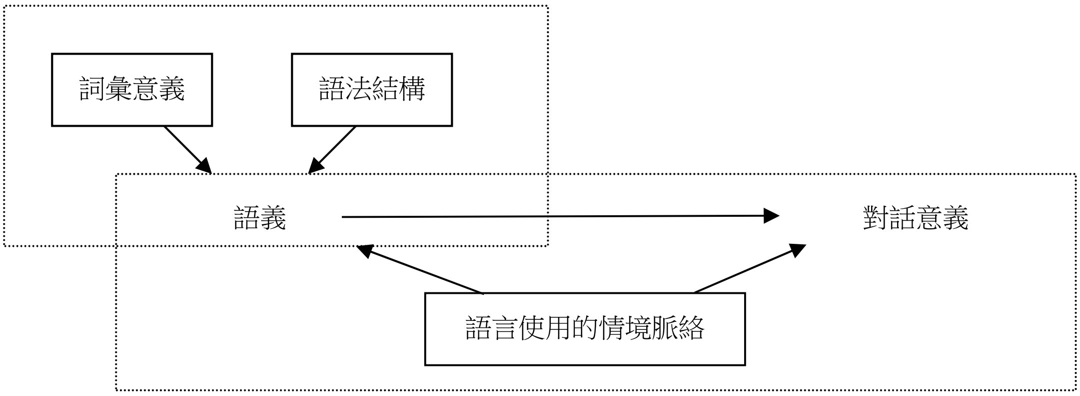


圖 2.1.1　Portner 之語言意義圖示

在語義的探討上，Leech（1974）提出七種不同的語義類型，由其分類，可看出他也考慮到「詞彙意義」、「語法結構」，與「語言使用的情境脈絡」會造成不同語義之情形。他強調語句的語義絕不是單純地由其組成成分之語義構成的，語法結構對語義有極大的影響。若語句的語義可由組成成分之語義構成，而無須考慮語法結構，則「我的家有一個新冰箱」與「我的新家有一個冰箱」便擁有相同的語義了。關於語法結構對語義的影響，屬於語法意義（grammatical meaning）的探討範疇（李宇明，1997），本研究將於下一部分對語法結構與語法意義進行討論。

Leech 於 1974 年在其著作 Semantics 中提出的七種不同語義類型如下，

1. 概念意義（conceptual meaning）

概念意義又稱為外延意義（denotative meaning）或認知意義（conceptual meaning），此種意義在語言溝通上所發揮的功能是基本而不可或缺的，其他六種意義則不一定在每次的語言溝通中具備（Leech, 1974）。

概念意義來自對客觀事物的反映或概括（伍謙光，1995）。例如「熊貓很可愛」這個語句中的「熊貓」，指的不是某一隻特定的熊貓，而是對很多的同類事物，即熊貓，所做的概括與抽象，即以「熊貓」這個語詞表示熊貓這一類動物。

字典中收錄的語詞解釋通常是此類意義，但是，字典中對同一個語詞可能有不同的解釋，同一語詞在不同的上下文中，可能會出現不同的概念意義（伍謙光，1995）。例如，「不爽」這個語詞，在「心中不爽」中指的是「不痛快」，在「報應不爽」中指的是「不會有錯失」。

2. 內涵意義（connotative meaning）

內涵意義是一個詞句在其概念意義之外，憑藉著它的概念意義而衍生的意義。此類意義來自人們對某詞句指涉事物之性質（putative properties）所擁有的看法（Leech, 1974）。例如，「狐狸」常帶有「狡猾」這個內涵意義，當人們說「他根本是隻狐狸」時，使用的並不是「狐狸」這個語詞的概念意義，而是使用它的內涵意義。又如，「媽媽」常帶有「慈祥」這個內涵意義。

字詞的內涵意義不是永遠不變的，它會隨著時代或社會的變遷而產生變化（Leech, 1974）。例如，「傳統」這個語詞，以前具有「世代相傳，有傳承延續性質的社會因素」的內涵意義，而現今則增加了「陳舊、跟不上時代」的內涵意義（伍謙光，1995）。

3. 風格意義（stylistic meaning）

Leech 認為風格意義是語言在不同的社會環境、情境中被使用，而呈現出的不同風格。例如，比較「警察在搶匪駕車逃逸後才趕到現場」與「搶劫的人開車逃走了以後，警察才趕到現場」，它們具有相同的概念意義，但是它們含有的語詞、語法，使得它們具有不同的風格意義。前者可能因為法律專業用語「逃逸」而呈現出「法律從業人員報告時所使用的語言」之風格。後者則可能因為使用的皆是日常生活的語詞，且結構較為鬆散，而呈現出「社會大眾交談時所使用的語言」之風格。

Leech 提出語言的不同層次（level），由層次最高的是正式（formal）英文與文學（literary）英文，口語（colloquial）英文與通俗（familiar）英文次之，俚語（slang）層次最低。在不同的情境中，會使用不同層次的語言。而不同層次的語言便呈現出不同的風格意義。

他也認為以下各面向會使得語言呈現出不同的風格意義（伍謙光，1995），

- 媒體（medium），例如：口頭語言（speech）、書面語言（writing）。前者的風格是通常語句結構較為鬆散，用詞較為淺顯；後者則結構較為嚴謹，用詞較為艱深。
- 參與情形（participation），例如：獨白、對話。前者可以自在地抒發，不需顧及他人反應。後者則通常需需要注意他人反應。因此，二者可能在用語、節奏上都有不同的表現，呈現出不同的風格。
- 行業（province），例如：科學用語、廣告用語。科學用語可能具有客觀、精準的風格，而廣告用語可能具有簡潔但聳動的風格。
- 個人獨特性（singularity），例如：狄更斯的風格、海明威的風格。狄更斯使用的語句有種細膩、詳盡、寫實的風格，且呈現出對上層社會之虛偽、貪婪的憤怒與仇恨。海明威使用的語句有一種簡潔的風格，且呈現出對人生、社會、世界的徬徨。

4. 情感意義（affective meaning）

Leech 認為情感意義指的是語言所反映之說話者的個人情感或對事物態度。此類意義通常需要透過其他意義、語調、感嘆詞等來表達。

- 藉由概念意義來表達。例如「你這個可惡的人，我討厭你的行為」，句中的語詞「可惡」、「討厭」的概念意義，使得這句話的說話者表達出之負面情感甚為明顯。
- 藉由內涵意義來表達。例如「你真是個天使」，句中「天使」的內涵意義清楚表現出說話者的情感。
- 藉由語調來表達。例如「閉嘴」這個語詞，如果使用的是生氣的語調，便可能呈現出說話者憤怒的負面情感，但如果使用的是戲謔的語調，就呈現出說話者與聽話者之間嬉戲的成分，也呈現出說話者的情感。
- 藉由感嘆詞來表達。例如「唉呀」這個語詞，可以呈現出說話者感覺驚訝或遺憾等情感。

5. 聯想意義（reflected meaning）

Leech 提出當一個語詞具有多個概念意義，其中一種意義使人們聯想到另一種概念意義時，便產生聯想意義。例如，漢樂府羽林郎中，「酒家女」指的是「賣酒的女孩」，但很容易就令人聯想到「陪人喝酒的小姐」。

6. 搭配意義（collocative meaning）

Leech 認為語詞因為它們常被使用的情況不同，而使得人們對它們產生不同的連結，因此使得它們的搭配力不同，形成它們不同的搭配意義。例如：「漂亮」與「帥」都具有「好看」的概念意義，但前者通常

用來搭配在形容好看的女性時，而後者通常用來搭配在形容好看的男性時，這形成這兩個語詞不同的搭配意義。

此外，Leech 指出，語詞的風格意義也會影響其搭配意義。例如：「饌」通常適合被搭配在較為正式或文學性的的語言中，如「有酒食先生饌」這樣的語句。在口語中使用，如「這些餅乾請你饌」就不是恰當的搭配。

7. 主題意義（thematic meaning）

Leech 認為主題意義來自說話者以不同的方式組織語言，而形成不同的主題強調。如：「學長吃了餅乾」與「餅乾被學長吃了」具有相同的概念意義，但是它們的語詞編排順序、語法不相同，因此形成了不同的主題意義。前者的主題是要說明「學長吃了什麼」而後者的主題則是「餅乾被誰吃了」。

在 Leech 之後，也有學者提出對語義類型的分類，但其內涵多包含在這七種語義類型中。李宇明（1997）將語義分為概念意義、附加意義、語法意義三種類型，葛本儀（2002）則將語義區分為概念意義、色彩意義、語法意義三種類型。其中李宇明所提之附加意義與葛本儀所提之色彩意義是類似的，這種意義中的幾種類型，其內容與 Leech 所提出的內涵意義、情感意義、聯想意義、風格意義等是類似的。在概念意義的部分，李宇明與葛本儀的說法與 Leech 的概念意義是相同的，但是他們對概念意義都有更進一步的解釋。他們認為概念意義可區分為通俗意義與專門意義，通俗意義為人們日常生活中使用，專門意義則通常只用於特定的專門領域。例如「鹽巴」的通俗意義是「具有鹹味的調味料」，但在化學的領域中，其專門意義為「氯化鈉這種化合物」。然而，並非每個語詞都具有通俗意義與專門意義，例如「杯子」沒有專門意義，而「除法原理」沒有通俗意義。

五、語言的語法面向

Lightfoot 與 Fasold（2006）認為探討語句（sentence）的語法結構，即探討語詞（word）如何組織成短語（phrase），以及語詞與短語如何組織成語句。由此可以看出，探討語法結構時，必須了解的有語法單位，如語詞、短語、語句等，所指為何，並且需要了解這些語法單位如何組織，組織的方式、規則為何。

在探討中文的語法時，一般分為四種語法單位，即語素、語詞、短語、語句（李宇明，1997；徐芷儀，1999；葛本儀，2002）。

語素是最小的語法單位，即最小的語音、語義結合體。以「他喜歡蘋果」為例，一般而言，這句話可以切分成三個語法單位，即「他」、「喜歡」、「蘋果」。而這三個語法單位中，依據判斷語素的「替換法」分析，「他」和「蘋果」是不能再切分的語素，而「喜歡」則可再切分成「喜」與「歡」兩個語素。所謂的替換法，根據徐芷儀（1999）的說法，指的是以替換語言成分的方式來確定語素的方法。以「喜歡」為例，它的兩端都可以被替換，例如，可以替換掉「歡」，而有「喜好」、「喜愛」等，可以替換掉「喜」，而有「狂歡」、「聯歡」等，藉由這樣的程序，可以找出語法單位中所能切分出無法再切分的，並能在其他話語中反覆出現的音義結合體，即是語素，如「喜」與「歡」。至於「蘋果」，「蘋」可以被取代而得到「水果」、「糖果」，但「果」卻不能被替代，即「蘋」不能在其他語法單位中反覆出現，它僅有語音，不具語義，因此，「蘋果」只有一端能被替代，另一端不能被替代，它本身是一個語素。語素本身並非造句的單位，它必須與其他語素組合成語詞，或本身充當語詞，才能造句。

語詞是最小的造句單位，具有一定的語音及語義，並且能被獨立運用。所謂最小，指的是語詞表示出一個整體意義，不能被分割，分割會使整體意義不存在，例如「文法」，雖然可以拆成「文」與「法」，且它們各自有其意義，但卻不具有「文法」的意義。而獨立運用指的是可以獨立充當語

句的成分，而不需要依附別的語言單位（徐芷儀，1999；葛本儀，2002）。由結構來看，語詞可分成單純詞和合成詞，單純詞是由一個語素構成，如：「酒」、「喝」、「巧克力」等，合成詞是由多個語素構成，如：「語言」、「數學」等（李宇明，1997）。而由詞類來看，語詞可分為名詞、動詞、形容詞、數詞（表示數目）、量詞（表示事物或行為的單位）、代詞（表示人稱、疑問、指示）、副詞、介詞、連詞、助詞、嘆詞、擬聲詞（徐芷儀，1999）。

短語是由兩個以上的語詞按照某些特定方式組合的語法單位（徐芷儀，1999），依照組和方式的不同，短語可分成不同的結構，如：偏正短語，像「好成績」，或動賓短語，像「學數學」等。

語句由語詞與短語構成，一般而言，是人們日常交際往來、傳遞訊息的基本單位（徐芷儀，1999）。可分為單句，如「他喜歡數學」，以及由兩個以上單句組成的複句，如「因為他喜歡數學，所以他很認真上數學課」。

語法單位依照某些特定規則以組成更大的語法單位，以下針對短語的結構進行分析，探討語詞如何組織成短語，而此組織方式亦可用以分析語句的結構。

不同學者對短語的結構分析不盡相同（李宇明，1997；徐芷儀，1999；葛本儀，2002），其中，徐芷儀對短語的結構提出之分類十分詳細，他將短語分成向心結構短語與非向心結構短語。向心結構短語以名詞、動詞、形容詞為主體（即中心詞），整個短語的性質與其主體相同，例如：主體為名詞的短語具有名詞的特性。非向心結構短語則是不具有中心詞的短語。

1. 向心結構短語

(1) 名詞短語

- 並列短語：由兩個以上的名詞並列而成，有時會加入連詞「和」、「以及」等來組織。如：<u>戰爭</u>與<u>和平</u>。

- 偏正短語：由中心詞（名詞、中心詞、方位詞）與前方的修飾它的定語組成。如：數學 老師、上課 以前、教室 裡。
- 「的」字短語：以「的」字結尾，省略後方的中心詞所成的短語。如：你的數學成績比我的好。
- 「所」字短語：此種短語中的「所」字可具有代詞的性質，如：「所看到的」或「所得」，也可作為只具語法意義的詞頭，如：我所收集的考題。

(2) 動詞短語

- 並列短語：由兩個以上的動詞並列而成，有時會加入連詞「和」、「又」等來組織。如：又哭又笑、加 減 乘 除。
- 偏正短語：由中心詞（動詞）與前方的修飾它的狀語組成。如：認真 學習。
- 動賓短語：由中心詞（動詞）與其所支配的對象（賓語）組成。如：算 題目。
- 動補短語：由中心詞（動詞）與其後方做補充說明的補語組成。如：算 完。
- 連動短語：同一主詞的兩個動詞連用，表示一先一後的動作行為。如：拿著課本走進來。
- 兼語短語：由動賓短語套主謂短語構成。即短語中，有一詞既為動賓短語的賓語，又為主謂短語的主語。例如：「請」「老師」說明。
- 能願短語：由能願動詞「會」、「應該」等加一般動詞或形容詞組成。如：會 原諒 我們、應該 用功 一點。

(3) 形容詞短語

- 並列短語：由兩個以上的形容詞並列而成，有時會加入連詞「和」、「又」等來組織。如：又快速又正確。
- 形補短語：由形容詞與其後方的補充成分（補語）組成。如：大 三倍、好 得多。
- 狀形短語：由形容詞與其前方的修飾它的狀語組成。如：十分 有趣、比他 好。
- 狀形補短語：由形容詞與其前方的狀語、後方的補語組成。如：「比他」「好」得多。

2. 非向心結構短語

(1) 主謂短語：由主語和謂語組成，是陳述與被陳述者之間的關係。如：老師 正在吃。

(2) 數量短語與指量短語：數量短語是數詞與量詞的組合。如：一 群學生。指量短語則是指指示代詞「這」、「那」與量詞的組合。如：這 些、那 個。

(3) 介賓短語：由介詞與其賓語組成的短語。如：在 教室裡。

(4) 複指短語：由指同一事物的兩個詞或兩個短語並列組成。如：我們 臺灣人。

(5) 固定短語：由幾個固定語素組成，包括成語或習慣用語。如：苟延殘喘。

(6) 比況短語：以「似的」、「那樣」、「一樣」結尾的短語。如：像 想起什麼似的、像 紅蘋果一樣。

語法是語詞、短語與語句的組合方式與規則，語法意義就是由這些組合方式、規則抽象出來的意義。而語法意義一般可分為結構意義（關係意義）與功能意義（徐芷儀，1999；葛本儀，2002）。結構意義反映出語詞、短語與語句組合之結構關係，如：並列關係、偏正關係、主謂關係等。而功能意義反映出語詞或短語的組合功能，不同性質的語詞或短語，具有不同的組合功能。例如，名詞或名詞短語可作為語句的主語、賓語、定語，但一般而言不能作為謂語，或不能被副詞修飾。

與中文類似的，在英文的語法中（楊信彰，2005），語句可由語詞（lexical categories）、短語（phrasal categories）等組成，前者例如名詞、動詞等，後者例如名詞短語、形容詞短語等。組成的語句可分為簡單句（single clause），例如，“I like linguistics.”，以及簡單句組成的並列句（coordinate sentence），例如，“I like linguistics, but she is interested in mathematics.”，或複句（complex sentence），例如，“I did not like linguistics until she gave me a lecture.”。

由語句的結構來看，亦可分為向心結構（endocentric construction）與非向心結構（exocentric construction）。向心結構中，整個語句與其中的一個部分或多個部分（constituent）功能等同（functionally equivalent），而這個「部分」即其中心（center or head）。例如，He left because he was tired 這句話中，he left 即為核心，而 because he was tired 則為其修飾語（modifier）。非向心結構沒有中心的部分，例如，I went to Tainan。

英語中，語句有 7 類基本的組成型態，如表 2.1.1 所示。

表 2.1.1　英文語句之基本組成型態

組成型態	S–主詞	V–動詞	O–受詞	C–補語	A–副詞
SV	She	was laughing			
SVO	She	loves	movies		
SVC	She	became		tired	
SVA	She	went			to Tainan
SVOO	She	gave	me a ticket		
SVOC	She	considers	the ticket	expensive	
SVOA	I	must put	the ticket		downstairs

第二節　數學語言

Pimm（1987）曾說：「學習數學便是學會像數學家一樣地說話」（Learning mathematics is learning to speak like a mathematician）。怎樣算是像數學家一樣地說話？怎樣的話又是數學家說的話？

一、數學語言的界定

早在 1953 年，Brune 便提出語言因素在數學課堂中的重要性，他認為給學生機會在課堂中溝通、討論數學法則與概念是必要的。到了 1986 年，NCTM 出版的 the Commission on Standards for School Mathematics 中，將數學中的語言（language in mathematics）與溝通視為重要主題，這為數學中的語言在數學的教與學領域中奠定了重要的地位。Durkin 與 Shire（1991）認為語言與數學的交織非常複雜，他所言：「數學的教育始於語言，發展於語言，它因語言而向前推進，也因語言而受阻，而其成果也藉由語言來評鑑」（mathematics education begins and proceeds in language, it advances and stumbles because of language, and its outcomes are often assessed in language），更對語言在數學中的重要性給了很好的詮釋。

許多研究致力於探討數學中的語言因素（Ellerton & Clarkson, 1996），然而這些研究中所探討數學中的語言範疇不盡相同，對何謂數學中的語言也有著不同的界定。許多學者在研究時，沿用了 Halliday 數學域語言（mathematics register）的想法（Boero, Douek, &Ferrari, 2002; Lager, 2006; Pimm, 1987）。

Halliday（1978）將其關於域語言的想法，即「語言為了某一特定功能而呈現的一群語義與表達這群語義的語詞與結構」（a set of meanings that is appropriate to a particular function of language, together with the words and structure which express these meanings），使用到數學上，提出數學域語言的看法。所謂的數學域語言指的是一組為了數學目的（mathematical purposes）

而呈現的語義，以及語詞與結構。而 Halliday 在探討數學域語言時，除了語義、語詞、結構外，他認為數學符號（mathematical notation）也是必要的探討對象。

在發展數學域語言時，給予數學中的物件、過程、性質、功能、關係之描述與命名是不可避免的。這些語言有多種來源（Pimm, 1987），有些語詞是由日常生活的語言借來的（borrowed from more everyday English）：例如，極限、距離等。有些語詞是數學專用的語詞，例如：函數、積分等。而中文中的數學詞彙來源大致上可分成五類，前三類是可由字面上看出含意的，後兩類則偏向按規定命名（李士錡，2001）：

1. 由自然語言借用而來的語詞，但具有數學中的精確意義：例如，距離、直線、組合、單調等。
2. 含有比喻意味的語詞：例如，扇形、倒數、行列式等。
3. 由數個語詞組合而成的語詞：例如，絕對不等式、鈍角三角形等。
4. 由外語翻譯而來語詞：例如，絕對值、環、體，拓樸等。
5. 特地創造的語詞：例如，函數、冪等。

Pimm（1987）在探討數學語言時，使用 Halliday 數學域語言的想法，認為數學語言包含語義、語詞、結構，也包含符號。他認為數學的符號使用量很大（highly symbol-dense），在數學語言中佔有重要的地位。Pimm（1995）指出，討論數學中的符號時，包含其念法（spoken sounds）與書面寫法（written words），也包含這些符號在數學中的組織方式。他將數學中的符號分成以下類別：

1. 代表某些字或語詞的符號（logograms）：這類符號一般而言不在數學脈絡外使用，屬於數學域語言中的專業語詞（technical terms）。例如，

0、1、⋯等阿拉伯數字。又如＋、－、×、$\sqrt{\ }$、＝、∴、∃、⇔、∪、Σ、Π 等符號。

2. 象形圖示的符號（pictograms）：這類符號常在幾何的領域中出現，呈現出物件的形象。例如，⊥、∠、//、∆等。

3. 標點符號（punctuation symbols）：日常生活語言中的標點符號，但被借用為數學符號，具有與原來不相同的意思。例如，：、！、( )、[ ]、/等。

4. 字母符號（alphabetic symbols）：包含英文字母 a、b、⋯、z，A、B、⋯、Z 等，以及希臘字母 α、β、⋯、ω。

這些符號又可依幾種不同組織方式組成不同意義的數學符號，

1. 順序（order）：不同的順序可能表示不同的數學物件，例如，17 和 71。

2. 位置（position）：上下左右等不同位置可能表示不同的數學物件，例如，23 與2^3，x^2與x_2，$\frac{a}{b}$與$\frac{b}{a}$。

3. 相對的大小（relative size）：例如，指數中表示次方的指數一般會寫得比底數小一些。

4. 方向（orientation）：不同的方向可能表示出不同的數學物件。例如，＋與×，∩與∪，>與<等。

5. 重複（repetition）：同一符號重複不同的次數可能表示出不同的數學物件。例如，$f'(x)$與$f''(x)$。

依此觀點，在中文的系統下，探討數學語言，必須包括中文的語詞、語義、組織結構，也必須包含符號的語義、組織結構，並且必須考慮其發音、念法與書面寫法。

Boero、Douek 和 Ferrari（2002）參考 Halliday 對域語言的詮釋，以及 Pimm 的數學語言界定，將數學語言（language of mathematics）界定為：做數學時使用的域語言（registers that are commonly used in doing mathematics）。因此，他的數學語言中包含了文字成分（word component）與符號成分（symbolic component）。Boero 等更進一步解釋，數學語言立基於一般語言（ordinary language）上，因此，數學語言必然借用一般語言的形式（forms）與結構（structures）。由此可知，探討數學語言時，可以使用一般語言中分析語義或語法的方式加以分析。

Ferrari（2004）個人的研究中，對數學語言所提出的界定雖然沒有直接引述數學域語言的想法，但在使用時機與組成成分上，有著類似的看法，他的界定是：做數學或溝通數學時，習慣上會使用的語言，包含字詞的表達與符號的表達（the language customarily used in doing and communicating mathematics at undergraduate level, including verbal and symbolic expressions）。

Herbel-Eisenmann（2002）在界定數學語言時，則有更細緻的區分，但依據其研究的需求，該界定的範疇僅限於在數學課堂中口頭溝通如何解題時所用之語言，他將之區分為：

1. 文章脈絡中的語言（Contextual language）：直接指涉或使用題目內容、字句的用語。

2. 橋接的語言（Bridging language）：包含兩種不同類型。其一是課室產生語言（classroom generated language），指的是課堂中師生自行發展出來的語言，不是正式的用語，也或許不是正確的用語。另一類是過渡性數學語言（transitional mathematical language），它比文章脈絡中的語言更數學化（more mathematical），用語已脫離題目的內容。例如，當解題過程中列出 $y = ax + b$，學生討論與斜率相關內容時，不以「斜率」指稱 a，而是使用「x 旁邊那個數字」。

3. 正式數學語言（Official mathematical language）：Herbel-Eisenman 參考 Halliday 對數學域語言的詮釋，將正式數學語言定義為「一種必須呈現出數學使用之自然語言及意義；當此使用乃為了某數學目的而為之時」（the mathematical use of natural language and meaning a language must express if it is being used for mathematical purposes）。他進一步解釋，數學語言即為「在數學社群中，會被期待與接受的語言數學化使用方法與作用方法」（the ways of talking and functioning mathematically that would be expected and appreciated by the mathematical community）。

Herbel-Eisenmann 定義「正式數學語言」中所提到的自然語言，並非泛指所有的自然語言，其自然語言需為數學而用。從他所舉的例子，例如，「…斜率與 *y* 截距…」(the slope and the y-intercept）或「…斜率為 2.5」(2.5 is the slope）等，可以看出，含有「斜率」(slope)、「截距」(intercept）這類數學專門詞彙，*x*、*y* 等字母符號（alphabetic symbols; Pimm, 1987)，以及 2.5、1、2 這類代表某些字或語詞的符號(logograms; Pimm, 1987; 例如，代表壹、貳、one、two)，且為數學所用者，皆可在 Herbel-Eisenmann 定義「正式數學語言」的範疇。以英文來說，字母符號應是屬於自然語言的範疇。以中文來說，字母符號則不屬於中文之自然語言的範疇，但中文數學語言往往必須借用這些外來的符號與語言，故仍屬於數學語言的範疇。而「斜率」、「截距」這類由自然語言的字或詞組成之數學專門詞彙，亦應屬於數學語言的範疇。

綜合上述討論，本研究給予「數學語言」與「數學語句」操作型定義，如下：

<u>數學語言</u>

做數學或溝通數學時，針對該數學內容會使用之語言，包含數學使用（借用）的詞彙、短語、語句與符號，以及僅在數學中使用的詞彙、短語、

語句與符號。也包含這些詞彙、短語、語句與符號的組織方式、組織結構。在傳訊方式上，包含口頭方式與書面方式。

其中數學使用（借用）是指選取之語義為數學中界定之語義，可能與在自然語言之使用時相同或不同。

<u>數學語句</u>

本研究在許多地方會使用到「數學語句」一詞，以特別指定並非廣泛的探討數學語言，而是要探討其中的某特定範疇。

數學語句是數學語言中的一種，但在本研究中界定其為僅在數學中使用且以文字敘述為主的語句。例如，教科書中用以描述數學定義、性質、運算法則等之語句。

雖然數學語句的界定為「僅在」數學中使用的語句，但有些語句，或其中所含的詞彙與符號，在現今生活中已被借用。例如，曾出現過取名為「X」的飲料或電視影集「X 檔案」，即是借用符號 x 在數學中未知數的概念，用以表示未知的事物。或是有時候其他同學考試考得不好時，我們會開玩笑說「他的分數是 ε 」，即是借用符號 ε 在數學中常用以表示很小的正數之想法。或是跟開車者報路時，說「走下一條和這條平行的路」這樣含有數學語詞「平行」的語句，即是借用「平行」的語義，但並非真的指兩條路的距離處處相等或永不相交等，而僅是取該語詞中所含並排、並行的想法而已。

另外，當教師在數學教學中，有時會使用如「這個圖畫的邊緣跟這個天花板的邊緣平行」這樣只含有一個「僅在數學中使用的詞彙」，即「平行」，而其他皆屬於自然語言之詞彙的語句。當這樣的語句在教學中出現，即符合在做數學或溝通數學時出現的詞彙、短語、語句與符號這個界定，並且為僅在數學中使用的語句，故本研究亦將之界定為數學語句。

二、數學語言的特徵

雖然各派研究者根據其研究之不同屬性，對數學語言的界定不盡相同，但有些數學語言的特徵是學者們論及數學語言時時常提出的。

數學語言借用日常生活語言的形式與結構，也借用日常生活語言中的詞彙，但這些詞彙之語義與其日常生活語言之使用不盡相同。並且，數學語言中也往往含有數學專門詞彙（technical mathematical terms），這些詞彙是日常生活語言中不會使用的。許多研究的焦點便是放在這些數學專門詞彙上（Gough, 2007; Han & Ginsburg, 2001），這些研究指出數學語言的特徵之一便是含有上述具有專門意義（technical meaning）的日常生活詞彙或是數學專門詞彙。

Lager（2006）由數學語言表徵意義的情形來看數學語言的特徵，他比較數學語言（mathematical language）與日常生活語言（everyday language），認為數學語言中使用的詞彙相較於日常生活語言中之詞彙，可選擇之語義的範疇較小。因此，他提出數學語言具有精確（precise）而不含糊（unambiguous）的特徵。

Zack（1999）與 Gough（2007）由數學語言的語句結構來看數學語言的特徵，他們認為數學語言與人類自然地發展的日常生活語言不同，是人為特意建構的語言，因此具有嚴格形式，所以，他們提出數學語言的形式化（formal）特徵。De Corte 和 Verschaffel（1991）也提出類似的看法，他們分析文字題所使用的數學語言，認為數學語言總是使用某些約定的、固定的形式（stereotyped）。

然而，這些形式有何特殊之處呢？Barton 與 Heidema（2000）認為數學教材中使用的語句常常具有複雜的語法結構，也就是這些語詞常常以十分複雜的方式組成短語或語句。而這些數學語句所偏好使用的語法結構常常是日常生活中很少使用的（Laborde, 1990）。

Laborde（1990）由語句所用的文法來分析數學語言的特徵，他認為數學語言常常使用被動語態（passive mood），並大量、複雜地進行名詞化（complex nominalization）。造成這兩種文法大量使用的原因有二，其一是數學語言講求簡潔與精確，其二是數學內容總傾向於以客觀的、避免人為因素的方式加以描述，因此必須不斷將語句中的成分名詞化或改語句為被動語態以形成名詞補語或名詞子句，如此才能簡潔又精確地一層一層形容，也才能描述清楚所欲描述的數學內容。

Laborde（1990）分析使用被動語態與大量名詞化的數學語言後，提出另一個數學語言的特徵，即數學語言中的數學物件往往具有複雜的關係（the complex net of relations between mathematical objects）。

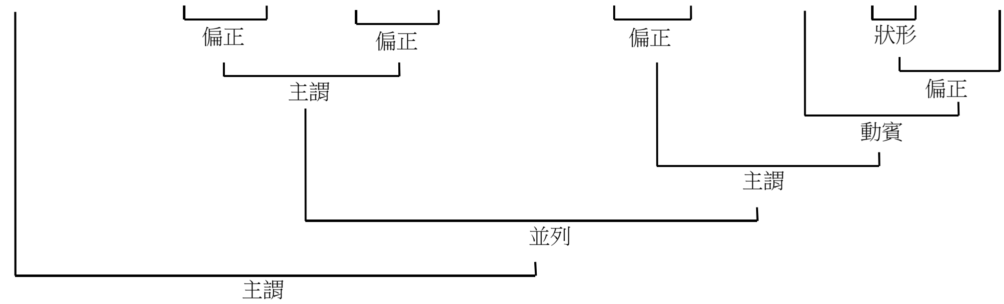
既然數學語言講求簡潔，便必須將許多訊息在短短的語句中全部呈現出來，因此，也造成了數學語言的另一個特徵：濃縮（condense）。Laborde（1990）與 De Corte 和 Verschaffel（1991）在文字題使用的數學語言中歸納出此特徵。Schell（1982, 引自 Carter & Dean, 2006）也提出相關的想法，他認為相較於其他領域，數學教材中所使用的數學語言，往往每個語句中都含有更多的概念。也就是說，語句中會有許多帶有新訊息的語詞，即 Laborde 所謂的語句進展速度快。

然而，中文的數學語言又具有哪些特徵呢？李士錡（2001）認為中文的數學語言同樣具有精鍊與簡約的特徵，常常試圖用較少的詞彙來描述所要說明的對象、法則或性質，如：「斜邊相等的等腰直角三角形全等」，便省略了量詞，如「兩個」，又如：「直線外一點與直線上各點的連線以垂線最短」，僅以一句話便完整地描述了一個性質。

另外，中文的數學語言也多使用名詞，或將動詞名詞化，如：「平移與旋轉的合成」中，「平移」、「旋轉」、「合成」都是名詞化的動詞。

在中文的數學語言中，形式化亦為其特徵之一，數學語言常使用某些固定的形式。在語法結構上，中文的數學語言常常使用日常生活語言中較少使用的複雜語法結構，常使用多重修飾，如由中學數學課本所摘錄之「鳶形的兩對角線互相垂直且一對角線平分另一對角線」，該句的結構為主謂關係，「鳶形」為主語，而「兩對角線互相垂直且一對角線平分另一對角線」為謂語。其中謂語又具有複雜的語法結構，以下以徐芷儀提出的語法結構之分類加以分析，可看出其語法結構之複雜程度。此外，一句話中包含了「鳶形」、「對角線」、「垂直」、「平分」等語詞與概念，也包含了「鳶形」與「對角線」的關係，兩條對角線之間「互相垂直」、「平分」等兩個關係。呈現出「濃縮」與「數學物件關係複雜」等數學語言之特徵。

鳶形　的 兩 對角線 互相 垂直　且　一 對角線 平分 另 一 對角線



在數學語言中，數學符號的使用常常是不可避免的，因此，有些研究致力於探討數學符號之特徵。以下為幾位學者的觀點（Gough, 2007；Rubenstein & Thompson, 2001）：

1. 一個符號的發音常不止發出一個語詞的音，例如，「≤」就必須唸成「小於或等於」。

2. 一組符號常有多種唸法，例如，「$a \div b$」可以唸成「a 除以 b」、「b 除 a」等。

3. 有些符號的寫法與唸法不是單一線性的（a single line），例如，「$\frac{3x^2+4x-5}{2x+7}$」與「$\sum_{k=1}^{n} k$」，而且，其唸法並非由左念到右，而是唸成「$2x$ 加 7 分之

3x 的平方加 4x 減 5」，以及「summation k 從 1 到 n」或「sigma k 從 1 到 n」。

4. 一樣的符號可能有不同的唸法或意義，例如，「－」的意義與唸法可以是「負」或「減」。

5. 同樣形式之符號可能代表不同的意義，例如，「$3\frac{1}{2}$」與「$3x$」的形式相同，但「$3\frac{1}{2}$」的 3 與$\frac{1}{2}$之間是加法，而 3 與 x 之間是乘法。

6. 一意義可以用不同的符號加以表示，例如，「$12 \div 3$」與「$\frac{12}{3}$」。

三、語言特徵對學生理解該語言的影響

數學語言具有許多與其他領域之語言不同的特徵，然而，這些特徵對學生理解的影響是什麼呢？

針對數學語言的組成成分中包含數學專門詞彙這個特徵，許多研究（Carter & Dean, 2006; Hackett & Wilson, 1995）針對學生理解數學專門詞彙的情形進行研究，發現學生對數學專門詞彙並不瞭解。

Warren（2006）的研究發現學生對語詞「大於/多於」(more）與「小於/少於」(less）的瞭解有限。他將學生的理解情形與使用情形加以分類。第一類的學生，將「大於/多於」等同於「大」(big)，將「小於/少於」等同於「小」(small)，沒有「比較」的想法。第二類的學生，不認為「大於/多於」、「小於/少於」與「大」、「小」相同，他們會嘗試去造含有「大於/多於」、「小於/少於」的語句，但無法成功地在語句中給出比較的兩個物件。第三類學生將「大於/多於」、「小於/少於」連結到位置關係的語言(positional language）上，例如「較高」(higher)、「較低」(lower）等。這類學生對「大於/多於」、「小於/少於」的理解已有「比較」的想法。第四類學生能以「大於/多於」、「小於/少於」造句，理解這些語詞具有「比較」的想法，但所

造的語句是像「你有的多於他有的」這樣的日常生活語言語句。第五類學生則真正對此二語詞在數學上的意義有真正的理解與正確的使用，他們可以造出「9 小於 11」這樣的語句。

Raiker（2002）根據 Shuard 和 Rothery 對數學詞彙（mathematical words）的分類，探討學生在課堂中使用數學詞彙的情形。該研究探討的數學詞彙有三類。第一類是數學專門詞彙（technical words），是僅在數學中使用的詞彙，例如，除數、橫軸、平方等。第二類是詞典詞彙（lexical words），屬於日常生活語言，且語義與日常生活語言中的使用相同，例如，距離。第三類是日常生活詞彙（everyday words），與詞典詞彙同樣屬於日常生活語言，但語義與日常生活中的使用不盡相同，例如，點、極限等，有其在數學中的精確意義。Raiker 發現學生在課堂中使用這三類數學詞彙的頻率遠低於其教師，且他們對同一數學語詞的解釋，與他們的教師不同，他們對數學語詞之理解並不完全正確。

Hsieh、Wang 與 Wu（2008）的研究探討了臺灣中學生對數學專門詞彙的理解情形，他們以語言學上的「類指含意」[3]去看學生的理解情形，發現學生對「垂直」、「平分」、「垂直平分」、「平行」、「對稱軸」等數學語詞並不理解。例如，學生們認為「直線 L 垂直直線 M」、「$\overline{AB}$ 平分 $\angle A$」是正確的，但卻也認為「點 A 垂直點 B」、「點 A 垂直直線 L」、「點 A 平分 $\angle B$」、「$\angle A$ 平分 $\overline{BC}$」是正確的，由此可知，學生並非真的理解這些數學語詞。

當語句中含有學生無法理解的數學專門詞彙時，可以想見，學生當然無法完全理解該數學語句。

Teubal 與 Nesher（1991）的研究針對文字題中的數學語句，他們提出另一種數學詞彙對學生理解之影響的觀點，認為語句中的關鍵數學詞彙對學生注意力的吸引程度會影響學生對整個語句的理解，因此，當語句中具

[3] 各概念用詞指稱的必定非單一具體事物，而是具有某些相同特徵的事物。對於這些語詞這樣的語義理解，在語言學上視為類指含義理解。

有某些對學生的吸引程度較高的數學語詞，例如「較多」(more)、「較少」（less）等與解題的運算有關的語詞，學生可能因而專注於該語詞，影響對整個語句的理解情形。

雖然許多學者認為數學詞彙對學生理解語句具有重要影響，但 Ellerton 與 Clarkson（1996）則提出另一種看法，他們認為語義結構[4]（semantic structure）才造成學生理解困難的主要原因，且其影響遠大於數學詞彙造成的影響。De Corte 和 Verschaffel（1991）將探討範疇設定於文字題的數學語言中，探討數學語句的語義結構對學生理解語句的影響，發現相同解法但不同語義結構的文字題，會造成理解程度的不同。研究結果顯示，已知量與未知量之間關係的描述方式和明確程度，以及各項訊息的出現順序，會影響學生理解語句。雖然，該研究主要探討的是文字題所使用之語言，但其研究結果也能提供我們在將範疇界定於教師或教材中使用之數學語言時的思考方向。

許多學者指出，數學語句中，複雜的語法結構是造成學生理解語句之困難的重要因素（Barton & Heidema, 2000; Laborde, 1990）。吳秀萍（2004）針對臺灣國二學生進行研究，所選之數學語句範疇為垂直與平行的相關用語，他的研究結果顯示，學生對其教師課堂中所使用語法層次較多的數學語句呈現理解困難的現象，他們不能掌握語句的類指含意，例如，學生不了解「P 到 A、B 的距離」指涉的是兩個線段，又如學生認為「P 到 A、B 的距離相等」表示「P 到 A 距離等於 P 到 B 的距離」，但也表示「P 到 A 距離等於 A 到 B 的距離」，這也呈現出他們對語句之類指含意的不理解。此外，學生也對語句中的關係含意[5]不能掌握，例如：學生認為「$\overline{CD}$ 的垂直平分線上一點 P」中，P 與 $\overline{CD}$ 的關係是「P 在 $\overline{CD}$ 上」。而李士錡（2001）

---

[4] 語義結構指的是語句中語義成分之組成關係、網絡結構（徐烈炯，1995）。

[5] 數學語句中各語詞與物件用語透過某些聯繫與排列構成一個具有意義的語句。對於此語句中各物件與物件的關係之理解，在語言學上即視為關係含義理解。

分析了中文數學語句之語句結構的複雜度後，指出當學生無法掌握這類複雜語句結構時，學生便無法理解該語句。

針對數學語句的濃縮特徵對學生理解的影響，可藉由主題進展理論（theory of thematic progression）加以分析。主題進展理論將語句中的語詞分類成三類（Laborde, 1990），

1. 主題訊息語詞（thematic）：不帶新訊息的語詞，對語句進展的推進較慢。
2. 表述訊息語詞（rhematic）：帶有新訊息的語詞，進對語句進展的推進較快。
3. 過渡訊息語詞（transiton）：銜接「主題訊息」與「表述訊息」的語詞。

數學語句具有濃縮的特徵，也就是很多訊息在短短的語句中呈現，即語句中帶有新訊息的語詞「表述訊息語詞」多，進展速度很快，根據 Laborde 的說法，理解進展速度快的數學語句對學生是困難的。但另一方面，Laborde 也提出語句進展速度太慢，也會造成學生的負擔，而形成理解困難。

另外，數學語句的簡約特徵，使得學生在理解語句的歷程中，必須自行補充省略的部分，才能得到理解（李士錡，2001）。例如，「斜邊相等的等腰直角三角形全等」即省略了量詞的部分，學生可能要自行補充「『兩個』斜邊相等的等腰直角三角形全等」，才能理解該語句。

動詞名詞化的特徵，則使得學生在理解語句時，必須將名詞轉成某個運算或某個操作過程，如此才能理解該語句。例如，學生必須將名詞化的數學短語「二旋轉的合成」（the composition of two rotations）中名詞的「旋轉」（rotation）與「合成」（composition）轉成動詞的「旋轉」（to rotate）與「合成」（to compose）以理解該數學短語（Laborde, 1990）。

在數學符號方面，Rubenstein 與 Thompson（2001）認為符號的特徵，例如：「一個符號的發音常不止發出一個語詞的音」、「一組符號常有多種念法」、「有些符號的唸法不是單一線性的」、「一樣的符號可能有不同的唸法」等，會造成學生認識符號唸法的困難。在此情況下，可以想見若教師於課堂中唸出這些符號時，學生可能是成功無法接收、理解的。Rubenstein 與 Thompson 也認為「一樣的符號可能有不同的意義」、「同樣形式之符號可能代表不同的意義」、「一意義可以用不同的符號加以表示」等特徵，會造成學生閱讀與理解上的困難。此外，他們提出學生在書寫符號時發生的困難，例如：使用的語法結構錯誤（use incorrect syntax）、給出如「12×2=24+3=27」的接續語句（produce run-on sentences）、錯誤地使用分配率等。

四、教師使用數學語言的情形

數學教材與文字題中的數學語言具有上述特徵而影響著學生的理解，教師在課堂中使用數學語言的情形又是如何呢？

在數學詞彙的使用方面，Raiker（2002）根據 Shuard 和 Rothery 對數學詞彙（mathematical words）的分類，即數學專門詞彙（technical words）、詞典詞彙（lexical words）、日常生活詞彙（everyday words），探討教師在數學課堂中使用數學語言的情形。Raiker 的研究顯示，教師在語句中使用這三類數學詞彙的頻率很高，但他們使用各類數學詞彙時，常常不會意識到某些關鍵語詞（key vocabulary）可能對學生理解造成影響，他們沒有留意到這些數學語詞需要經過教學，也沒有執行對這些數學語詞的教學，而讓學生了解這些數學語詞也不在其教學目的中。

Street（2005）觀察課堂中的師生對話後，對教師使用語言的情形有以下詮釋：探討數學語言時，許多焦點被放在正確性（correctness）、形式化（formal）、明確（lack of ambiguity）等特徵上，但教師實際在課堂中，會

1. 使用固定形式的互動模式，例如以 IRE 模式（initiation-response-evaluation）進行回饋或提示，並使用較不形式化（informal）、較接近日常生活對話（dialogic）的語言，以促使學生提問或說出其困惑的點
2. 討論數學的原則、法則時，使用日常生活用語，例如：嗯（yeah）等，以降低語句的進展速度，但卻不影響其精確的特徵
3. 提供較不絕對的句法，例如使用較和緩、模稜兩可的用語：會是（would be）、可能是（might）等
4. 同時使用多種不同的溝通模式，例如：動作與手勢（gestures）、實物（objects）、圖形（draws）等
5. 溝通時，會利用一些語詞做取代而提供短於原語句的話語，例如：以「這個」、「那個」取代某些以語言直接敘述會較為複雜的物件。也會使用一大段話語取代原語句，例如加入一些日常生活用語。

由 Street 的研究看來，教師在數學課堂中使用的語言，有時並不是與教材相同的形式化、結構複雜、數學化的語句。教師會使用某些較不精準、較含糊的語言。另一方面，教師也藉由其他的溝通模式，例如：動作或手勢，或者像日常生活的會話一般，藉由一再重複描述的方式，來幫助、補充其語言（Laborde, 1990）。

雖然 Street 的研究顯示教師會使用某些較不精準、較含糊的語言，再輔以其他溝通方式，來增進學生的理解。但臺灣中學數學教師仍會在數學課堂中使用與數學課本語句複雜度差距不大的語句，例如，數學課本所使用語句「L 會垂直平分所有對稱點的連線」，而教師數學課堂中實際使用的

語句則改為「L 會垂直平分兩個對稱點的連線」(Hsieh, Wang, & Wu, 2008),僅將「所有」改成「兩個」。而吳秀萍(2004)的研究中,其所觀察之中學數學教師於課堂中使用的語句,具有語法結構複雜度高、語句中含有許多數學物件、形式化等特徵,他們使用與課本相同的語句,例如,「以 A 為圓心,線段 $\overline{AB}$ 為半徑畫圓」、「兩平行線之間的距離處處相等」、「大於 $\overline{AB}$ 的一半為半徑」、「一直線如果垂直於平行線中的一條直線,必定垂直於平行線中的另一條直線」等,教師也使用語法結構較課本之「$\overline{AB}$ 的垂直平分線 L 上任意一點 P 到 A、B 的距離相等」更為複雜的「一個線段的垂直平分線上的任意一個點到這個線段的兩端點距離會相等」。研究甚至發現,除了陳述性質的數學語句之外,教師解釋、說明性質的數學語言亦相當複雜,其中不乏引用陳述性質的數學語句,整體而言,數學物件的密度也相當高。

> 「一個線對稱圖形,對稱軸是一組對稱頂點連線的…垂直平分線。對不對?對稱軸…A、B 是對稱點,所以對稱軸是對稱點連線的垂直平分線,這是利用對稱圖形…線對稱圖的觀念來講。…
>
> 菱形的對角線不但互相垂直而且也會互相平分,那你看…我看這條對角線就好(師指著$\overline{\mathrm{AB}}$),這個對角線…這條線(師指著$\overline{\mathrm{CD}}$)垂直 AB 而且又把 AB 平分,所以這條線(師指著$\overline{\mathrm{CD}}$)是 AB 的垂直平分線,所以我們這樣所畫出來的直線 CD 的確是線段 AB 的垂直平分線…」

五、數學語言教學活動

依 Street 的說法,教師有許多方式可以降低語句的難度,以幫助學生理解。

有些研究建議教師使用數學語句時,應注意所用語句之語義結構為何,盡量使語句所呈現的語義關係明確,如此才能讓學生產生恰當的心像,以

理解該語句（De Corte, Verschaffel, & De Win, 1985; Ellerton & Clarkson, 1996）。

而 Herbel-Eisenmann（2002）的研究指出師生於數學課堂中口頭溝通如何解題時，在學生掌握「正式數學語言」之使用前，師生可用「過渡性數學語言」，例如，不以「斜率」指稱 $y = ax + b$ 的 a，而是使用「x 旁邊那個數字」，來進行溝通。而這樣的歷程也幫助學生走向「正式數學語言」之掌握。

但教師不需要教會學生理解像「$\overline{AB}$ 的垂直平分線 L 上任意一點 P 到 A、B 的距離相等」這樣形式化、含有許多數學物件、語法結構複雜的語句嗎？

Chapman（引自 Herbel-Eisenmann, 2002）認為學習數學需要經歷由較不數學化的語言轉變成較數學化的語言之歷程，而臺灣的中學數學教師在其教學中也常使用較數學化、結構較複雜的語句，可見教師並不滿足於僅使用複雜度較低的語句，或認為學生不理解較數學化、結構較複雜的語句是可接受的情形。但教師應怎麼教才能讓學生理解教師或教材中所使用的數學語句呢？

許多學者認為為使學生理解數學語句，使學生理解語句中的數學語詞是很重要的，並提出教師需要對語句中的數學語詞進行明確的教學（Barton & Heidema, 2000; Barwell, 2005b; Carter & Dean, 2006; Gough, 2007; Raiker, 2002）。Raiker 認為數學教師應該隨時意識到自己使用的語言，當關鍵數學語詞出現時，應提醒學生，並進行教學。教師應在其教學計畫中仔細規劃該數學語詞的教學，並將使學生了解此數學語詞視為教學目標。Barwell 認為教師在使用數學語言時，應先設法了解學生已經知道哪些數學語詞，對這些數學語詞理解的深度如何，並將新的數學語詞教學奠基在這些學生已知的語詞之上。

Barton 與 Heidema（2000）認為為幫助學生理解數學語句，應使他們熟悉數學語句的形式。他們提供了兩個幫助學生熟悉語句形式的教學活動。其一，數學教師製作寫著不同方程式的小卡，要求學生針對自己拿到的小卡寫出三個不同的文字題，此程序反覆進行數次，課後教師針對每位學生選出他所寫最好的文字題敘述。在下次上課時讓學生交換寫著最好文字題敘述的小卡並解題。其二，教師可讓學生分析文字題，要求學生回答題目提供了什麼訊息、要求的是什麼等問題，並要求學生畫出關鍵語詞，思考哪些語詞的存在是必要的，或是哪些語詞理解該題目所必須的。此二方法提供學生使用數學語詞的機會，並使學生熟悉文字題中的數學語句之結構。Barton 與 Heidema 也建議教師應分析、評鑑自己提供之教材中的數學語句，以了解是否需要修改這些語句，他們也建議教師應花時間教學生如何應付結構複雜的數學語句形式。

Laborde（1990）則針對培養數學語言之閱讀能力提供兩個教學活動，其一，給學生含有多餘資訊的題目，要求學生解題，其二，給學生一份描述未教過之新數學概念或新數學語詞的文件，要求學生在該文件的協助下解題，或要求學生提供一份適合給其同學之新的描述文件。這兩個教學活動可以幫助學生培養分析所閱讀之數學語言的能力。

Pimm（1987）認為除了幫助學生理解數學專門詞彙（formal terms），理解數學的描述方式（modes of expression），例如：「若…則…」等語句形式，教師也應幫助學生學會自行使用數學語言。Barwell（2005a）與 Lager（2006）皆認為教師應進行教學生使用數學詞彙的教學活動，包含教學生讀、寫、說。

Laborde（1990）提供兩個教學活動來幫助學生學習使用數學語言。其一，為幾何物件命名的活動（labeling of geometrical objects）：要求 A 在紙上寫出對某個特定幾何物件的描述，要求 B 根據描述畫出幾何物件。其中，要求學生對圖形主要成分進行命名可促進學生以數學語言表達圖形之成

分間的關係。其二，幾何詞彙活動（geometrical lexicon）：進行與上述同樣的活動，但要求學生使用幾何中精準的數學詞彙，幫助學生學習使用精準的數學語言。

在數學符號方面，Rubenstein 與 Thompson（2001）認為數學教師應在引入數學符號之初，給學生機會練習唸或書寫該符號。而在理解符號之意義方面，他們推崇 Siegel 提供的教學活動，即要求學生在閱讀含有數學符號之內容時，停下來對數學符號的意義進行說明。他們也建議教師可以提供學生，或讓學生在學習歷程之中，自行發展可在視覺上連結到符號之意義的過渡性符號，例如：$e^{x}ponent$、$ang\angle e$、$\sqrt{oot}$ 等，以幫助符號之意義的學習。

Zevenbergen（2001）認為教師應提供更多與數學語言相關的教學活動，當學生有越多的機會進行數學語言相關的活動，他們便有更多的機會學會如何解構教師的語言，理解教師的語言。

第三節　數學教學思維與知能

一、數學教學思維

思維的界定為何至今莫衷一是，Dewey（1991）從一個較廣泛的觀點來看，提出任何在腦海的活動（anything that goes on in our heads）皆為思維（thinking）。任樟輝（1996）對腦海中所進行的活動進一步界定，他認為思維是具有意識之人腦對客觀事物的本質、屬性、內部規律性的概括與間接反映。張春興（1998）則認為「思維是憑記憶與想像處理抽象事物的推理歷程；在超越現實的情境之下，分析情境中的條件，從而探求答案以突破困難的歷程經歷」，他的界定中強調了思維的運作流程。

王仲春、李元中、顧莉蕾與孫名符（1995）對思維的界定與任樟輝相當近似，他們認為思維乃是「人腦對客觀事物的本質、相互關係及其內在規律性的概括與間接反映」，他們進一步提出這個思維的運作流程是從感性認識向理性認識的轉化過程，如圖 2.3.1 所示，

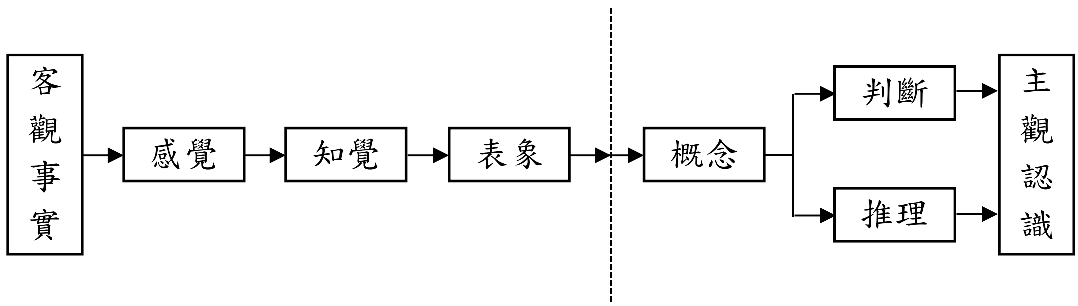


圖 2.3.1　王仲春等提出之思維結構圖

關於教學思維，林福來（1999）針對中學數學職前教師進行研究，對照數學解題及描述數學解題的認知過程稱為數學思維的想法，提出教學即解題的觀點，並認為解決教學問題的認知過程稱為教學思維。他認為教師

要有豐富的數學教學知識、概念，以及富有彈性的教學思維，才能有成效地解決教學問題。

謝佳叡（2001）研究學生認知思維時，根據王仲春等（1995）的結構圖，發展了學生認知思維運作流程，他亦對照發展出，在同樣歷程中，進行教學、對學生展示數學解題的教師，腦中的思維運作流程，如圖 2.3.2 所示，

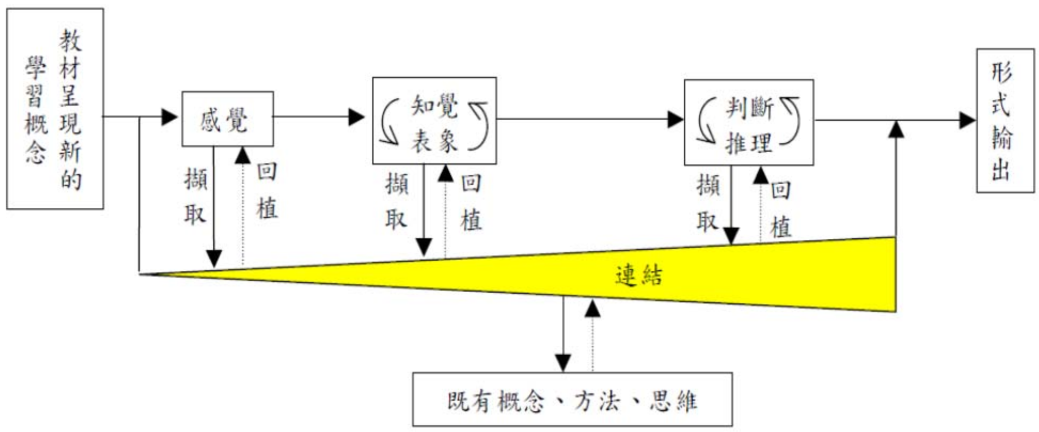


圖 2.3.2　謝佳叡之教師教學（解題）思維運作流程圖

整合林福來（1999）與謝佳叡（2001）的研究，本研究認為可將圖 2.3.2 左邊的刺激改為教學情境所呈現與數學語言相關的問題，來界定本研究的數學語言相關教學思維。

根據前述不同學者或研究者對思維與教學思維的界定，本研究將數學語言相關教學思維的操作型定義界定如下：

<u>**數學語言相關教學思維**</u>

教師面對教學情境所呈現與數學語言相關的問題時，連結腦中的既有概念、經驗，經過感覺、知覺、表象、判斷、推理，而進行形式輸出的歷程。

二、數學教學知能

Shulman（1986）認為教學內容知識（pedagogical content knowledge, PCK）為教師應具備的知識類別之一，該類知識所包含的內容，諸如：用以表徵或闡述學科內容使之能讓學生瞭解的各種方法、使得某個主題的學習困難或簡單的因素為何、某年齡的學生對於某個主題具備的先備知識為何、學生有哪些常見的迷思概念、破除學生迷思概念的策略等；此類知識體現出該學科中與可教性（teachability）密切相關的觀點。

數學學科中，教學內容知識無論在實務面或研究領域都受到相當的重視。以實務面來說，美國 NCATE/NCTM 課程標準（2003）強調數學職前教師必須展現他們具備數學教學知識(knowledge of mathematics pedagogy)，其中包含能判斷適合教給學生的數學課程與材料（teaching materials)，並在這其中考量學生的特殊性，能訂定恰當的學習目標，能採用多種教學策略，能恰當表徵數學概念與程序，能促進課堂討論與互動，能瞭解學生如何學習數學，能使用多樣化的評量方式評量學生理解情形等。美國 Educational Testing Service（ETS）的 Praxis II 系列的測驗項目中，也包含了名為 Mathematics Pedagogy 的項目，用以測驗中學數學初任教師（beginning teacher)應具有的知識與能力,某些州在決定是否給予證照時，也採認該科的考試結果（ETS, 2011)。

在研究領域中，有些學者關注於數學教學內容知識的架構。Ball、Thames 與 Phelps（2008）提出教師教學所需數學知識（mathematical knowledge for teaching）的概念與架構，其架構圖如圖 2.3.3 所示，其架構中關於教學內容知識的部分,包含三類:關於內容與學生的知識(knowledge of content and students, KCS)、關於內容與教學的知識(knowledge of content and teaching, KCT)、以及關於內容與課程的知識(knowledge of content and curriculum)。

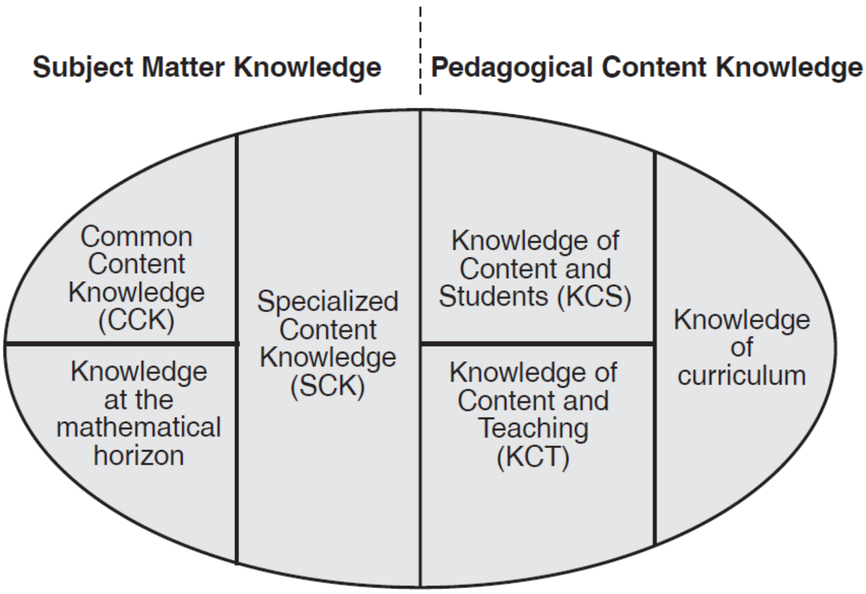


圖 2.3.3　教師教學所需數學知識之架構

關於內容與學生的知識乃是數學內容知識（content knowledge）與學生如何思考、理解、學習內容知識之知識的交織，例如，教師是否具備關於學生如何學習某特定內容、學生在學習此內容的過程中常出現什麼迷思概念等方面知識與能力。關於內容與教學的知識是結合了對數學的理解（knowing about mathematics）與對教學的理解（knowing about teaching），例如，教師關於安排教學材料順序、使用各種表徵的優缺點、哪些例子適合在教學開始時使用而哪些可用以深化學生思考等方面的知識與能力。關於內容與課程的知識主要來自 Shulman（1986）的課程知識（curricular knowledge），包含了解課程中不同主題間的連結，課程與其他學生學習學科的連結，課程的先後次序，以及教學上有哪些課程可選擇（curricular alternatives available for instruction）等等。

本研究決定欲探測的數學語言相關教學能力時，Ball、Thames 與 Phelps（2008）的結構，提供本研究一些想法，特別是他們以內容知識（content knowledge）為基礎，提出關於內容知識本身中與教學特殊相關的知識（specialized content knowledge），以及內容知識關連上學生（KCS）、內容

知識關連上教學（KCT）等方面的知識類別這個部分。當本研究將焦點置於數學語言時，可以從教師關於教學中的數學語言本身、數學語言關連上學生、數學語言關連上教學等面向去探討。

謝豐瑞（2009）發展數學教學能力（mathematics teaching competence, MTC）之結構，她採用「能力」（competence）一詞而不採「知識」（knowledge）一詞，因為她認為前者才能恰當地詮釋他所要描寫的各種與思考、推理、判斷、執行數學教學的運思（Hsieh, Lin, & Wang, 2012）。與其他研究者不同，謝豐瑞（2012b）發展結構時，認為應從最根本的議題出發才能得到真正的瞭解，為此，她先找出數學教學中的重要內容與議題，以及人類的不同能力類型。她經由研究找出 20 項數學教學中的重要內容及議題，稱之為「數學教學元素」（element），例如，數學能力、數學表徵、數學學習動機、數學課程等。關於能力的部分，她以最終能「理想的上場教學」為立基，發展三項重要的數學教學能力運算（operation）：認知與理解、推理與思考、概念化執行（謝豐瑞，2009）。她並提出三個核心焦點（kernal），即學習（learning）、教學（teaching）、本體（entity），來搭配上述之運算與元素，以建立數學教學能力的項目（謝豐瑞，2012b）。舉例來說，以「認知與理解」運算作用於「數學思考」，在核心焦點「學習」上，「知道學生數學思考的特徵」是一個可能的教學能力，在核心焦點「教學」上，教學能力可以是「知道在課堂上如何使學生自然而然的跟著老師的教學而思考」，在核心焦點「本體」上，可以得到教學能力「知道數學思考和其他學科領域的思考之異同」。若將運算改為「思考與推理」，在「學習」上，可以得到「能判斷學生的數學思考型態」，在「教學」上，可以得到「能根據學生思考特徵調整教學」。若再將運算改為「概念化執行」，以「教學」為核心焦點，「能安排可以發展學生數學思考能力的教學」便是一個可能的教學能力（謝豐瑞，2009）。

教師的數學教學知識具備情形影響他們的教學效能，也影響他們的學生數學成就（Capraro, Capraro, Parker, Kulm, & Raulerson, 2005; Hill, Rowan,

& Ball, 2005），故而，研究教師的數學教學知識具備情形有其重要性，也是許多研究的焦點。不同研究所關注的數學教學知識不同，有些研究探討數學教師關於建立學生的數學概念、增進學生數學思考與反思的知能（An, Kulm, & Wu, 2004; Capraro, Capraro, Parker, Kulm, & Raulerson, 2005）；有些研究探討數學教師是否能分析學生學習情況、瞭解學生迷思概念的知識（An, Kulm, & Wu, 2004; Koirala, Davis, & Johnson, 2008）；有些研究關注數學教師設計幫助學生概念發展、促進學生參與數學學習之教學活動的能力（An, Kulm, & Wu, 2004；Capraro, Capraro, Parker, Kulm, & Raulerson, 2005）。在多數研究中，研究者發現他們所探測的數學教師對數學教學內容知識的具備並不充分，例如，Capraro、Capraro、Parker、Kulm 與 Raulerson（2005）便發現有些數學教師無法辨識適合幫助學生發展所要發展之技能的教學策略；Cankoy（2010）則發現有些職前教師無法提出以培養概念為基礎的教學策略，他們提出的策略往往僅能教學生進行程序性、機械性的記憶；而 Borko 等（1992）發現有些數學教師缺乏恰當表徵其所要教之主題的能力。

三、跨國研究

An、Kulm 與 Wu（2004）比較中國與美國中學數學教師的教學知識，發現兩個國家的差異甚大。在中國，數學教師能否提供學生正確的概念性知識（conceptual knowledge）很受重視，而美國的系統，則重視他們的數學教師能否設計多樣化的教學活動來培養學生之創造力與探索問題的能力。相較於中國，美國數學教師缺乏幫助學生連結實際運算、操作與抽象思考的能力，也無法幫助學生串連他們的概念發展與程序發展。

從這個研究可知，透過跨國比較，不同國家的差異使得各參與國的特質得以顯現。謝豐瑞（2012a）認為，在跨國研究中，參與的國家能檢視其國家與其他參與國之狀況，比較彼此間的異同，這類研究使得參與國得到

從國際觀點詮釋自己國家狀況的機會，也得到與單一國家研究不同的參考基準與反思角度。

「21 世紀數學教學跨國研究」（Mathematics Teaching in the 21Century, MT21）為跨國性研究，共有臺灣、保加利亞、德國、韓國、墨西哥、美國六個國家參與，它探討數學職前教師關於課程知識（curricular knowledge）、教學實務知識（instructional practice knowledge）、學生學習知識（knowledge about student learning）等方面的數學教學知識。其研究結果顯示，臺灣在這三個領域中的排名分別為一、二、二，高出國際平均（設定為 500）皆約 0.4 個標準差（1 個標準差設定為 100），而美國則皆在國際平均附近，差距在 10 之內（謝豐瑞，2011；Schmidt et al., 2011）。

數學師資培育跨國研究（Teacher Education and Development Study in Mathematics, TEDS-M）為 MT21 之後一個重要的跨國研究，共有 15 個國家，即臺灣、波札那、智利、喬治亞、德國、馬來西亞、挪威、阿曼、菲律賓、波蘭、俄羅斯、新加坡、瑞士、泰國、美國，參與其中中學職前教師的研究。TEDS-M 探測這些國家之職前教師的數學教學知能[6]，其內涵包含「課程與教學規畫」（knowledge of mathematical curriculum and of planning for mathematics teaching and learning）、「執行教學」（enacting mathematics for teaching and learning）兩種層次。在該研究中，臺灣表現為 15 個國家中的第一名，平均得分為 649 分，而美國的平均為 502 分，與國際平均 500 分間無顯著差異，臺灣高出美國的分數將近 1.5 個標準差（一個標準差設定為 100 分）。然而，該研究的結果也發現臺灣中學數學職前教師在某些題材上，具備充分的數學知能，但對該題材相關的數學教學知能上卻有所不足，例如，部分職前教師對於某些題材，無法正確分析其中哪些子內容或程序為學生所需之先備，也有部分職前教師無法正確分析題目對所要教的

[6] 國際 TEDS-M 稱之為 mathematics pedagogical content knowledge（MPCK），數學教學知能（mathematics teaching competence）為 TEDS-M 臺灣國家代表謝豐瑞教授認為較恰當描述所探測之內涵的詞。

學生困難點為何。對於部分題目，具備數學知能的職前教師中，能同時具備相關數學教學知能的比例，臺灣甚至低於美國（謝豐瑞，2012a)。

四、數學語言相關教學能力

Learning Mathematics for Teaching（LMT）Project 發展了一系列觀測教師課堂教學的向度與編碼，來看教師的數學教學品質，數學語言（mathematical language）亦為其觀測的向度之一，包含兩個大類，在課堂中，(1)教師使用數學專門用語(techinical language)及以一般用語(general language）表達數學內容的情況；以及（2）教師教數學語言如何使用與其意義為何的情況(Learning Mathematics for Teaching, 2006)。由此可知，教師數學語言相關教學能力有其重要性。

數學語言（mathematics language）在 Hsieh（in press）的數學教學能力（mathematics teaching competence）結構中，亦為重要的元素之一，搭配其結構中的運算（operation）與核心焦點（kernal)，將可發展各種對教師而言重要的數學語言相關數學教學能力。本研究在發展欲探測職前教師數學語言相關教學能力時，這個結構提供我們一些想法與實際可行的做法。

本研究參考謝豐瑞（2009）之數學教學能力結構，取其運算作用於元素的想法，據以界定數學語言相關教學能力。本研究以其 20 項數學教學元素（element）之一的「數學語言」做為本研究的元素。關於數學教學能力運算(operation)上，本研究基於教學乃高度行動導向這項特質(teaching is highly action-oriented; Schmidt et al., 2011)，而數學語言又有其在課堂中重要的實踐(practical)面向，故而發展與實際課堂情境的執行相關度較高的運算，擬定「執行」與「推理與判斷」為本研究的運算。是以，本研究之數學語言相關教學能力的操作型定義如下：

數學語言相關教學能力

以「執行」與「推理與判斷」兩個數學教學能力運算作用於數學教學元素「數學語言」上，所展生出的數學教學能力。

另外，就實徵性研究的結果來看，Hill、Sleep、Lewis 與 Ball（2007）認為教師必須具備在課堂中精準地使用數學詞彙（mathematical terms）的能力，也必須具備在學生的家庭日常用語（home language）、非正式數學語言（informal mathematical language）、學科中的數學語言（disciplinary language）間進行轉譯（translate）的能力，並且，教師必須知道學生不盡然瞭解教師在課堂中所使用的數學語言，而他們的研究結果發現，教師在這方面的能力頗有差異。

第三章　研究方法

第一節　研究架構

本研究包含兩個部分，第一部分針對職前教師的數學語言相關教學思維，第二部分則針對職前教師的數學語言相關教學能力。本研究的架構圖如圖 3.1.1 所示。

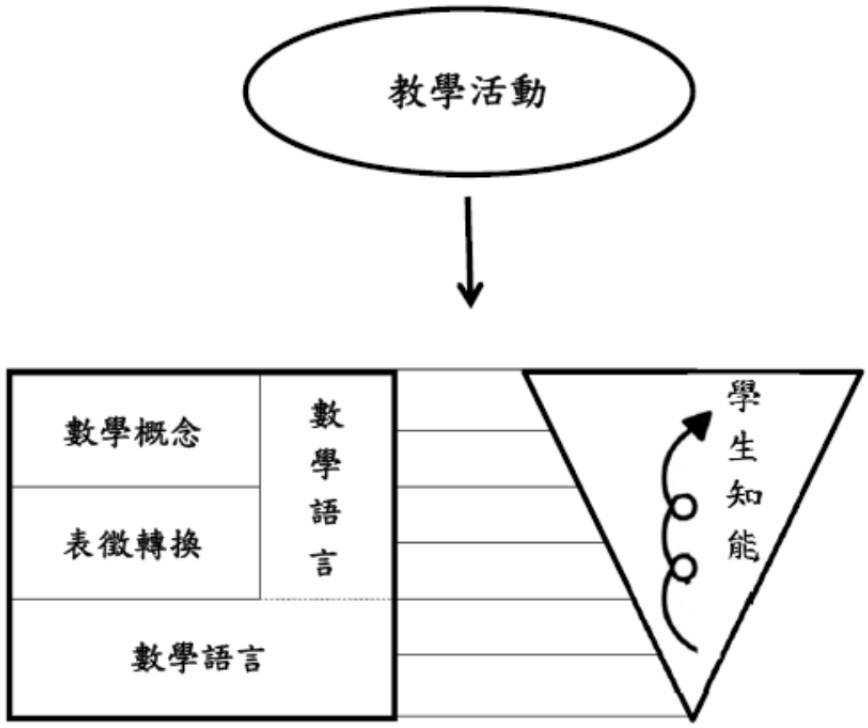


圖 3.1.1　職前教師數學語言相關數學教學能力架構圖

本研究參考 Ball、Thames 與 Phelps（2008）的結構及謝豐瑞（2009）的結構，在本研究的架構中，考量了數學語言、學生、教學活動等成分。

左方的方形為數學語言的部分，在教學中，數學語言用以傳遞數學概念或數學語言本身，也用以進行表徵間的轉換，有時數學語言是一個傳遞

工具，有時它同時兼俱傳遞工具與被傳遞的主體兩個角色。在本研究中，將以文字敘述為主的數學語句為探討的主體。

右方的三角形是學生的部分，表示學生的知能（知識及能力）在學習中提升，此處知能指的是與數學語言相關的知能，除了具有某些數學語言的知識，例如，認識與理解某些數學語言外，根據 Niss（2003）的界定，有一類能力與處理和操弄數學語言有關（deal with and manage mathematical language），本研究將範疇數學語言進一步聚焦到與文字敘述為主之數學語句有關的部分，所包含者，例如，理解與使用數學語句（涉及解碼、詮釋、辨析）、理解與使用數學語句與其他表徵間的關係、能進行數學語句與其他表徵間的轉換等等能力。

中間的橢圓是教學活動，方形與三角形中間的線段越來越短，象徵教學活動使得學生與教師數學語言的距離越來越近。

由於教學乃高度行動導向的（teaching is highly action-oriented; Schmidt et al., 2011），本研究聚焦於與課堂實際情境相關度較高的部分，來擬定欲探討的教學思維與教學能力。並參考數學語言相關文獻中廣為探討的議題，以訂定欲探測之職前教師教學思維與教學能力。

A. 應進行數學語言之教學

Chapman（引自 Herbel-Eisenmann, 2002）認為學習數學需要經歷由較不數學化的語言轉變成較數學化的語言之歷程，亦即，學生最終必須學習較為形式化的數學語言，以融入數學的社群中（Barton & Heidema, 2000）。故而，教師應該針對數學語言進行教學。在 LMT Project 中，教師是否明確進行數學語言的教學也成為教師數學教學品質的觀測點之一（Learning Mathematics for Teaching, 2006）。

B. 學生能理解的數學語言

文獻中提出數種建議教師簡化其數學語言的方式，以促進學生理解該語言。例如，教師可以使用較不形式化的語言或較口語化的語言，也可以減緩其語句進展速度等（Herbel-Eisenmann, 2002; Street, 2005）。

C. 教數學語言的教學活動

文獻中建議了數種進行數學語言教學的方式與活動，並提出這些活動可以培養學生哪些數學語言能力（eg. Laborde, 1990; Rubenstein & Thompson, 2001）。

D. 影響學生理解的數學語言特徵

文獻中提出數個影響學生理解數學語言的數學語言特徵，例如，語句中使用的數學詞彙（Carter & Dearn, 2006）、名詞化的量、語句中數學物件關係的複雜程度等（Laborde, 1990）。

本研究欲探討的教學思維與教學能力皆是與實際教學情境較為相關的，而實際教學情境又往往涉及材料、學生、教學的融合，故而，這些思維與能力對應到圖 3.1.1 中，會同時與一個以上的成分關連。

一、數學語言相關教學思維

關於職前教師數學語言相關教學思維，本研究針對以下三項進行探討，它們分別從研究架構中的三個成分出發（參閱圖 3.1.1），

1. 從學生知能的角度出發，探討職前教師對文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制之思維
2. 從教學活動的角度出發，探討職前教師對學生知能、教學活動、文字敘述數學語句在教學中的機制之思維

3. 從數學語言的角度出發,探討職前教師對學生知能在文字敘述數學語句之組成與特徵的機制之思維

二、數學語言相關教學能力

在哪些數學教學能力為本研究探測的重點方面，本研究參考謝豐瑞（2009）發展數學教學能力的方式，透過運算作用於元素，擬定本研究所欲探測之數學語言相關教學能力。

關於元素，本研究選擇「數學語言」。關於運算，本研究聚焦於與課堂實際情境相關度較高的部分，故以「執行」運算為一重點，擬定四項數學語言教學能力以探測職前教師在這些能力的具備情形；然而，職前教師在課堂中所做的「執行」，又往往基於他對課堂中情境所做出的推理與判斷，判斷、推理能力的好壞，很可能對課堂執行造成影響，因此，本研究亦探測職前教師在此方面的能力，故以「推理與判斷」運算為另一重點，擬定二項數學語言教學能力以探測職前教師在這些能力的具備情形。

本研究探測職前教師數學語言相關教學能力共有六項，

運算「執行」:

1. 能選擇應教給學生的數學語言
2. 能選擇應教給特定數學程度學生的數學語言
3. 能使用學生可以理解的數學語言
4. 能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動

根據文獻指出，教師應對數學語言進行明確的教學（A)，故而本研究擬定教學能力 1，探討職前教師是否具備能恰當選擇應教導之學生數學語言的能力。然而，文獻亦討論數學語言所具有的特徵影響了學生的理解，

使得數學語言對學生而言有其難度（D），故而，本研究擬定研究問題 2，探討職前教師在知道學生知能較弱的情況下，能否恰當選擇應教導學生之數學語言。既然數學語言對學生而言有其理解上的困難，教師能否使用學生可理解的語言便成為一個重要的議題，文獻指出數種教師能簡化數學語言，以促進學生理解該語言的方式（B），本研究擬定教學能力 3，探測職前教師此能力。根據 A，數學語言是必須教給學生的，基於此，教師使用怎樣的方式或活動可以有效地教會學生數學語言便是項重要的能力（C），本研究擬定教學能力 4 來探測職前教師此能力。

運算「推理與判斷」

5. 能判斷影響學生理解數學語言的因素

6. 能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素

如同前述，職前教師的推理與判斷有其重要性，在執行的部分，本研究探討職前教師在選擇要教的數學語言、使用數學語言、選用教學活動等方面的能力，在這些執行中，哪些因素會影響學生理解數學語言，應是職前教師重要的考量，應進行的判斷、推理，故而，基於文獻 D，本研究擬定了教學能力 5。當職前教師選用了教學活動時，本研究也欲探討他們背後基於怎樣的理由做選擇，能否正確判斷、推理選擇的活動何以能有效幫助學生學習數學語言，故而，本研究擬定了教學能力 6。

第二節　研究工具

本研究為臺灣、美國合作之 TEDS-M 延伸研究（extension）的一部分，臺灣、美國中學數學職前教師在參與 TEDS-M 的施測後，參與 30 分鐘的後續研究施測。

本研究將欲探測的教學能力與教學思維設計為兩個題組，分屬延伸研究的兩個題本中，兩個題本隨機平分給參與的職前教師。

由於在選擇欲探測的數學語言相關教學思維與能力時，聚焦於與課堂實際情境相關度較高的部分，故而，在設計施測題目時，會設定教學情境於其中。

由於函數為中學數學課程中相當重要的一個主題，其表徵方式相當多樣化，以文字敘述為主的語句表徵方式或以數學符號為主的式子表徵方式皆是重要的數學語言，比較這兩種表徵，相對而言，文字敘述表徵較具一般性與結構性，而式子表徵則較具程序性、可操作性。本研究因此設計函數表徵為數學題材的教學情境[7]，探測職前教師與運算「執行」有關的數學語言相關教學能力：「能選擇應教給學生的數學語言」和「能選擇應教給特定數學程度學生的數學語言」，以及與運算「推理與判斷」有關之數學語言相關教學能力：「能判斷影響學生理解數學語言的因素」。職前教師關於文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制有何思維，也在此情境中加以探測。

另一個題組的數學題材為平方根算則，其式子表徵對學生而言應不算難，學生多半能學會做此運算操作，但在課本中的文字敘述卻是即使教師也會感覺複雜的數學語句。本研究因此選擇平方根算則來設計教學情境，設計題目探測職前教師與運算「執行」有關的數學語言相關教學能力：「能使用學生可以理解的數學語言」、「能選用可以提升學生理解數學語言之能

7 該題目初始由謝豐瑞教授設計，本研究在其同意下，將之修改以為本研究所用。

力的教學活動」，以及與運算「推理與判斷」有關之數學語言相關教學能力：「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」。職前教師關於學生知能、教學活動、文字敘述為主的數學語句在教學中的機制有何思維，以及他們關於學生知能在文字敘述之組成與特徵的機制有何思維，也在此情境中加以探測。

施測題目由本研究設計，並將之翻譯為英文版本。中英文版本皆提供給美國的 TEDS-M 團隊，檢視題目設計及翻譯的恰當性，兩個國家達成共識後，題目才算設計完成，得用以施測。

第三節　研究樣本

本研究之研究樣本為臺灣、美國 TEDS-M 中學數學職前教師樣本的子集（sub-sample）。

在 TEDS-M 的設計中，研究對象為在師資培育學程最後一年訓練中的中學數學職前教師，抽樣計畫採用的是分層多階段概率抽樣設計（Stratified Multi-stage probability sampling design），抽出之職前教師能反映當年度職前教師的分佈與結構，為具有國家代表性的樣本[8]（Tatto et al., 2009）。先依樣本大小成比例之原則進行抽樣（sampling with probability proportional to size, PPS），抽出師資培育機構，再於機構中以隨機抽樣或普查的方式選出中學數學職前教師。臺灣扣除極小型機構，使扣除之職前教師數小於總數 5%的情形下，進行普測，共有 365 位職前教師參與 TEDS-M 研究，來自 19 所機構。美國則有 607 位職前教師參與 TEDS-M 研究，來自抽樣之 46 所機構。

本研究的樣本乃由臺灣、美國的全體樣本中隨機抽出，最後共有 161 名臺灣中學數學職前教師、172 位美國中學數學職前教師參與研究。

臺灣與美國的中學數學職前教師皆屬分科培育（specialist）。臺灣所培育之中學數學職前教師可教授國中或高中，即 7-9 年級或 10-12 年級之數學。美國的中學數學職前教師培育則分有兩類學程，一類所培育之職前教師可教授 4-9 年級數學，另一類所培育之職前教師則可教授 6-12 年級（Tatto et al., 2011）。本研究的美國職前教師樣本中，24%來自第一類學程，而 76%來自第二類學程[9]。

8　美國僅公立學校參與 TEDS-M 研究。

9　未加權之比例。

第四節　資料處理

一、數學語言相關教學思維

（一）資料分析的基本概念與作法

關於職前教師在教學中與數學語言有關議題的思維，本研究以開放式問題詢問職前教師，所得之資料乃職前教師本身提供的文本（text），職前教師透過這些文字呈現其思維，而字裡行間也透露著職前教師的思維。本研究認為對這些資料進行內容分析（content analysis）為探究出其思維的適當方式（Patton, 2002）。

Patton（2002）認為內容分析的精神在於將看似隨機的資訊（seemingly random information），進行化約（reduction）並擷取所透露的意涵（sense-making），以找出資料中隱含的中心價值與意義（core consistencies and meanings），亦即，識別（identify）出這些資料所呈現的模式（patterns）與主題（themes）。而歸納分析（inductive analysis）是找出這些模式與主題的方式。本研究藉由將職前教師資料歸納成適當類別（categories），使得資料中蘊含的模式與主題得以浮現（emerge out），而這些類別、模式、主題的呈現，也使得職前教師關於教學中數學語言相關議題的思維，包含概念（concepts）、性質（properties）、面向（dimensions）等，也得以表徵。

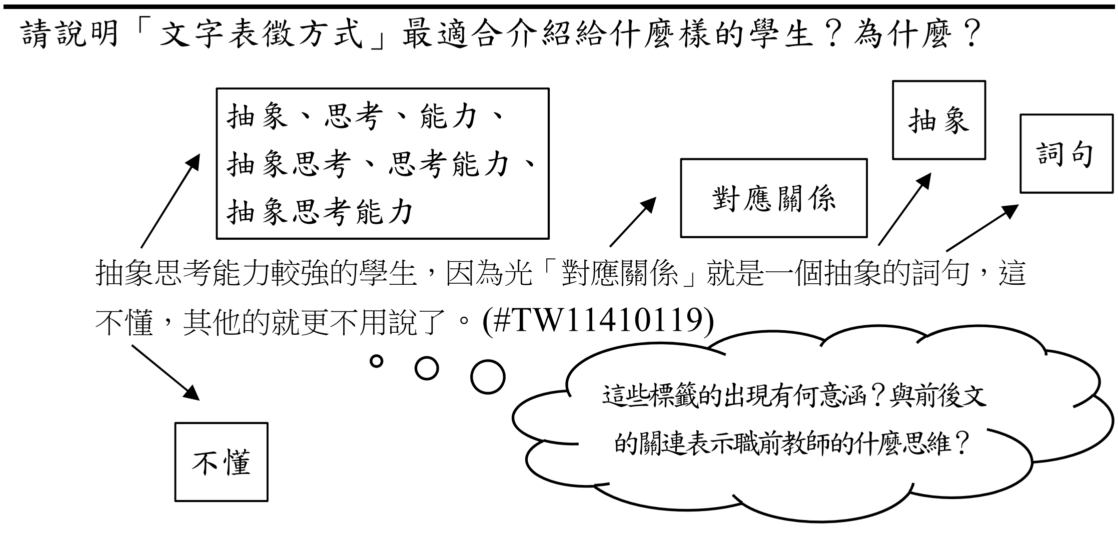
本研究因同時包含臺灣、美國兩個國家的職前教師資料，故而分析時，也參酌質性比較分析（Qualitative comparative analysis, QCA）的精神，考量兩個不同國家的職前教師帶有豐富的不同脈絡背景（context-rich），進行歸納分析的歷程中，顯現（the presence）與不顯現（the absence）類別、模式、主題，都是關注的焦點。在此分析下，兩個國家資料的獨特性（uniquenesses）與共通性（commonalities）得以浮現，兩國職前教師思維

中的概念、性質、面向等的共有特質（conjunctural characters）、脈絡下特殊特質（context-specific characters）也得以呈現（Patton, 2002）。

（二）資料分析的進行

發展可運作的類別（classification）與編碼（coding scheme）是內容分析的第一步（Patton, 2002）。編碼的過程涉及一次又一次地閱讀、接觸職前教師資料，在這個歷程中，一開始研究者感知（sensing）、看見（seeing）職前教師資料中重要的、值得注意的資訊顯現（something important or noticeable is occurring），這些資訊乃由一些詞彙、詞彙的組合表徵，每個詞彙都是一張標籤（label），如表 3.4.1 所示。具有同一詞彙的資料會被貼上同一張標籤，組織在一起，就像為一本書做索引一樣。

表 3.4.1　資料分析示例（一）



職前教師所用詞彙間的關連性、類似性在這個歷程逐漸顯現出來，凸顯出一個一個他們所描繪的題材（topic），類別與模式逐漸浮現，如表 3.4.2 所示。編碼過程乃是一個「視…為…」（seeing as）的過程（Patton, 2002），當一個一個的類別形成時，每一份新的資料，都在這個「視…為…」的過

程中與現有的類別、模式產生關連（link），他們可能現有的類別具有相近的意義，而分入現有類別、模式中，豐富了該類別的內涵，也可能提供了浮現新模式的機會（a new or emergent pattern; Patton, 2002）。

表 3.4.2　資料分析示例（二）

請說明「文字表徵方式」最適合介紹給什麼樣的學生？為什麼？

轉化、轉換

這些類別的出現有何意涵？代表職前教師什麼思維？

- 會將文字轉化成圖形之學生…（#TW11510112）
- 程度較高，能把文字很快轉成數學式子（#TW90710102）
- 文字式本身就不比圖解來的容易明瞭，學生需先將文字轉換為數學語言…（#TW11510121）
- …想像力豐富的學生，能直接在腦海中，將題目型式由文字轉譯成符號、影像，深入理解。（#TW11910102）
- Students that can learn from lecture, put words into symbolic language and create an equation from it.（#US11820101）
- Advanced level students would be capable of using to words and representing them visually to show they understand（#US10730122）

圖形、影像…　　、　　符號、式子…

本研究考察每一個類別的浮現代表意義為何，也考察不同的類別組合、關連代表職前教師的何種思維，藉由這樣的方法，本研究分析職前教師關於「文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制」、「學生知能、教學活動、文字敘述為主的數學語句在教學中的機制」、「學生知能在文字敘述之組成與特徵的機制」所浮現的思維。

二、數學語言相關數學教學能力

在數學語言相關數學教學能力的部分，本研究經過焦點團體討論決定各選擇題的正確答案及配分。

關於開放題的部分，本研究參考前一部分所描述的歸納出之思維，並重新檢核職前教師資料發展編碼系統，並給予每個編碼得分，藉此系統來編碼職前教師的回答。當分類的編碼系統完成後，本研究將之提供給美國的研究團隊，由他們檢核該系統是否能用以恰當分類、結構美國職前教師資料，給分是否能恰當地呈現美國職前教師的能力。當兩個國家的共識達成時，編碼系統才算真正完成，正式的分類工作也才展開。關於此編碼系統的詳細情況，本研究將於報導該題目時呈現。

在正式的分類工作中，本研究使用多個分析者重複審查資料的三角測定（triangulation）方式，以確保分類的信度與分析的品質。臺灣、美國的資料除研究者外，另有一位曾進行數學語言研究的中學數學教師獨立進行編碼，美國的資料還有美國的研究團隊進行的編碼。當兩方或三方所給的編碼不一致時，本研究與專家進行討論，以確認最後的分類。

本研究計算兩個國家職前教師在各題勾選組型或編碼的百分比，也計算兩國職前教師在各數學語言相關教學能力探測題目的答對率。在答對率的計算上，考慮部分得分的情況，舉例來說，若是滿分為 2 分且有部分得分 1 分的題目，各國答對率的計算方式為得 2 分的百分比加上 0.5 乘以得 1 分的百分比。當比較兩個國家的同一數據或一個國家的兩個數據是否有顯著差異時，本研究使用 *t*-test。另外，為了呈現兩個國家在各數學語言相關教學能力的相對強弱，本研究也使用中位數平滑化分析（median polish analyses; Mosteller & Tukey, 1977）。

為更表徵兩國的表現，進行以上統計分析時，本研究採用 TEDS-M 研究提供的職前教師權重（final sampling weights）進行加權。該權重反映出各國的抽樣設計並補償未答率（compensation for non-responses; Tatto et al., 2012）。

第肆章　研究結果

本研究於第一節中，先報導臺灣與美國的職前教師有何數學語言相關教學思維，思維有何異同；再於第二節中，針對數學語言相關教學能力，報導臺灣、美國的表現與異同。

第一節　職前教師數學語言相關教學思維

數學語言在課堂中扮演不同的角色，有時是數學教師用以傳遞數學概念、教學生表徵轉換等的工具，有時也是數學教師所要教學的主體，本節欲探討職前教師有何數學語言相關教學思維。根據研究架構，本研究針對以下三個議題，報導資料中所浮現的職前教師對：(1) 文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制之思維；(2) 對學生知能、教學活動、文字敘述數學語句在教學中的機制之思維；(3) 對學生知能在文字敘述數學語句之組成與特徵的機制之思維。

一、職前教師對文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制之思維

為探測職前教師關於文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制有何思維，本研究設計以函數表徵為數學題材的教學情境。函數有多樣化的表徵方式，教師在教學生函數的數學概念時，可選擇使用不同的表徵方式，選擇的根據可能在於必要性，如課本有或一定得教，也可能在於考量學生的理解等等，針對本研究的焦點「文字敘述」的表徵方式，本研究從學生知能的角度出發，探測職前教師對於具備何種知能的學生適合使用文字敘述表徵的看法，並詮釋職前教師對文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制之思維。在本研究設計的情境中，提供職前教師的數學語句如下，

臺灣：對於給定的一個x值，必有唯一的一個y值和它對應，則稱y是x的函數。

美國：If for a given value x, there is one and only one value y corresponding to it, then we say y is a function of x.

在問卷中以開放性試題詢問職前教師怎樣的學生適合學習此語句。此情境中的設計並非以整體函數概念的發展為焦點，而是以文字敘述這個數學語句及其所承載的概念為教學之主體。本研究藉此題目來探討職前教師文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制有何思維。

本研究採用歸納分析法（Patton, 2002），對職前教師在回答中使用的字詞加以整理、分類，並考察其字裡行間透露的訊息，找出資料中隱含的中心價值與意義（core consistencies and meanings），浮現以下職前教師關於文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制之思維。

1. 有些職前教師在思考學生學習文字敘述之數學語句時，連結到學生需要產生文字與概念、知識的連結以產生語義之思維

職前教師思考學生學習文字敘述之數學語句時，並非天真地覺得學生閱讀過去就會懂，他們知道學生必須在腦中連結語句或語句一部分之相關概念、知識，才能產生語義，因而理解語句。以下兩位職前教師的回答，為此提供了線索，

> 對於文字描述可了解其中涵義的學生。現今學生的狀況對於閱讀有很大的困難，很多人唸完一個句子卻不懂它要表達的意涵，對句子的描述無法做認知上的聯結，故適合介紹給可了解文字意涵的學生。
> （#TW90510102）

> 對文字邏輯較強的同學。Ex:國文程度中上的學生。∵將文字轉化為概念是需要語文能力的。（#TW11610120）

他們認為學生要理解文字敘述之數學語句需要有認知上的聯結，要連結相關的概念、知識。

2. 有些職前教師在思考學生學習文字敘述之數學語句時，思維中會連結其他表徵，進行關連或比較

職前教師考慮學生學習文字敘述之函數表徵的機制時，思維中其他函數表徵會浮現出來，例如圖像、符號、實例等（參閱表 4.1.1）。

表 4.1.1　職前教師思維中浮現的文字敘述外之函數表徵

職前教師浮現之表徵	職前教師編號
圖像、圖象	#TW90410108、#TW11810105、#TW90810108、#TW11610127
圖形	#TW11510163、#TW11610112、#TW11510112
圖	#TW90610104、#TW11610103
picture	#US 0230113、#US11220103、#US11520105、#US11820102、#US13540107
pictorial representations	#US13220102
pictorally[pictorially] representative	#US32360127
graph	#US13020109
式子	#TW90410108、#TW90110103
數學式子	#TW11510163、#TW90710102
equation	#US11820101
formula	#US32360127
$f(x)=2x$	#TW11410104
$y=f(x)$	#US11820106
符號	#TW11910102、#TW90010106
數學符號	#TW11710102、#TW90210105
symbolic language	#US11820101
symbolic representations	#US11820102、#US11820106
表	#TW90610104
table	#US11520105、#US32360127
例子	#TW11610101
example	#US10250129、#US14720105、#US14740108、#US14820105
例子（數子[字]）	#TW11510137
實例	#TW11910120
示例	#TW11510157
影像	#TW11910102
visual representation	#US11420104、#US13420104
visual aids	#US13540107
visual methods	#US15810124
visuals	#US14820105
圖解	#TW11510121
manipulatives	#US14820105
kenisthetic[kinesthetic] methods	#US15810124

有些職前教師會**進行文字敘述表徵與其他表徵間的比較**，例如，

Little above average, because there are no pictorial representations, just words and most students need to visually see math to truly understand (#US13220102)

由他的回答可以看出，他認為圖形表徵較文字敘述容易理解。

有些職前教師則認為**其他表徵能幫助文字敘述的學習**，例如，

程度好的。∵文字所描述的數學是抽象的意念，而無具體的表現，介紹給一般學生一定要配合例子。 （#TW11610101）

"自己能"運用抽象想像力，先體會俱[具]體例子（數子[字]）再配合文字。 （#TW1151013）

我覺得應該程度很高的學生才看的[得]懂。國中生知道"對應""唯一"而不必用到圖，我覺得很難懂，慎[甚]至學生不知道在寫什麼。 （#TW11610103）

Algebra one, the students need t[to] learn the words that go with the pictures they see. This is why they have such a hard time at higher level math classes. (#US11220103)

這些職前教師的回答可以看出，他們認為其他表徵，例如數值實例表徵或圖形表徵，有助於學生學習文字敘述。

另外有些職前教師則可能有不同的思維，例如，

介紹給文字敘述比較強的同學，因為他們可能會對數學式子及圖形比較沒感覺 （#TW11510163）

從他的回答可以看出，他認為學生與文字敘述相關的能力（可能是理解，也可能是使用），和與「式子、符號」、「圖形」相關的能力，**是彼此競爭的，互相消長的**。

3. 有些職前教師思考學生學習文字敘述之數學語句時，思維除了能連結到其他表徵的存在外，還連結到學生必須進行文字敘述表徵與這些表徵間的轉換，以理解文字敘述

職前教師認為學生為理解文字敘述，需將文字敘述進行轉換或轉化，如表 4.1.2 所示。

表 4.1.2　職前教師關於表徵轉換的描述

職前教師描述	職前教師編號
轉換	#TW11810105、#TW11710102、#TW90210105、#TW11510139、#TW11510121、#TW11510157、#TW11610127、#TW11410144
轉化	#TW11510112
轉	#TW90710102
化	#TW11410128
put…into	#US11820101
turn into	#US11820106
visualize	#US10620111、#US10730114
represent…visually	#US10730122

有些職前教師認為應將文字表徵轉換為圖像表徵，例如，

> 理解能力較高層次的學生，因為用文字表徵方式，還需將文字表徵轉換成圖象表徵，才可進行解題，若理解能力較差者，則在轉換過程會有困難。　（#TW11810105）

或是例如以下這位職前教師，他的回答中提到“visualize”，呈現出他認為學生讀完文字敘述的數學語句之後，要能將之轉換成其他可「見」的表徵，才能理解該數學語句，然而可見的表徵所指為何種表徵，職前教師並沒有明確說明。

> I think that the ‘words’ representation is more suitable for students who can easily interpret mathematics. It is hard to read words and visualize what they are saying, especially because math can be pretty abstract for students who struggle with the su[…]　(#US10620111)

另外有些職前教師的思維與上述不同，例如，

資優班的學生，或是已初步了解函數的概念。因為他們可用文字語句和數學符號作轉換，瞭解真正函數的定義。（#TW90210105）

程度較高，能把文字很快轉成數學式子。（#TW90710102）

Students that can learn from lecture, put words into symbolic language and create an equation from it. (#US11820101)

他們的思維中，認為學生應能文字表徵轉換為符號表徵，以理解文字敘述的數學語句。

有些職前教師（4 位）也思考到文字敘述與其他表徵的轉換，但他們的思維中，更從學生腦的運思去思考，他們會特別提到表徵的轉換與連結是在學生腦中進行的（參閱表 4.1.3 的第 1-3 個回答），或提到**學生要從語句產生心像於腦中**（參閱表 4.1.3 的第 4 個回答）。

表 4.1.3　提及學生腦中表徵轉換或產生心像之運思的職前教師回答

- …而想像力豐富的學生，能直接在腦海中，將題目型式由文字轉譯成符號、影像，深入理解。（#TW11910102）
- 能由文字系統直接在腦中反應出圖形或意象的[程]度較好的學生。（#TW11610112）
- The "words" description is for an advanced level student. The student must be able to process the actions of two variables in their heads for this to make any sense to them. They would also most likely have to visualize some sort of example in their head or make one up on paper for this work as well. I would consider this to be pretty advanced thinking. (#US10250129)
- 語言能力好且可進行較抽象思考之學生。因為第一步必須先解讀文字函[涵]意，解讀出來後，還要在腦海中形成文字所表達之心像。（#TW11410102）

這些職前教師都在其回答中特別提到表徵轉換是在腦中進行的，或在腦中形成文字表徵的心像，雖然他們對於要形成怎樣的心像，或何謂「影像」、「意象」，或者要“visualize”成什麼，並沒有明確說明，但他們的思維中，

很可能會去連結學生的腦是如何運思的，由此角度來看學生面對文字表徵時，腦中如何操弄文字表徵。

4. 有些職前教師的思維中，文字有其系統，以一種邏輯的方式組織在一起，表 4.1.4 之職前教師的回答提供我們線索，

表 4.1.4　提及文字有其系統的職前教師回答

- 能由文字系統直接在腦中反應出圖形或意象的[程]度較好的學生。（#TW11610112）
- 對文字邏輯較強的同學。Ex:國文程度中上的學生。∵將文字轉化為概念是需要語文能力的。（#TW11610120）
- High School. The terms are used in "logic" which students don't (typically) fully dive into until Geometry. … (#US10620107)

5. 有些職前教師會注意到文字敘述之數學語句中的組成成分，思維連結到語句中含有數學詞彙，而這些數學詞彙會對學生理解造成影響，#US13220107 的答案便提供一個很好的詮釋，

> The words representation could be very confusing for most students. Its wording and vocabulary are very technical, and for this reason, I would only use this for students at an advanced level in high school (if at all).

職前教師所注意到在「對於給定的一個x值，必有唯一的一個y值和它對應，則稱y是x的函數。」（If for a given value x, there is one and only one value y corresponding to it, then we say y is a function of x.）中的數學詞彙如表 4.1.5 所示，而從他們的說法，

> 了解（A）函數機器及（G），知道函數的簡單定義的學生，不然一般學生會無法了解"唯一"的定義。（#TW11710112）

> 對函數之概念已有大致上的架構，"文字表徵方式"的闡述有助於他對函數有更深一層的了解，例如，"給定"一個 x 值，可得"唯一"之 y 值之概念。（#TW11710111）

可以看出他們認為學生必須要能學會這些數學詞彙。許多學者認為教師應進行數學詞彙的教學（Barton & Heidema, 2000; Barwell, 2005b; Carter & Dean, 2006; Gough, 2007; Raiker, 2002），而教師是否進行此類教學亦是 Learning Mathematics for Teaching（LMT）Project 中用以評測教師的數學教學品質的向度之一，這些職前教師認為學生必須學會這些詞彙，他們可能會對數學專門詞彙進行教學。

表 4.1.5　職前教師所提出語句中數學詞彙

數學專門詞彙	職前教師編號
唯一	#TW11710112、#TW11710111、#TW11410104、#TW90110105、#TW11610103、#TW90010107
唯一一個	#TW11410150
one and only one	#US13030104
給定	#TW11710111、#TW90010107
給定任意一個 *x*	#TW11410150
對應	#TW11610103
correspondint[correspondent]	#US13030104
對應關係	#TW11410119

6. 有些職前教師的思維連結到文字敘述之數學語句的特徵，但為較抽象、整體的敘述，並不是數學教育文獻中提及的，可用以操作、分析的數學語言特徵，例如，語句中含有幾個提供新訊息的詞彙（rhematic; Laborde, 1990）、數學物件的關係有幾層等

職前教師提出數類文字敘述之數學語句特徵（參閱表 4.1.6），而他們最容易連結到的特徵是「抽象」，例如，

> 接受程度較高，且國文能力較好的學生。因為用文字會變得比較抽象，較難理解（#TW11510122）

> Proficient to advanced level students.　Students should be introduced in more concrete ways first, and then they can be introduced to the abstract "words" representation.... (#US10250101)

從職前教師的說法來看，他們思維中，可能相對有一個較為具體的指涉物，因此，相較之下，文字敘述是比較抽象的表徵。有些職前教師較為明確地指出他們所參照的「具體」表徵，例如，

> 數學理解程度不錯或對於A.函數機器及C式子都很熟悉的學生，會再以文字表徵方式使其函數意義更抽象化。 （#TW90410106）
>
> The words representation is best suited for students at a higher abstract thinking ability since it is much less concrete than the picture or symbolic representations (#US11820102)

職前教師認為函數機器表徵、式子表徵、圖形表徵等，相對於文字敘述，較為具體。

表 4.1.6　職前教師所提出之文字敘述數學語句特徵

特徵	職前教師編號
抽象	#TW11510122、#TW11210107、#TW90410106、#TW90210103、#TW90110105、#TW90810109、#TW11610162、#TW11610101、#TW11510137、#TW11410119、#TW11810107、#TW11510126
abstract	#US10250101、#US10330103、#US13220111、#US13240102、#US15810116
不夠具體	#TW90710110
無具體	#TW11610101
less concrete	#US11820102
長	#TW90210103
精簡	#TW11910111
簡潔	#TW11410141
嚴謹	#TW11410141

然而，#TW11610152 的回答給我們一個啟示，

> 語文能力較好的學生。因為數學用語文表示，常常前後相通，對於語文能力不佳的學生，可能會不懂其意思

其回答中的「前後相通」表示的意義為何，指的是提到的物件，例如 x，整句中指的是同一數學物件？句中的數學物件彼此有關連？敘述中的短

語與子句所描述的關係或情況之間有關連？他並沒有明確指出。職前教師的思維中，可以「看見」語句的部分，他們能抓取出數學語句中學生理解上較為困難的數學詞彙，但他們可能沒有能力主動以拆解出語句中的部分或數學物件，觀察物件間的關係這樣的方式來思考語句特徵，只能以整體來看其特徵。

7. 有些職前教師認為文字敘述適合用以總結，總結帶有是統整的、一般化的特徵，這反映出職前教師的思維中，認為文字敘述之特徵之一為一般化

在思考學生學習文字表徵時，浮現出文字敘述數學語句適合於總結時使用之思維的職前教師（參閱表 4.1.7），僅有臺灣職前教師，這可能與臺灣數學教學環境相關。東亞國家的數學教材的內容往往較西方更困難、要求更高（more demanding），考試也佔有較重要的地位（examination driven; Leung, 2006），在這樣的環境下，臺灣數學教師往往覺得需要在最後幫學生做個統整，可能因此而有此特殊的思維浮現。這些職前教師認為文字敘述之數學語句具有一般化的特徵。

表 4.1.7　認為文字敘述適合用於總結之職前教師回答

- 對於已經熟悉函數計算及相關概念的學生，在完成學習時，老師用文字給予文字性的結論敘述。因為，對一開始接觸函數的學生立即給予文字表徵方式，會使人無法消化，沒有那種感覺，有死背的氣息存在。（#TW11610114）
- …②學生剛開始認識函數，如果直接講解文字定義，恐怕無法使部份[分]低成就學生理解概念，最好用一些有趣的方式使學生能進一步認識「函數」後，再用文字概念作最後總結。（#TW11910109）
- 高階一點的。或是在總結函數是[時]講出來。（#TW11410158）
- 給數學理解較好的學生。相對於其它表徵，文字表徵的敘述（一種定義）較有總結的概念。（#TW11410168）

8. 在思考學生學習文字敘述之數學語句時，有些職前教師在思維中會連結到學生的數學語言相關知能（知識和能力）

#TW90110105 提到學生的數學語言知能，他認為學生對數學語言是否熟悉會影響他們學習文字敘述，然而，他所指的「對數學語言熟悉」是何意，例如，是指學生有較多接觸數學語言的經驗，或是學生具有分析數學語言的能力等，他並沒有明確地說明。

> 最適合介紹給數學程度較好，或對數學語言較熟悉的學生，因為文字敘述較抽象，定義也有「唯一」等。 （#TW90110105）

不過，從他特別提到「唯一」這個數學詞彙，他注意學生在數學語彙上的學習。另外，#US10620103 則較明確說明**學生應該先能理解、學會數學語彙，如此可以幫助他們學會文字敘述的數學語句，**

> I feel an average level of student would be able to understand the "Words" representation of a function to a certain extent. An average level of student would hopefully have built up their math vocabulary and the "Words" representation would be clear to[…] (#US10620103)

有 2 位職前教師的思維中，可能有**學生必須具備分析語句、拆解語句的數學語言知能，才能理解文字敘述之數學語句的想法**，如下，

> 抽象概念良好之學生。因他必須由文字中找尋重點字並重新組合理解，且若完全沒有輔以其他教學，可說是一段無意義文字。（#TW11410134）

> I would say words are most appropriate for students with a higher ability in mathematics because they have the mathematical linguistic knowledge to break down the statement and make sense of what the statement is trying to say. (#US11130111)

在思考學生學習數學語句時，能主動連結到學生的數學語言知能之職前教師僅有上述這極少數。然而，正如 Schön（1983）所說，在真實世界中，問題不會像數學中給定一些條件（givens）再要求解題，執行者必須自己從讓他感覺困惑、有困難、不確定的情境抓取材料（materials of problematic situations）、建構出問題，並解決之。在課堂中，沒有人會提醒數學教師何時該注意培養學生數學語言知能或何時是恰當的培養時機，

數學教師必須能自己主動連結、判斷。如此少職前教師能主動連結到學生之數學語言知能這個面向，他們將來在課堂中能注意到該培養學生數學語言知能的機會值得探究。

9. 在思考學生學習文字敘述之數學語句時，有些職前教師在思維中會連結到學生的數學能力

如表 4.1.8 所示，有些職前教師提及數學能力，或更聚焦一些提及數學理解能力，然而，這些說法相較於文獻中關於數學能力內涵的描述，都仍是過於廣泛，不夠聚焦的，由#US11130111 的說法，我們可以看出數學語言知能包含於其"ability in mathematics"中。而由#TW11510146 的回答來看，他所指的「數學能力」很可能即是「有數學的清析[晰]的理念」，如此，他所指的數學能力其實並非 Niss（2003）所指的較為跳脫數學知識的數學能力（mathematical competencies），而較偏向他所謂的 factual knowledge，或者可以說，他所指的數學能力是「知識型」（content-oriented）的，而非「心理型」的（thought-oriented; Hsieh, Lin, & Wang, 2012）。

數位職前教師提及數學理解的能力，然而，其所指涉為何，從其描述並不能明確判斷，他們的思維中，認為學生「理解力」好便能「理解」數學語句，然而對於怎樣理解、理解的機制為何、怎樣的能力牽涉其中，並不能提出說明，以 Krutetskii（1976）的語言來說，這些職前教師無法陳述數學能力的成分（the component mathematical abilities），這可能反映出他們數學教育語言上的缺乏，也可能反映他們對此數學能力相關知識或概念的缺乏，然而，這都指向他們在數學教學的培育過程中，關於此類概念的明確教學有所不足。

表 4.1.8　提及數學能力之職前教師回答

- I would say words are most appropriate for students with a higher ability in mathematics because they have the mathematical linguistic knowledge to break down the statement and make sense of what the statement is trying to say. (#US11130111)
- 基本國文程[度]要夠好，數學能力也 OK 的人。因為數學再好，看不懂文字也沒有用，所以國文程度要有一定的水準，加上要有數學的清析[晰]的理念，那麼文字才容易懂。（#TW11510146）
- 數學理解力強。∵本身這句話要解釋起來很困難。（#TW11510130）
- 數學理解程度不錯或對於 A.函數機器及 C 式子都很熟悉的學生，會再以文字表徵方式使其函數意義更抽象化。（#TW90410106）
- 給數學理解較好的學生。相對於其它表徵，文字表徵的敘述（一種定義）較有總結的概念。（#TW11410168）

10. 在思考學生學習文字敘述之數學語句時，有些職前教師在思維中會連結到學生的能力，而這些能力乃是與數學的特質有關的能力

職前教師所連結到的與數學特質有關的能力，如表 4.1.9 所示。

表 4.1.9　職前教師思維中與數學特質有關的能力

與數學特質有關之能力	職前教師編號
抽象思考能力	#TW11610140、#TW11310108、#TW11410167、#TW11410126、#TW11410119、#TW11810107
abstract thinking ability	#US11820102
抽象能力思考	#TW11410144
抽象思考力	#TW90810108
抽象思考	#TW11410102、#TW11910118、#TW11610133、#TW11610127
抽象概念	#TW11410134
邏輯思考能力	#TW11510157
邏輯性	#TW11610149
邏輯概念、邏輯	#TW11610136

「抽象」乃是一般對數學的印象，為數學所擁有的特質，抽象思考的能力則與此特質相對應，此類能力是最多職前教師所連結到的與數學特質有關之能力。以下兩位職前教師的回答，提供我們關於這個對應的線索，

對文字運用與理解能力較高，且具抽象思考能力的學生。用文字指述數學中的抽象概念，會使原本已經夠抽象的事物變得更加抽象，但學生若具備此能力則應教導。（#TW11310108）

The words representation is best suited for students at a higher abstract thinking ability since it is much less concrete than the picture or symbolic representations. (#US11820102)

在這些職前教師的思維中，抽象思考能力的需求與數學概念或數學語言的抽象性有關。

「邏輯」也是一般認為數學所擁有的特質，邏輯思考的能力是另一個職前教師會連結到的與數學特質相對應的能力，例如#TW11610136 便提到，學生必須要有夠好的邏輯思考能力，才能將一連串的文字敘述所傳達的語義連結起來，而理解整個語句。

給邏輯概念強的學生。文字的表徵跟口頭的講述類似，學生邏輯不夠好，會連接不上。（#TW11610136）

11. 有些職前教師的思維中，考量到學生的「獨立性」或「主動性」，認為學生若能自行或主動進行如思考或分析的活動，則較能理解文字敘述之數學語句

有些職前教師會以表 4.1.10 的詞彙特別強調學生的獨立性或主動性，

表 4.1.10　職前教師思維中強調學生的獨立性或主動性之詞彙呈現

職前教師詞彙	職前教師編號
自我	#TW11510126、#TW90510104
自己	#TW11510137、#TW90510104
自行	#TW11410126、#TW11610127
獨立	#TW11810107
主動	#TW11510157

由如下職前教師的描述來看，他們認為學生若具備自行做表徵轉換、自行思考的能力，則較能理解文字敘述，

> 可做抽象思考的學生。此類學生可將文字敘述自行轉換成圖像式思考。（#TW11610127）

> 學生對於抽象思考能力較佳的，利用文字表徵方式較好，因為學生都能自行思考。（#TW11410126）

或是例如#TW11510157，

> 具備邏輯思考能力，能夠主動思考，學習的學生。以文字表示，沒有經過轉換，示例等方式，其概念很難真的理解，學生必須具備這個能力。

僅有臺灣職前教師浮現出此類思維，美國職前教師並沒有浮現。

12. 有些職前教師認為學生若具備先備數學概念或是函數相關概念，將有助於學生理解所面對的文字敘述之數學語句

有些職前教師認為若學生有些先備知識，則能理解數學語句，例如，

> 語文能力高，邏輯性強，先備知識高的學生，因為文字敘述的方式完全抽象，要學生能自己思考，較難以消化。（#TW11610149）

但他並沒有明確說出所謂的先備知識為何，但也有些職前教師的說法較為明確，例如，

> 適合介紹給對集合有概念的學生，他們可以藉由文字說明，建立集合對應的關係。（#TW11510110）

便指出學生若先有集合的概念，閱讀文字敘述時，則較能理解。

也有職前教師認為，學生應先有函數的相關概念或已認識其他表徵，如函數機器或符號等，才能理解函數的文字敘述表徵，他們的說法如下，

I find this representation most suitable for secondary students who have a firm understanding of the concept of a function. I find this to be most appropriate for this group of students because the verbage may cause confusion in younger students. (#US10220105)

對於已經熟悉函數計算及相關概念的學生，在完成學習時，老師用文字給予文字性的結論敘述。因為，對一開始接觸函數的學生立即給予文字表徵方式，會使人無法消化，沒有那種感覺，有死背的氣息存在。（#TW11610114）

…或是已初步了解函數的概念。因為他們可用文字語句和數學符號作轉換，瞭解真正函數的定義。（#TW90210105）

數學理解程度不錯或對於 A.函數機器及 C 式子都很熟悉的學生，會再以文字表徵方式使其函數意義更抽象化。（#TW90410106）

其他職前教師提及先備知識或函數概念的情況如表 4.1.11 所示，

表 4.1.11　提及先備知識或函數概念之職前教師

職前教師提及之概念	職前教師編號
先備知識 previous experience	#TW11610149、#TW11510110 #US15220107
函數相關概念	#TW90210105、#TW11710112、#TW11710111、#TW11610114、#TW11910109、#TW11210107、#TW90410106 #US10220105、#US10330103、#US10820112、#US12520106、#US32930112

13. 有些職前教師的思維中，連結到與語言相關的能力或程度，但從他們的用詞來看，他們只是針對一般語言，並沒有特別聚焦的數學語言上，他們的思維中對數學語言能力與一般語言能力之不同之處沒有明確的區辨

有些職前教師在思考學生學習或理解文字敘述的數學語句時，會連結到學生關於語言的能力具備情況，如表 4.1.12 所示。由該表可以看出職前教師的說法相當多樣化，其中有些職前教師使用的詞彙較不精準，例如，

國文程度(閱讀能力)較佳的學生。對文字敘述較有感覺。(#TW11310101)

由他使用詞彙「國文程度」可以看出他並沒有聚焦到數學語言，但他所指涉的內涵為何，並不清楚。有些職前教師的思維相對較為聚焦一些，他們使用「能力」這個詞彙，例如，

> 對文字邏輯較強的同學。ex:國文程度中上的學生。∵將文字轉化為概念是需要語文能力的。（#TW11610120）
> 語文能力較好的學生。因為數學用語文表示，常常前後相通，對於語文能力不佳的學生，可能會不懂其意思。（#TW11610152）

有的職前教師的思維又更明確一些，他們提到語言理解能力或語言運用能力，例如，

> I would use that with more advanced students because they will be more well equipped to apply the statement and understand what it means. (#US13020108)

由這些職前教師的回答來看，他們並**沒有區辨學生的數學語言能力與一般語言能力不同，或認為學生使用一般語言能力即可以處理數學語言。也有些職前教師並不認為數學語言與一般語言有不同之處**，#TW11510139 的回答給我們這樣的線索，

> 程度較好且對中文語意清楚了解的學生。∵學生若能把中文語意轉換成數學語言的話，代表其對數學及此單元有相當程度的認識。（#TW11510139）

由其說法來看，他很可能是將數學中的「文字敘述表徵」看成與「中文」較為相近，而不是一種「數學語言」。

表 4.1.12　職前教師所提及之語言相關能力或程度

語言相關能力或程度	職前教師編號
語文理解能力	#TW11510164
equipped to understand what it [the statement] means	#US13020108
文字理解能力	#TW11610140、#TW11310108
文字的理解力	#TW90210103
文字的理解度	#TW11410141
文字敘述理解力	#TW11410175、#TW90610104
文字運用能力	#TW11310108
equipped to apply the statement	#US13020108
a strong command of the language	#US11220102
文字吸收能力	#TW11710107
文字理解方面	#TW90910105
語言能力	#TW11410102
語文能力	#TW90410108、#TW11910102、#TW11610120、#TW11610152、#TW11610149
閱讀能力	#TW11310101
國文能力	#TW11510122
reading understanding	#US10130126
國文理解程度	#TW11610155
國文程度	#TW11610120、#TW11310101、#TW11510146、#TW11410157
a higher level of vocabulary	#US15220107
語言程度	#TW11210104
語文程度	#TW11910118、#TW11910111
文字敘述接受度高	#TW11410104
語文概念	#TW90710110
語感	#TW11910102

14. 有些職前教師在思考學生學習文字敘述之數學語句時，連結到學生的能力或程度，但是屬於較為廣泛的說法

有些職前教師的思維連結到學生能力或程度，但不像 9 或 10 與數學相關能力的關連性較強，也不像 13 與語言的關連性較強，屬於較為廣泛、不聚焦的描述，如表 4.1.13 所示。

有些職前教師提到理解能力，例如，

> 語文能力，理解能力好的學生。因為此種學生透過字句就能夠知道所要表達的意思，而不用透過圖像或是式子。　　　　（#TW90410108）

> Advanced because they would have more reasoning skills. Less advanced classes may do better by seeing the actual picture or table. (#US11520105)

他們提到理解能力較好的學生較能理解文字敘述，但他們並沒有明確指出是理解什麼的能力。他們或許在**思維上並沒有聚焦**到與數學或語言相關的能力上，然而以下職前教師的回答，給我們另一個可能原因的啟示，

> 理解能力較高層次的學生，因為用文字表徵方式，還需將文字表徵轉換成圖象表徵，才可進行解題，若理解能力較差者，則在轉換過程會有困難。　　　　（#TW11810105）

> 理解力強的學生，因為他可把文字轉換為數學符號。（#TW11710102）

也使用了「理解能力」、「理解力」這些詞彙，然而，由其整個敘述來看，可看出他們其實想指涉表徵轉換的能力，但他們可能因**詞彙的缺乏，無法較明確地以數學教育用語描述**，而先使用了一個較為廣泛的、一般性的詞彙，再進一步解釋。由此也可看出，不同職前教師所指的「理解能力」，可能具有不同的內涵。

另外有些職前教師聚焦到數學上，但沒有聚焦在能力上，他們使用「數學程度」這樣的詞彙，職前教師思維中，數學程度的成分為何，指涉學生的數學知識或數學能力，亦或是其數學成就。另有相當數量的職前教師使用更為廣泛的、一般化的詞彙（參閱表 4.1.13），例如「程度」，或如 #US10130118 的描述，

> advance students. it is challenging to not to see. (#US10130118)

他提到"advance"，可能是能力、知識、成就，就連是不是指在數學學科上，都不明確。如同前述，有些職前教師可能在學生數學能力有關的概念上有所缺乏，故而思維的連結只能是這些廣泛的概念，然而，#TW90210103 的回答，讓我們能更進一步考察職前教師的思維，

> 對數學概念較好的學生且對於文字的理解力較強的學生，因為文字敘述較長且較抽象，對於程度較好的學生而言應該會比較容易接受，但我覺得還是要配合其他表徵方式來加強其觀念。 （#TW90210103）

他所說的「程度較好」很可能就是指「數學概念較好」、「文字的理解力較強」，但他的用詞可能隨著其思考一連串表徵出來，而沒有明確想過前後的關連，這也顯示他對用詞並不是很在意，原因可能是他在數學教育之用語上有所不足。

表 4.1.13　職前教師所提及之一般能力或程度

一般能力或程度	職前教師編號
理解能力	#TW90410108、#TW11810105、#TW91010106、#TW11510156、#TW90310103
理解力	#TW11610143、#TW11710102
reasoning skills	#US11520105
理解程度	#TW11210104
數學程度	#TW11610143、#TW11510164、#TW11410157、#TW90110105、#TW11410151、#TW11910111、#TW11510126
math level	#US11130103
achievment[achievement] w'[with] math	#US32360127
advanced mathematics	#US12710113
math skills	#US13220116

表 4.1.13（續）　職前教師所提及之一般能力或程度

一般能力或程度	職前教師編號
the learning capabilities	#US11620102
ability	#US15220107
接受程度	#TW11510122、#TW90710102
程度	#TW90210103、#TW11210104、#TW11410104、
	#TW11410175、#TW11910118、#TW90610104、
	#TW11510139、#TW90910108、#TW90810109、
	#TW11610162、#TW11610101、#TW11610103、
	#TW11410121、#TW11410150、#TW90510104、
	#TW90910105、#TW11410128、#TW11510121、#TW90010107
level	#US10250111、#US10330103、#US10620103、#US10720124、
	#US10730102、#US10730114、#US10730122、#US11120108、
	#US11130111、#US11130115、#US11130118、#US11130119、
	#US11130122、#US11130130、#US11220102、#US12210114、
	#US12520106、#US13020109、#US13220111、#US13220120、
	#US13240107、#US13420116、#US14420102、#US14740108、
	#US15810112、#US15810124、#US31920102、#US32920104
higher achieving students	#US10130126
資優生	#TW90210105
高階	#TW11410158
advanced	#US10130118、#US 0230103、#US10250101、#US11420104、
advanced level	#US11520105、#US10730114、#US13020108、#US13220107、
	#US13240102、#US14520108、#US14620102、#US14720105、
	#US14820101、#US14820105、#US15810116、#US15810144、
	#US15810156、#US32920117、#US32930102
	#US10250101、#US10250129、#US10730122
average	#US11130126、#US11520101、#US13220102

15. 有些職前教師的思維中，認為學生的年級或選課情況會影響他們學習或理解文字敘述的數學語句

有些職前教師在思考學生學習或理解數學語句時，會連結到學生的年級，如表 4.1.14 所示，可以看出以美國職前教師居多。

表 4.1.14　職前教師所提及之年級或選修之課程

年級或課程	職前教師編號
高中生	#TW90010106
secondary	#US10220105
high school	#US10620107、#US13220107、#US13420104、#US14820101
middle school	#US13420104
junior level	#US14320106
late elementary	#US32920117
freshman	#US11130102
sophomore （at senior high school）	#US10520104
高二、三	#TW11610133
9^{th} -12^{th} grade	#US32930112
10 or 11^{th} grade	#US13030104
7^{th} or 8^{th} grade	#US13540124
8^{th} grade	#US10730108
8^{th} grade and 9^{th} grade	#US14740104
higher graqde[grade]	#US15810112
a higher level mathematics course	#US10730110
an honors class	#US11620102
geometry	#US10620107
pre-algebra	#US15820102
advance algebra	#US32920121
algebra I	#US11220103、#US13420116、#US15820102
algebra II	#US10730110、#US10920108
pre-calculus	#US11130119
calculus	#US11130119

此外，可能因為美國數學課程可由學生選擇修習的關係，會有一些職前教師從修課類型來做判斷，例如，

> This is most suitable for advanced students who are in classes preparing for mathematics courses that include Calculus. (#US 0230103)

> … If it is just this representation, then possably a higher level mathematics course (algebra II) would be suitable, since they would have addressed it earlier in their math career (#US10730110)

然而，年級或選課所代表的意義可以很廣泛，職前教師所指的可能是學生數學能力較佳、可能是數學知識較多，甚至可能是年齡較大能較有耐心閱讀等，職前教師所指涉的是什麼，和文字敘述的數學語句如何關連，他們並沒有明確說明。

16. 有些職前教師認為語文相關能力加上數學相關能力，即可理解文字敘述的數學語句。他們沒有 Niss（2003）所提出「處理和操弄數學語言的能力」（the ability to deal with and manage mathematical language）的思維，#TW11510146 與#TW90210103 的回答給我們這樣的啟示，

> 基本國文程[度]要夠好，數學能力也 OK 的人。因為數學再好，看不懂文字也沒有用，所以國文程度要有一定的水準，加上要有數學的清析[晰]的理念，那麼文字才容易懂。（#TW11510146）

> 對數學概念較好的學生且對於文字的理解力較強的學生，因為文字敘述較長且較抽象，對於程度較好的學生而言應該會比較容易接受，但我覺得還是要配合其他表徵方式來加強其觀念。（#TW90210103）

17. 有些職前教師的思維連結到與學生情意有關的面向

有些職前教師在思考學生學習文字敘述的數學語句時，連結到學生的情意面向，但僅有臺灣職前教師浮現此思維，並且也僅有以下少數幾位。#TW11910109 提到使用「有趣的方式」，透露出他的思維中考量到學生的學習動機這個面向，他很可能認為文字敘述不有趣，不能使學生有學習動機。

> …②學生剛開始認識函數，如果直接講解文字定義，恐怕無法使部份[分]低成就學生理解概念，最好用一些有趣的方式使學生能進一步認識「函數」後，再用文字概念作最後總結。（#TW11910109)

而#TW90010107 和#TW11410151 提到學生對數學的態度，

> 程度好，對數學有興趣的學生。因為「給定」、「唯一」是比較數學的用語，一般學生比較難了解。（#TW90010107）

> 數學程度較佳，且對數學有興趣的學生，因為較能將文字抽象出數學概念，且能有耐心的閱讀、分析語句所表達的意思。（#TW11410151）

後者進一步提到學生對數學學習的態度，並認為學生對數學的態度會影響其數學學習態度。而#TW11910111 的回答如下，

> 數學與語言程度好的學生。因為學生的語文程度不好，會使其無法了解較精簡文字所表徵之意，且會將 x、y 弄混。數學程度不好使其沒興趣了解文字涵義。（#TW11910111）

由他的說法可看出，他認為學生的認知會影響其動機，他的思維與謝豐瑞（2009）的研究結果相符，該研究發現 98%的高中生與 94%的國中生認為上課進度能顧慮到他們的理解程度，是能讓他們願意繼續學下去、引起他們的學習動機的原因。另外，#TW11710107 提到學生的數學焦慮，

> 對文字吸收能力佳的同學，較能領會其表達意義，或是害怕看到數學符號者，較能使其明白（進入狀況）。（#TW11710107）

18. 有些職前教師的思維連結到學生的學習類型，認為學生之學習類型影響他們學習或理解文字敘述的數學語句

#US13420116 的回答，

> I believe it is suitable at all levels, but all students should be shown various examples so that all students will[with] different learning styles will be able to conceptualize what functions are. (#US13420116)

顯示出他的思維中連結到學生的學習類型。而美國的職前教師多半由一般文獻中所常探討的三類學習特徵切入，即視覺的（visual）、聽覺的（auditory）、動覺的（kinesthetic）學習類型（Willingham, 2005），如表 4.1.15

所示。臺灣則沒有職前教師提出這幾類學習類型，但有類似#TW90710109這樣的回答，亦觸及學生的學習類型，

1. 適合給予需要明確定義的學生學習。
2. 他們需要非常明確的文字定義以幫助其學習。　　（#TW90710109）

表 4.1.15　提及學生學習類型之美國職前教師回答

➢ I feel the ‘words’ representation can be beneficial at all levels. It depends on the students' ways of thinking. In general, a higher level student may understand it better, however students who are less visual and more auditory type of learners would benefit from words (#US11120108)
➢ A standard level Algebra one class can interpret the words.　Lower level students, in my experience, are much better visual and kinesthetic learners.　Auditory is not the way they learn best. (#US13420116)
➢ I think it is suitable for any level of student.　It just depends what type of a learner the student is.　If they are more of a visual learner this representation would not be the most suitable. (#US14420102)
➢ This works well for auditory learners.　Student not necessariy[necessarily] at a higher level, just those who learn best by listening to teacher presenting the lesson in a lecture format. (#US31920102)
➢ It is suitable for students with a higher level of vocabulary or ones who have previous experience with a lot of word problems.　Some students with a lower ability but who are oral learners may benefit from the "Words" representation. (#US15220107)

19. 職前教師用詞有所侷限與精準度亦有所缺乏，他們不能以數學教育中的用詞明確描述自己想要表達為何，他們的思維中缺乏數學教育中的專門用詞，也可能缺乏這些專門用詞所承載的概念

從前述的分析可知，有些職前教師可能無法使用數學教育專門用語以描述其思維，因此會使用較為廣泛的、日常的詞彙，例如，理解能力或數學程度等，而沒有明確說明其所指為何。表 4.1.16 中，職前教師的用詞，提供我們更明確的線索。

表 4.1.16　職前教師使用之非數學教育專門詞彙

職前教師詞彙	職前教師編號
感覺	#TW11510163、#TW11310101、#TW11610114、#TW11910118
想像力	#TW11910102
抽象想像力	#TW11510137
想像	#TW11510156、#TW11510126
想像空間	#TW11510121
影像	#TW11910102
圖解	#TW11510121
visualize	#US10250129、#US10620111、#US10730114、#US13220120
visual representation	#US11420104、#US13420104
visual aids	#US13540107
visuals	#US14820105
意象	#TW11610112
manipulatives	#US14820105
理念	#TW11510146
觀念	#TW90210103、#TW11910118、#TW11410121、#TW11410128

有些職前教師使用「感覺」這個詞彙，例如，

介紹給文字敘述比較強的同學，因為他們可能會對數學式子及圖形比較沒感覺（#TW11510163）

國文程度(閱讀能力)較佳的學生。對文字敘述較有感覺(#TW11310101)

對於已經熟悉函數計算及相關概念的學生，在完成學習時，老師用文字給予文字性的結論敘述。因為，對一開始接觸函數的學生立即給予文字表徵方式，會使人無法消化，沒有那種感覺，有死背的氣息存在。（#TW11610114）

他們所使用的「感覺」描述的是學生的什麼並不明確，而從#TW11610114 的回答來看，他所指的有「感覺」可能是相對於「死背」，亦即較為偏向與「記憶式學習」(rote leanring) 相對的「智性學習」(intelligent learning; Skemp, 1987)，但他並無法使用更精準的詞彙表達其思維。

有些職前教師使用與「想像」有關的詞彙，例如#TW11510156 的回答中，並沒有明確說明「想像」所指為何。

> 理解能力比較高的學生，因為文字敘述比較難想像，理解能力較差的學生可能無法想像。 （#TW11510156）

> 1. 語感強，想像力豐富的學生。2. 語文能力佳之學生，較不會因為語文能力方面的相關因素，導致誤解題意；而想像力豐富的學生，能直接在腦海中，將題目型式由文字轉譯成符號、影像，深入理解。 （#TW11910102）

> 通常給程度較高，想像空間多的學生。文字式本身就不比圖解來的容易明瞭，學生須先就文字轉換成為數學語言，學習上較為緩慢，不適合中下程度學生。 （#TW11510121）

而#TW11910102 和#TW11510121 所欲表達的，很可能是學生要能形成對文字敘述的「心像」，但他們沒有辦法使用這樣的數學教育專門用語，並且只能用「想像力」或「想像空間」這樣的一般日常用語，不精準地描述能產生心像的能力。並且，他們所用的「影像」、「圖解」，或是#US10250129 的回答中，

> I think that the "words" representation is more suitable for students who can easily interpret mathematics. It is hard to read words and visualize what they are saying, especially because math can be pretty abstract for students who struggle with the su[…]" (#US10250129)

所要"visualize"的，所指為何，為圖形心像、為函數機器圖像、為集合對應圖像，或甚至是表格，都是可能的，職前教師很可能沒有察覺他們的用詞不精準，並且，職前教師思維中是否有明確的指涉，其實也是不一定的。

以下例子讓我們更確認有些職前教師在數學教育專門詞彙上的缺乏與侷限。「概念」是數學教育中常使用的詞彙，其在數學教育領域中的專門語義，也是往往是進入此領域者會接觸的，然而，有些職前教師卻使用

較為日常的用語「觀念」或「數學觀念」，#TW11510146 甚至更不精準地使用了「理念」來代替「概念」，

> 基本國文程[度]要夠好，數學能力也 OK 的人。因為數學再好，看不懂文字也沒有用，所以國文程度要有一定的水準，加上要有數學的清析[晰]的理念，那麼文字才容易懂。（#TW11510146）

Skemp（1987）提到，語言與概念的形成關係密切，而高階概念的形成過程中，語言更是不可或缺的要素，由此來看，缺乏數學教育中的專門用詞，對部分職前教師而言，可能會阻礙其抽象、形成某些數學教育中的重要概念。

然而，從前述有些職前教師雖然缺乏「心像」這個數學教育中使用的詞彙，但卻有「心像」的思維，提供我們一個重要的線索。Schön（1983）認為有一種知識為實踐的知識（practical knowledge），這種知識會在我們解決一個問題的過程與方法中展現出來，但我們卻無法去描述它（make it verbally），這種知識是無聲的（unspoken or tacit），有些職前教師形成此類思維。後續的報導中，我們會再對此類知識、思維進行探討。

職前教師能否使用數學教育中的專門用語（technical language），反映著他們在師資培育中所受到的培養與師資培育對他們的影響（Blömeke et al., 2008），職前教師無法使用這些語言的情況值得師資培育界思考。

20. 有些職前教師在思考學生學習文字敘述之數學語句時，僅聚焦於教數學概念

在題目情境中，並沒有設定要教的是數學概念或是數學語言，有些職前教師的描述中，透露出他們的教學主體是數學概念，文字敘述這個數學語言僅是傳遞的工具，在教學主體之外，如表 4.1.17 所示（僅列出部分職前教師的回答，其他職前教師解列出編號，有興趣的讀者可參閱附錄一）。

以本題的情境設計來說，文字敘述應是教學的重要主體之一，而這些職前教師僅聚焦於函數概念的教學，對他們來說，要在思維上連結與數學語言有關的知識、概念、思維，並不容易。從 Schön（1983）的觀點來看，他們在實際教學情境中，自己所建構的教學問題，或解決教學問題的方法，將不易與數學語言相關。

表 4.1.17　僅聚焦於數學概念之職前教師回答

- 理解能力高的學生，因為他們相對的文字理解有關數學概念會比較 OK！（#TW91010106）
- 中上程度。因為學生要有能力將文字化為數學，才能由『文字表徵方式』理解數學觀念，這通常有些許難度。（#TW11410128）
- 具備邏輯思考能力，能夠主動思考，學習的學生。以文字表示，沒有經過轉換，示例等方式，其概念很難真的理解，學生必須具備這個能力。（#TW11510157）
- 對數學概念清晰，程度中上的學生。因為對程度較差、數學概念模糊的學生而言，文字就只是文字，他看完後，可能也無法了解句子所代表的意思，進而無法學習、吸收，但對有概念的學生，文字表徵可幫助他更清楚、明白"函數"的定義。（#TW90910108）
- ①已清楚了解「函數」概念的學生。②學生剛開始認識函數，如果直接講解文字定義，恐怕無法使部份[分]低成就學生理解概念，最好用一些有趣的方式使學生能進一步認識「函數」後，再用文字概念作最後總結。（#TW11910109）
- 適合介紹給對集合有概念的學生，他們可以藉由文字說明，建立集合對應的關係。（#TW11510110）
- 按部就班，循序漸進的學生。因為他們可以親自代入不同的數字到式子中，以體會函數對應的關係。（#TW90110103）
- It is more suitable for the higher levels. Many of the lower level math students need a visual or more of an explanation then just a definition. Wordy explanations can be confusing. If lower levels are given both the words and graphs they may be able to grasp the concept better (#US13020109)

#TW90410108、#TW11510122、#TW90210105、#TW90410106、#TW11410114、#TW11410151
#US10820112、#US10730108、#US11130126、#US13220116、#US14020103、#US14320106、#US14520104、#US14820101、#US32920117、#US32930102

21. 多數職前教師的思維中，文字敘述之數學語句對學生學習或理解而言，有其難度

從職前教師認為學生需要較具備某些能力，無論是語言相關的、數學相關的，可以知道多數職前教師對的思維中，認為文字敘述之數學語句對學生而言是困難的。#TW11610162 便明白指出：

程度較好的學生，因為文字是最難吸收的，且又很抽象。（#TW11610162）

然而，也有少數職前教師的思維不同，例如#TW90310103 與#TW11710107，他們認為文字敘述對某些學生來說，反而是有利於其學習的。

對理解能力不強的學生。以其利用文字的記憶加深印象。（#TW90310103）

對文字吸收能力佳的同學，較能領會其表達意義，或是害怕看到數學符號者，較能使其明白（進入狀況）。（#TW11710107）

如表 4.1.18 所示，部分美國有些職前教師也擁有不同的思維，認為所有學生都可以學習、理解文字敘述，只要在教學上進行調整或搭配其他表徵，但也**有些職前教師甚至認為不必搭配其他表徵，所有學生都可以理解文字敘述之數學語句，有此類思維的職前教師對文字敘述的難度較沒有覺察**。台灣並沒有職前教師呈現這樣的思維。

表 4.1.18　認為所有學生皆可理解文字敘述之美國職前教師回答

- I believe it is suitable at all levels, but all students should be shown various examples so that all students will different learning styles will be able to conceptualize what functions are. (#US14520104)
- I would use the words representation for all levels. How I explain what it means would be different for the levels of understanding. (#US10720124)
- Any level, because all students need to understand that mathematics is more than just making calculations with numbers. It also involves using written information to make mathematical decisions. (#US10730102)

#US10730110、#US11130122、#US13220116、#US14020103、#US14740108、#US32930107

二、職前教師對學生知能、教學活動、文字敘述數學語句在教學中的機制之思維

為探測職前教師對學生知能、教學活動、文字敘述數學語句在教學中的機制有何思維，針對本研究的焦點「文字敘述」，本研究設計以平方根算則為數學題材的教學情境，提供職前教師以下文字敘述為主之數學語句，

臺灣：兩個正數的正平方根乘積，與兩個正數乘積的正平方根相同

美國：The product of the positive square roots of two positive numbers is equal to the positive square root of the product of the two positive numbers.

此語句的語法結構複雜，數學物件間的關係也頗為複雜，職前教師固然可以將之改寫，降低數學語句難度以讓學生理解之看法，然而，教授學生數學課本中出現的數學語句，讓學生理解該類語句、使用該類語句，是教師必須培養學生的重要數學知能（Niss, 2003）。本研究提供五種教學活動，其中第一種主要為概念的教學，後四種則為文獻中認為適合用以進行數學語言教學的教學活動。

教學活動 A

臺灣：再仔細地重教一次「平方根乘法算則」這個概念。

美國：Thoroughly re-teach the concept of “algorithm for square-root multiplication.”

教學活動 B

臺灣：一邊帶學生看此敘述，一邊以實際數值帶入敘述中的物件，逐步寫出此敘述的對應數學式。

美國：Guide the students to read the statement, and meanwhile substitute actual values into the objects in the statement. Write step by step the corresponding mathematical expression of this statement.

教學活動 C

臺灣：給學生此敘述對應的數值式子，例如，$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$，要求學生以文字敘述來描述。

美國：Give students corresponding numerical expressions of the statement, such as$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$, and ask students to describe it with words.

教學活動 D

臺灣：拆解這個敘述，一部分一部分地向學生解釋此敘述的意思。

美國：Decompose the statement into parts, and explain the meaning of the statement part by part to students.

教學活動 E

臺灣：由敘述的一部分開始，請學生逐步擴展，判斷句子中所有數學物件間之關係。

美國：Ask students to start with a part of the statement and gradually expand it and then judge the relations among all mathematical objects in the statement.

問卷要求職前教師選出兩項他們認為最有效教學生前述數學語句的活動，並以開放性試題詢問職前教師有效的理由。在此，本研究由教學活動的角度出發，探測職前教師對於教學活動何以能有效教學生數學語言的看法，並詮釋職前教師對學生知能、教學活動、文字敘述數學語句在教學中的機制之思維。本研究採用歸納分析法（Patton, 2002），從職前教師提供之理由，分析、歸納其所用的字詞與敘述中所透露的意義，找出資料中隱含的中心價值與意義（core consistencies and meanings），來探討他們的思維。

1. 有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，思維連結到數學語言特徵

有些職前教師在思考教數學語言之教學活動時，思維會連結到數學語句的特徵（參閱表 4.1.19），他們認為文字敘述為主的數學語句具有「抽象」的特徵，例如，

因為這句十分抽象，直接用實際例子帶入，再導入一般化的觀念較快
（#TW11410154）

It is easier for students to go from concrete to abstract than trying to teach them only the abstract. (#US11720130)

有些職前教師則認為數學語句具有「長」的特徵，例如，

D addresses the lengthy statement in smaller individual parts that helps explain each side of the equation....
(#US13420109)

有可能太長的敘述造成學生理解的困難（#TW90410111）

其實數學語句相對於日常生活所使用的語句，並不見得較長，然而，數學語句中，往往包含較多表述訊息語詞，即帶有新訊息的詞彙（rhematic; Laborde, 1990），且詞彙間的關係較為複雜，因此讓職前教師覺得閱讀的負擔較重，因此，職前教師認為具有「長」的特徵。而#TW91010105 所說的「太多」，也是類似的思維。

太多的敘述學生可能不易消化，若分解成各個學生熟悉的部分在加以串連，比較容易消化 （#TW91010105）

有些職前教師則認為數學語句具有的特徵是較為「複雜」，例如，

數字可以簡化文字敘述的複雜性 （#TW90910103）

Rather than working with the current complex statement, students can create their own definitions based on what they observe with concrete numerical expressions. (#US10730113)

然而，職前教師所指的「複雜」內涵為何，是指物件關係複雜或是語法結構複雜，或是其他的涵意，並不清楚，職前教師本身，也或許並沒有明確思考過，只是他面對此語句時，產生了與之前連結「複雜」這個概念的經驗類似的連結。此外，美國有位職前教師的回答，

> Option B still promotes student reading and analysis, but it gives them a more concrete way to think about the algorithm.　Specific examples help illustrate the way the algorithm works, but still working with the mathematical definition helps students move from concrete examples to generalizations. (#US10730113)

可看出他的思維連結到數學語句具有一般性的特徵。

表 4.1.19　職前教師所提出之文字敘述數學語句特徵

特徵	職前教師編號
抽象	#TW11410154、#TW9041010、#TW11810111、#TW11310103
abstract	#US11720130、#US12820118、#US13540129
長	#TW90410111、#TW90810104、#TW90510105、#TW90810103
冗長	#TW11410159
lengthy	#US13420109
多	#TW91010105
複雜	#TW11510107、#TW90910103
complex	#US10730113、#US12210101
generalization	#US10730113

然而，職前教師思維中，關於某些文字敘述具有之特徵，乃相對於其他表徵所具有的特徵，他們認為數值實例或是符號便是相對較為具體的表徵，也是相對較不複雜的表徵（參閱表 4.1.20）。

值得注意的是，職前教師**思維中所連結到的文字敘述數學語句的特徵，皆偏向描述性質，而比較不具可用以分析的操作性**，例如，文獻中所提到的語法結構複雜、數學物件關係複雜、大量名詞化等。

表 4.1.20　職前教師所提出之文字敘述外表徵的特徵

特徵	表徵	職前教師編號
具體	數值	#TW11510140、#TW11510165、#TW11510127、#TW11410146
	數字	#TW11910119
concrete	examples (numbers、numerical expressions、mathematical expression of actual values)	#US10730125、#US12530103、#US13220101、#US13220106、#US13540129、#US10730113、#US10920109、#US10730113、#US11720130、#US12530103、#US13540129、#US10130109、#US10250106
	examples (symbols、math symbols)	#US12730101、#US10250106
	actual values	#US11120126
直觀	數值	#TW11510140、#TW11610117
	式子	#TW11610117
複雜性簡化	數字	#TW90910103
visualize and manipulate	actual values	#US11120126

2.　有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，思維連結到數學語句的組成成分，他們認為學生認識或使用數學詞彙是必須進行教學的

有些職前教師在思考教數學語言之教學活動時，會注意到數學語句有其與一般語句不同之處，數學語句中會包含數學詞彙，而這些詞彙是學生應該認識或使用的，所以教師必須進行教學，亦即，這些職前教師認為有必要培養學生這方面的數學語言知能，如表 4.1.21 所示，

表 4.1.21　覺察到學生認識或使用數學詞彙必須進行教學的職前教師回答

- 以實例帶入敘述，可以讓學生了解敘述中數學名詞的意思（#TW11410162）
- 可使學生理解每個部份的意義，知道什麼是$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{ab}$（#TW11610153）
- The original statement was incredibly dependent on mathematical jargon.　By guiding students through the jargon, giving concrete examples of the meaning of the statement, they can build internal connections between the words and their meaning in math symbols. (#US12730101)
- …because it will help students to better understand the meanings of the words and their relation to one another. (#US10330106)
- If they are able to break it down and figure out what each word means, hopefully they will be begin to learn the languange. (#US15220102)
- It is important for students to be able to break down definitions to understand what it is saying. This reinforces the use of math vocabulary words…. (#US13420101)

3. 有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，思維連結到應在教學活動中培養學生數學語言知能

有些職前教師在考量教數學語言的教學活動時，思維連結到培養學生的數學語言知能。部分職前教師認為**學生應該學習如何拆解一個數學語句**，如下，

> It is important for students to be able to break down definitions to understand what it is saying.... (#US13420101)

> These methods [B and E] both help the students to read a mathematical text.　They will need to know how to do this when you, the teacher, are no longer guiding them. (#US13420105)

> …The more the students learn to decompose problems they will learn how to evaluate different expressions and have skills to go about solving different problems. (#US10250102)

> It is important for students to be able to break apart statements and make sense of it so they can do the same with other algorithms of statements they may come across in the future. (#US14720102)

這些職前教師皆認為培養學生此數學語言知能是重要的，並且他們多數都提到這個能力能讓學生在面對其他數學題材的文字敘述時，亦可使用，他們知道這個能力是可以超越數學題材的，屬於「心理型」的能力，而非「知識型」的。然而，在此教學情境中，思維連結到此能力的僅有美國職前教師，頗值得臺灣數學教育界深思。

有些職前教師的思維連結到應培養學生**轉換文字敘述與其他數學表徵的能力**，如表 4.1.22 所示，雖然部分職前教師使用以表達其思維的語言並不明確，例如，#US10920109 和#US10330106 的回答中提到學生應學會將文字敘述轉換成“the math”或“a mathematical language”，但在此教學情境中，他們指涉的應是符號式子或數值實例。

表 4.1.22　認為應培養學生文字敘述與其他表徵轉換之能力的職前教師回答

- 文字敘述時，學生須具備轉換文字→符號的能力，這部分可能某部份[分]學生較差！！（#TW11410125）
- B.提升將語言一步[2]化為數字或符號的能力，增加語文理解能力與逐步解題能力。C. 提升將符號數字化為文字的能力，增加用自己的語文內化數學概念的能力（#TW11410143）
- I would start with part c.　I think it is effective because it provides the students an example using concrete terms so they can translate the words into the math. (#US10920109)
- Choice b is helpful because it teaches students to extract meaning from statements and represent it in a mathematical language. On the other hand choice c shows the opposite...how we can form a statement from a mathematical expression or equation. By practicing both ways students will assimilate better both the mathematical representation and the meaning of the statemnt[statement] involved. (#US10330106)
- Step by step representation which ties the mathematical concepts along with critical reading of the algorithm are important skills for the students to learn. (#US13220110)
- I feel these put the statement into practice and the students will see how it is applied and gain a better understanding. (#US11130114)
- Math is tend[tended] to become obtuse in formal english. Students should be able to translate what they read into symbolic mathematical notation. (#US31920105)

另外有些職前教師會提到應幫助學生**連結文字敘述與其他數學表徵**，如表 4.1.23 所示（僅詳列部分職前教師回答，其他只列出職前教師編號，

參閱附錄二)，此類表徵間的連結對學生而言亦是重要的數學語言知能，當學生腦中這樣的連結夠強時，他們具備表徵轉換能力的機會可能也會提升。

表 4.1.23　認為應培養學生文字敘述與其他表徵連結之能力的職前教師回答

- 幫數學生對文字敘述與實際運算做連結（#TW11510106）
- 讓學生更了解對應的關係（#TW11910106）
- b. gives the students a chance to develop their own understanding with examples of their choice. They can connect the statement to the mathematical representation as they go. (#US12210101)
- The students will be able to understand how the numerical values conincide with the variables in the statement. (#US32930111)

#TW11510152、#TW90410101、#TW11410101
#US11520109、#US12730101、#US13220101、#US13420109、#US14620105、#US15810160

有些職前教師的思維連結到應培養學生使用數學語言的能力，如表 4.1.24 所示，包含使用數學詞彙，以及使用數學語句。

表 4.1.24　認為應培養學生使用數學語言能力的職前教師回答

- 可讓學生理解如何用文字敘述可以使自己看得懂（#TW11710108）
- It is important for students to be able to break down definitions to understand what it is saying. This reinforces the use of math vocabulary words. It shows the connections to what they know so that they can learn verbal representation. (#US13420101)
- C practices the students writing skills (#US10730121)
- Giving students a chance to explain mathematical equations in words provides a chance for them to apply their language to the sometimes unclear language of math. (#US11120115)
- C. Concrete, numberical[numerical] examples may help students see that the statement is true.　Describing with words provides an opportunity for students to articulate how they are thinking about the statement and verbalize the process used. (#US10130109)
- On the other hand choice c shows the opposite...how we can form a statement from a mathematical expression or equation. (#US12820114)

4.　有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，思維連結到學生的語言能力，但為一般語言的能力，並非針對數學語言，這些職前教

師沒有去分辨這兩種能力的差異，或是認為一般語言能力即能讓學生在認知上處理所面對的數學語言，例如，

> 現在的國中生有些國文能力較差，如果從頭到尾順序閱讀，會比較有障礙，如果將每一小部份[分]先用懂再加以組合，會比較容易 （#TW11410162）

> 學生的國語文能力有時很弱，所以由老師引導，逐步地讓學生解讀，自己得到的比別人給的會多更多 （#TW11410135）

而#TW11510141 的描述「文字敘述的解讀能力」較不明確。

> 國中生對於一整串之文字敘述的解讀能力很弱，分部份[分]解說，學生反而較能了解其所欲表達之意義。 （#TW11510141）

5. 有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，認為應該將語句拆解，他們的思維連結到學生在認知上難以了解整個敘述，學生較容易理解語句的部分，當部分理解後，可以促進整個語句的理解

有些職前教師在思考教文字敘述的教學活動時，思維連結到語句的部分，對學生而言比較容易學習或理解（參閱表 4.1.25），例如，

> 國中生對於一整串之文字敘述的解讀能力很弱，分部份[分]解說，學生反而較能了解其所欲表達之意義。 （#TW11510141）

> 從其中一部分開始，逐步引導學生，可增加其思考力（#TW11510107）

> Students can break down statement and focus on problem one part at a time. (#US11410131)

> Some students may understand the concept in context but cannot grasp what the statement is saying. By breaking the statement into easier to understand pieces, students can gain an understanding one bit at a time. (#US12710128)

前述職前教師的思維中，認為若學生能了解語句的部分，則能促進他們將這些部分連結起來，而了解整個語句，有些職前教師較明確地指出這個想法（參閱表 4.1.25），例如，

> 太多的敘述學生可能不易消化，若分解成各個學生熟悉的部分在[再]加以串連，比較容易消化　（#TW91010105）

> I also think it is helpful to break the statement into parts so they can focus on the understanding of smaller parts before they decipher the meaning behind the whole statement.　(#US11120133)

表 4.1.25　認為教學生理解語句的部分有助於整句之理解的職前教師

職前教師思維	職前教師編號
語句的部分對學生而言，較易學習或理解	#TW11610153、#TW11510107、#TW90810103、#TW11510141 #US10330106、#US10920105、#US11120111、#US11410131、#US12210101、#US12710128、#US13030103、#US13420109、#US14520109、#US14620105、#US15810147、#US15810160、#US32320109、#US32920112
學生理解語句的部分後，能促進整個語句的理解	#TW91010105、#TW11410162、#TW90810104、#TW90510105、#TW11610139、#TW11410146、#TW11510111 #US11120133、#US13220101、#US15220102、#US15810103、#US32930111

雖然這些職前教師的思維中都連結到要將語句拆解成部分，但他們所說的「部分」指涉什麼，不同職前教師並不相同，如表 4.1.26 所示。有些職前教師指涉的是語句中的詞彙，例如#US10330106 和#US15220102；有些職前教師指涉的是指數學物件，例如#TW11610139 和#TW11610153，數學物件有時並不是一個單純的詞彙，而可能是詞彙組成的短語，如「正數的正平方根」或「兩個正數的正平方根乘積」；有些職前教師則是指涉語句的更大組成部分，如子句等。

表 4.1.26　指出其所謂「語句之部分」為何的職前教師回答

- …because it will help students to better understand the meanings of the words and their relation to one another. (#US10330106)
- If they are able to break it down and figure out what each word means, hopefully they will be begin to learn the languange[language]. (#US15220102)
- 可先將句子中的物件弄懂，讓學生先有概念後，再去組合整個敘述（#TW11610139）
- 可使學生理解每個部份[分]的意義，知道什麼是$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{ab}$（#TW11610153）
- 可先解釋前半段的字意代表什麼意思，再解釋後半段的意義，最後兩者作結合後，利用數字再說明一次，讓學生理解。（#TW11510111）
- 先讓學生了解每一句話的意義後，再將各句子連結起來，較易逐步理解並融會貫通（#TW11410146）
- It also helps to break down the statement and make sure that they understand both parts before they will understand the entire statement. (#US15810103)

美國有些職前教師對語句的拆解有更深入的想法，如下，

> I chose D because it will help students to better understand the meanings of the words and their relation to one another.
> (#US10330106)

> …it correlates the mathematical statements into terms that can be more easily understood by the students (#US11120111)

他們的思維中，除了判斷出語句有其組成成分，即詞彙，**還連結到詞彙間有其組成的關係，這也代表著他們關注到語句中數學物件間存在著關係，**若他們能在教學活動中讓學生學習去觀察、分析這些關係，則學生將可能培養將來可以在面對其他語句時使用的數學語言知能，這是屬於心理型的知能，不僅是知識型的。**雖然其他教師沒辦法明確地討論語句中詞彙或數學物件的關係，然而，他們認為教學中應該將語句拆解，這對他們來說，即是 Schön（1983）所說無聲的（tacit）實踐的知識（practical knowledge），既是無聲的知識，教師要如何傳遞給學生呢？Schön 提出了他的答案：展示解決問題的歷程（show how to surmount the problem）。**

考量如何教數學語句時，浮現應將語句拆解，因學生較容易理解語句的部分或部分理解可以促進整個語句的理解之思維的職前教師中，有些同時浮現其他思維（參閱表 4.1.27）。**部分職前教師連結到部分促進整體語句理解之思維時，同時浮現的是與數學語句之特徵相關的思維，部分職前教師則連結到學生的面向，他們連結到學生的一般語言能力之相關思維，也有職前教師浮現的是讓學生連結文字敘述與式子表徵之思維**。相較於美國，臺灣有較多職前教師有這種同時連結數個思維的現象，且以連結部分促進整體語句理解之思維與數學語句特徵之思維者較多。當一個數學教師在面對教學情境時，若腦中有較多連結，他便有機會從一種運思（mental operation）轉換到另一種，根據 Krutetskii（1976）的說法，此即為思維的靈活性（flexibility of thought）。

表 4.1.27　浮現部分促進整體語句理解之思維時，同時浮現其他思維的職前教師回答

同時浮現數學語句之特徵相關的思維

- 太多的敘述學生可能不易消化，若分解成各個學生熟悉的部分在加以串連，比較容易消化（#TW91010105）
- 因為學生有可能是句子太長，不懂其中的意思，故拆解此敘述，分別解釋後再整合起來，應可幫助學生理解（#TW90810104）
- 長的句子學生較不易懂，一部分觀念先建立再結合（#TW90510105）
- 由一部分一部分拆解轉換成數學式子，比較起一口氣看完一句長的中文來得清楚易懂（#TW90810103）
- 看不懂敘述可能是句子太複雜，所以拆開說明應該會較容易（#TW11510107）
- … allows the students to look at the complex statement in smaller parts that may be less confusing… (#US12210101)
- D addresses the lengthy statement in smaller individual parts that helps explain each side of the equation. (#US13420109)

同時浮現一般語言能力之相關思維

- 國中生對於一整串之文字敘述的解讀能力很弱，分部份[分]解說，學生反而較能了解其所欲表達之意義（#TW11510141）
- 現在的國中生有些國文能力較差，如果從頭到尾順序閱讀，會比較有障礙，如果將每一小部份先用懂再加以組合，會比較容易（#TW11410162）

表 4.1.27（續）　浮現部分促進整體語句理解之思維時，同時浮現其他思維的職前教師回答

同時浮現讓學生連結文字敘述與式子表徵之思維

- 可使學生理解每個部份的意義，知道什麼是$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{ab}$（#TW11610153）
- 由一部分一部分拆解轉換成數學式子，比較起一口氣看完一句長的中文來得清楚易懂（#TW90810103）
- D addresses the lengthy statement in smaller individual parts that helps explain each side of the equation.　Again, students can take the statement and relate it to the expression they are comfortable with. (#US13420109)

6. 有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，思維連結到可在教學中進行文字敘述與其他數學表徵的連結，如此可幫助學生學習文字敘述或數學概念

在 3 中已報導過有些職前教師認為應幫助學生建立文字敘述與其他表徵的連結，相較於此，臺灣有些職前教師浮現不同的思維，他們亦想到文字敘述與其他表徵的連結，然而，他們的思考重心在於教學，而不在於培養學生能力，他們認為可以在教學活動中進行文字敘述與其他表徵的連結，如符號式子或數值實例等，但目的在於讓學生學習、理解當下所教的文字敘述或數學概念，例如，

> 讓文字與實際數字作結合，加深對文字的了解與印象（#TW11410172）

> 學生對於文字與符號間的聯結較弱，因此逐步擴展文字與符號間的聯結，有助於概念的理解　（#TW90010110）

#TW11410172 為讓學生理解文字敘述而進行文字與數值實例的連結，#TW90010110 為讓學生理解平方根算則的數學概念而進行文字與符號的連結。其他有此思維之職前教師的回答，如表 4.1.28 所示，

表 4.1.28　進行文字敘述與其他數學表徵的連結教學以教學生理解語句或概念之職前教師回答

- 讓文字與實際數字作結合，加深對文字的了解與印象（#TW11410172）
- 把文字和符號作連結，學生比較容易理解（#TW11410125）
- 以實際數據配合文字，可以增加理解力（#TW11510158）
- 以對照式的方法，一個文字對一個符號，一個文字對一個動作，比較能讓學生了解（#TW11410169）
- 用文字對應數字，較能與學生日常思考相似（#TW11810104）
- 將符號與文字與數字三者間做連結，有助於學生理解三方面其實代表的是同一個概念（#TW11410122）
- 學生對於文字與符號間的聯結較弱，因此逐步擴展文字與符號間的聯結，有助於概念的理解（#TW90010110）
- 因為有些學生對數學用文字說明的概念較不懂，所以應該有個式子對應。（#TW11610139）

本研究在此題目所設定的情境乃是要求職前教師進行文字敘述之數學語句及其所承載的概念的教學，然而，**部分臺灣職前教師僅以教授平方根算則的概念或法則為目的，忽略進行文字敘述之教學**，這是值得臺灣師培界注意的現象。

7. 有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，思維聯結到數學語句與其他數學表徵的難易度比較，他們認為相對於文字敘述，符號式子和數值實例對學生而言較容易理解

職前教師在思考教數學語言的教學活動時，思維中連結上文字敘述之外的數學表徵，他們比較文字敘述與其他表徵對學生而言的難易度，例如，

直接實際的數字比抽象的文字更容易讓學生了解　（#TW90510107）

不懂的學生是因為對文字敘述有困難，所以可以藉由數字來教學（#TW11410130）

以數字解釋，以符號表示，學生比較好理解　　　　（#TW11210114）

實際的數值代入，較容易了解　　　　（#TW11610105）

職前教師認為文字敘述相較之下較為困難，而符號式子或數值實例則為學生較易理解的表徵，其他浮現出此思維的職前教師如表 4.1.29 所列，由該表也可發現，有些職前教師使用「接受度高」、「有感覺」這類較為模糊、不明確的詞彙，他們是否亦是要表達容易理解與否，並不清楚。

表 4.1.29　職前教師所進行之文字敘述與其他表徵難易度比較

<table>
<tr><th>文字
敘述</th><th>比較
⟵⟶</th><th>其他
表徵</th></tr>
<tr><td rowspan="5">文字
敘述
抽象</td><td>難懂、無法理解　易理解、好理解、易明瞭
#TW11510141、#TW11610144、#TW11310103、#TW11610139、#TW90410109、#TW90410104、#TW11610153、#TW90510107、#TW11410130、#TW11210114、#TW11610105、#TW11510165</td><td rowspan="4">數字
數值
例子（數值）
式子（數值）</td></tr>
<tr><td>難　易
#TW11510159、#TW11810117</td></tr>
<tr><td>接受度高、易接受
#TW11410116、#TW11610144、#TW90510105</td></tr>
<tr><td>有感覺
#TW11410110</td></tr>
<tr><td>好理解
#TW11210114</td><td>符號</td></tr>
<tr><td rowspan="3">statement</td><td>comfortable
#US13420109</td><td rowspan="3">expression
example
(numerical)</td></tr>
<tr><td>learn better, learn well, learn best
#US10330102、#US12530103</td></tr>
<tr><td>do not understand
#US14820102</td></tr>
</table>

8. 有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，認為可在教學中以其他數學表徵來幫助學生學習文字敘述或數學概念

有些職前教師在考量教數學語言的教學活動時，思維連結到可以其他數學表徵，如符號式子或數值實例，來幫助學生學習文字敘述，例如，

> 以實例帶入敘述，可以讓學生了解敘述中數學名詞的意思
> （#TW11410162）

> I choose answer b because students need to see a[] concrete examples of words in math. Sometimes the most concrete example you can give them are numbers and symbols. (#US10250106)

他們提到包含其中的數學詞彙或整個敘述數值實例(#TW11410162 選擇 B）或符號較為具體，能幫助學生理解文字敘述中的數學詞彙。或是例如，

> 直接用數字代入文字中的敘述，能將文字數字化，幫助學生好理解吸收。 （#TW11510111）

> 實際代數字，能快速了解目的，利用例子，讓學生省思這段敘述。
> （#TW11510125）

> I believe that it is very beneficial for the students to substitute actual vales in and writing out steps. It helps them see an example to the statement. (#US11120133)

> I believe that typical students learn best by seeing examples of the actual statements. In choosing option (c), the usefulness of the statement is very clear. By choosing option (b), the students can see how they can just plug values in to the statement, and then it starts to make sense when simplified. (#US13220119)

這些職前教師則認為數值實例能幫助學生理解平方根算則的文字敘述。其他有此思維之職前教師如表 4.1.30 所示，這與 7 所描述，職前教師認為數值實例或符號式子對學生而言比文字敘述容易理解可能有關連。

表 4.1.30　職前教師所提出幫助學習文字敘述之其他表徵

欲學習之表徵	輔助之其他表徵	職前教師編號
數學名詞 words in math	實例 examples (numbers and symbols)	#TW11410162 #US10250106
文字敘述、文字、敘述	例子	#TW11710114、#TW11210101、#TW11510125、#TW11510159
	數字	#TW11510111、#TW90910103、#TW11510125、#TW11410146、#TW11810104、#TW11310103、#TW11410130
	實際的情況	#TW11510123
中文	數學式子	#TW90810103
statement	examples (actual vales、values、mathematical representation … based on number sense)	#US11120133、#US13220119、#US12210101
	numbers、real values、real numbers	#US15220102、#US15810103、#US32360126
	mathematical representation	#US14820102
textbook representations	numbers	#US10520105

另外，有相當數量的職前教師亦認為數值實例或符號式子有助於學生理解，但從他們的回答來看，他們的思維聚焦於教數學概念，利用數值實例或符號式子來讓學生理解平方根算則的概念、運算法則或實際運算操作，如表 4.1.31 所示(僅列出部分職前教師的回答，其他僅列出職前教師編號，其回答參閱附錄二)，

表 4.1.31　以其他數學表徵幫助學生學習平方根算則概念之職前教師回答

- B.帶實際的值可讓學生實際的運用更能理解此公式。C.帶值之後學生比較能夠接受，再用文字敘述更讓學生知道這個概念（#TW11810110）
- B.因為這句十分抽象，直接用實際例子帶入，再導入一般化的觀念會較快 C.利用特殊化的例子，導入一般化的觀念，學生眼見為憑容易接受（#TW11410154）
- 以例子輔助說明，增加學生對觀念的理解和應用（#TW11610134）
- 可以利用數學符號來輔助了解並加深概念（#TW11510152）
- 有實際數值帶數字進去運算，會讓學生較易了解$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$的觀念（#TW90910102）
- 運[用]簡單例子，引導記憶算則（#TW11810111）
- 可透過更多的例子讓同學模仿練習，熟悉公式的用途（#TW91010105）
- The theory or concept isn't always understood until examples are shown to the students. (#US13540108)
- The reason I chose these two is beacuse[because] it allows the students the opportunity to see real examples which will allow them to better grasp how the concept works. (#US35620102)
- Students need to work with examples to better understand the major concepts. (#US11130121)
- Replacing foreign words with numbers can help turn a odd algorithm into something the students can grasp. (#US10620108)
- By substituting values for the variables, students can see the concept in context. Using numbers helps to show how one expression can equal another. (#US12710128)
- by working with actual numbers students can clearly see what operations are taking place, and also discover the validity of the algorithm (#US12820110)

#TW11210101、#TW90910103、#TW11510159、#TW11610144、#TW90410109、#TW11410110、#TW90510105、#TW11610153、#TW11410116、#TW11810117、#TW90510107、#TW11610105、#TW11610130、#TW11210114、#TW11410152、#TW11510168、#TW11410135、#TW90410111、#TW11510114、#TW11610163、#TW11410159、#TW90210106、#TW11910113、#TW90410101、#TW11610117、#TW11910119、#TW11510140、#TW11510150、#TW90010102、#TW11510165、#TW91010105、#TW11510141、#TW90410104、#TW11610106、#TW11610125、#TW11410129、#TW90710105、#TW11710104、#TW90010109、#TW11510134、#TW11910112
#US12120101、#US10130109、#US10520105、#US12530103、#US12820105、#US10730113、#US10730125、#US11120126、#US13420113、#US13420117、#US13540102、#US11130128、#US10730105、#US12240102、#US12820118、#US10920101、#US10920105
#US13620103、#US11620101、#US10330102

本研究設計此平方根算則之情境乃以教數學語言與其承載的概念為教學主體，但這些職前教師的思維中，皆以教平方根算則的概念或法則為

其焦點，頗值得注意。雖然，美國有幾位職前教師（表 4.1.31 所列最後三位）的回答並沒有明確顯示出他們的教學主體是概念或是語言，例如，

> Giving kids more examples, especially allowing them to create the examples and work forward works best for overall understanding. (#US11620101)

並沒有明確指出 understanding 什麼，但從其描述完全沒有提到語句或敘述等詞彙的情況來看，他的思維所連結的很可能是進行數學概念的教學。而相較於美國，臺灣有相當多的職前教師在此情境中考量的是教數學概念，而非教數學語言，根據 Schön（1983）的說法，在實際世界中的實踐，問題並不會像數學中的已知條件（givens）那樣自己呈現出來（present themselves），據此，教師必須能自己從教學情境中建構出問題並加以解決，若數學教師的思維無法主動連結到數學語言，他們引動進行數學語言的教學、培養學生數學語言相關知能的機會並不高。

9. 有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，思維連結到課堂中教與學的方法或過程

有些職前教師在思考教數學語言之教學活動時，思維連結到課堂中教與學的方法與過程（參閱表 4.1.32），部分職前教師應**讓學生在學習過程中，自行進行運思、數學物件的操弄，以建構知能**，但職前教師的教學主體有可能放在語言上，也可能放在概念上，例如，

> <u>讓學生自己操作</u>，一步步把算則建構出來，應能幫助學生<u>理解這個敘述</u>（#TW90810104）

> I feel that these are the most effective as they <u>require the students to evalaute[evaluate] the statements to discover what they mean instead of just trying to show them myself</u>. These are much more <u>constructivist approaches</u>. (#US32350102)

直接帶數字做運算，學生較易了解，當學生了解後，<u>由學生自己的文字描述較易了解</u>　（#TW90410104）

I think that those two would be most effective because you are <u>having the students describe and work with the concept</u>. I think that <u>the more the students can work with it themselves, the more they will own it</u>. It is easy to watch someone else do something on the board, but to <u>work through it themselves will allow them to grasp a better understanding</u>. (#US11130125)

#TW90810104 與#US32350102 便是以數學語句為教學主體，要讓學生理解敘述，而#TW90410104 與#US11130125 則是以教數學概念為目的。

另外有些職前教師亦考慮學生的學習過程，但不同的是，他們認為**應讓學生模仿教師進行數學活動**，例如，帶實際數值到敘述中，例如，

學生會用<u>模仿</u>的方式<u>學會此模式</u>　（#TW11910106）

連結至此思維的僅有臺灣職前教師，皆是以數學概念為其教學主體。

有些職前教師亦認為**應讓學生在教學活動中自行進行操作以建構知能，但他們認為教師同時應對學生進行引導**，協助學生，例如，

學生的國語文能力有時很弱，所以由<u>老師引導</u>，<u>逐步地讓學生解讀，自己得到的比別人給的會多更多</u>　（#TW11410135）

For b, I, with the last question, showed how I would <u>guide students to write out</u>, step by stwp[step], <u>the mathematical representations of the statement using actual numbers for the stated 'two positive numbers'</u> (#US13620103)

These two are most effective, because it <u>involves the students thinking for themselves</u>. The other choices deal with you, the teacher, telling them what to do or giving them options. <u>By guiding them or giving them little hints, they can work hard to try [ ] it out and solve it for themselves</u>. (#US10730109)

美國有較多職前教師思維連結到教學活動中應讓學生主動的操作與建構，一個可能的解釋是：根據 Triandis（1995），在偏向個體主義的國家（individualistic countries）中，學生被視為自主的個體，知識的獲得主要來自獨立的、個人的活動（independently on their own），相反的，在偏向集體主義的國家（collectivistic countries）中，教師與學生間互有責任，教師有義務提供學生他們需要的支援，而學生有義務參與教師安排的學習活動（engage in learning processes），在教師的指導下獲得知識。在 Felbrich、Kaiser 與 Schmotz（2012）的分類中，美國屬於偏向個體主義的國家，而臺灣屬於偏向集體主義的國家。

表 4.1.32　思維連結到教與學的過程之職前教師回答

教與學的過程	教學主體	職前教師編號
學生自行操作、建構	數學語句或其他數學語言知能	#TW90810104、#TW90510107、 #TW11610105 #US32350102、#US10520105、 #US10220109、#US13220101、 #US10730121
	數學概念、算則	#TW11910113、#TW90410104、 #TW11510158、#TW11810117、 #TW90710103 #US11130125、#US11520106、 #US11820107、#US10130117、 #US10250106、#US10520105、 #US12730101、#US12820105、 #US13220106、#US13220110、 #US10730113、#US10920109、 #US14720104
學生模仿教師進行操作	數學概念、算則	#TW11910106、#TW91010105、 #TW91010101、#TW11610150
在教師引導下， 學生自行操作、建構	數學語句或其他數學語言知能	#TW11410135 #US13620103、#US10730109
	數學概念、算則	#TW11610134 #US11130106
教師引導、帶領學生	數學語句或其他數學語言知能	#US12520101
	數學概念、算則	#TW11810111、#TW11710108、 #TW11910112 #US32920108
教師檢核學生學習情況	數學概念、算則	#TW11610116、#TW11410130、 #TW90210106

有些職前教師的思維更聚焦於教師，他們認為教師應在教學活動中帶領、引導學生，較不強調學生的操作與建構，例如，

帶著學生一步步做，學生較容易了解　　　　　　　（#TW11710108）

This way I will be able to take them step by step through the statement so they will be able to understand it.　　　　　(#US12520101)

或浮現出**教師可透過教學活動檢核、了解學生的學習情況**之思維，例如，

> 學生的敘述可以看出學習的盲點，看看他們是在哪一個環節開始出錯（#TW11610116）

僅有臺灣職前教師浮現此思維。這可能表示臺灣職前教師相較於美國，更重視形成性評量，隨時在課堂中掌握學生的學習情形。

10. 有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，思維連結到學生的情意面向

有些職前教師在思考教數學語言的教學活動時，思維連結到學生的情意面向，包含連結到**學生的數學態度**者，如下，

> 直接看敘述會讓學生有排斥感，利用實際數值使他們了解，會容易的多（#TW11810117）

> 學生對於過多符號，均為排斥的念頭，以實際數值帶入，較能引起學習動機（#TW90710103）

#TW90710103 亦認為教學活動應讓學生有**學習動機**，其他還有連結到**學生的數學學習態度**者，如下，

> 學生通常沒有耐心看完整段文字，所以老師要分段解釋（#TW11610125）

> 帶學生一步步看，會使學生耐心看完（#TW11910112）

另有連結到**學生的數學焦慮**者，如下，

> 有些學生對於抽象的代數會過於恐懼，先用數字做運算，使其了解這句話是對的（#TW90010102）

> 學生對符號會有恐懼症，所以要舉實際的例子來幫助學生學習（#TW11410129）

在教平方根算則之文字敘述時，在教學活動中考量到學生情意面向的職前教師並不多，僅上述 6 位，而美國並沒有任何職前教師連結到情意面向的思維。Frederick（2006）的研究發現，西方國家的數學教師較東方國家更重視在教學能否引發學生的興趣，然而，在本研究中，卻沒有任何美國職前教師思考教學活動時，連結到學生情意面向，其中原因，值得進一步探討。

11. 有些職前教師在思考教文字敘述之數學語句的教學活動時，思維聚焦於數學算則的教學，而非以數學語句為教學主體

根據前述分析（例如，8），我們知道多位職前教師在本研究所安排教平方根算則之文字敘述時，思維中所連結的為教數學概念，而非教數學語句。

臺灣僅有不到 10 位職前教師在考量時完全以數學語言及其所承載的概念為教學主體，其他職前教師在考量部分教學活動時，思維會連結到以數學算則為教學主體，有些職前教師甚至在本研究設計的整個教學情境中，都僅教數學概念為其考量。美國在思考教學活動時，完全以數學語言為教學主體進行考量者，卻較臺灣多，有近 20 位。

另外，值得注意的是，有些職前教師在思考某些教學活動時，思維的串連都在數值實例與符號式子上，他們的思維並沒有去連結情境中所提供的文字敘述，例如（其他參閱表 4.1.33 及附錄二），

> 先以數字不要以符號，學生較易理解後，再慢慢符號化
> （#TW11710104）

> 符號以數字取代可降低其抽象性，而習慣數字之運算可助於了解抽象之符號算式（#TW90710105）

having the students practice understanding the concept by substituting values they choose is helpful for the students because [ ] they like to see actual values to help verify themselves that it is true. Once verifying that it is true for several values, then they can practice learning the algorithm given any two values a and b, and taking it one step at a time helps the students gain the information. (#US13420117)

值得注意的是，呈現此類思維的職前教師，臺灣的數量仍較美國為多。這樣思維的職前教師，無法連結到數學語句及其教與學，他們在師資培育學程中，可能沒有明確學習過數學語句及其教與學相關的概念或思維，以供他們連結，若以建立實踐的知識（practical knowledge; Schön, 1983），即行動中的理解（knowing in action），來看，他們也沒有在做為學生或擔任教師的行動中（action），得到這樣的思維。

表 4.1.33　思維的串連僅在數值實例與符號式子上的職前教師回答

- 先以數字不要以符號，學生較易理解，降低難度（#TW11710104）
- 可以正確使用公式，而不會產生$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$之情形（#TW90710105）
- 學生對符號通常感覺較弱，帶數字直接計算較容易理解（#TW11610125）
- 學生習慣數字，先熟悉數字後，會較能接受符號（#TW11410129）
- students always seem to be confused when variables are involves, so taking the variable out and substituting real numbers into the equation will help them understand. (#US13420113)
- I find that when I can see an example I can make a small connection to build on it. Once I see the example with integers then variables can be added and taken step by step. (#US10730105)

#TW11410129、#TW11910112、#TW90710103、#TW90010109、#TW11510134、#TW11510114、#TW11610116

#US10920101、US13540108、US12240102、US12820118

12. 有些職前教師在呈現他們關於數學語言之教學的思維時，用詞並不準確、頗為侷限，會使用指涉較為廣泛的、日常的詞彙，他們數學教育的詞彙不足，或是也缺乏與該詞彙所承載的數學教師知識、概念（參閱表 3.1.34）

有些職前教師使用「觀念」這個詞彙，例如，

長的句子學生較不易懂，一部分觀念先建立再結合　　（#TW90510105）

他們所指涉的，應該是「概念」，該詞彙為數學教育中普遍使用的詞彙，但這些職前教師卻無法在恰當的時候使用，可見得其數學教育之詞彙的缺乏。又如，#TW11810111 的描述中，「數學」指的很可能是數學概念、知識或算則，但他只是以「數學」模糊地帶過，並不認為需要更精確地描述其思維。

可能敘述太過抽象而不是數學不懂　　（#TW11810111）

另外有些職前教師在回答中描述到「能力」，例如，

從其中一部分開始，逐步引導學生，可增加其思考力（#TW11510107）

以實際數據配合文字，可以增加理解力　　（#TW11510158）

國中生對於一整串之文字敘述的解讀能力很弱，分部份[分]解說，學生反而較能了解其所欲表達之意義　　（#TW11510141）

然而，第一、二位職前教師可能並不是真的描述能力，只是指在教學活動中，提升學生當下的思考或理解，但他們的用詞並不準確；第三位職前教師的問題則在於，由其「文字敘述的解讀能力」這樣的描述，並無法確知他想要說的是專屬於數學語言的能力，或是指一般語言能力，而他本身也可能並沒有明確思考過這兩種能力是否有差異。

有些職前教師使用「感覺」、「親切」、“comfortable”等詞彙，例如，

因為學生對實際數字比較有感覺　　（#TW11410110）

數值實例對學生而言較親切　　（#TW11410159）

Because students need extra practice. Also, by breaking it up into steps the students are not overwhelmed and can get comfortable with certain portions before overloading them. (#US32920112)

D addresses the lengthy statement in smaller individual parts that helps explain each side of the equation. Again, students can take the statement and relate it to the expression they are comfortable with. (#US13420109)

他們所欲描述的可能是學生較容易理解，但卻使用了日常生活的詞彙。另外，

給予學生視覺上的感覺，讓他們更清楚地明白內容說明（#TW11610150）

雖然也使用了「感覺」這個詞彙，但他的說明，若進一步思考，其實描述的是，讓學生能經由視覺，見到數值實例與文字敘述二者間關連、對應的操作，在腦中產生二者的連結，並非在「感覺」層面，但職前教師缺乏足夠的數學教育之詞彙去描述，也可能缺乏在腦中思考這個認知歷程的能力。

有些職前教師使用“mathematical language”或“mathematical representation”這樣的詞彙，例如，

Choice b is helpful because it teaches students to extract meaning from statements and represent it in a mathematical language. (#US12820114)

b. gives the students a chance to develop their own understanding with examples of their choice. They can connect the statement to the mathematical representation as they go. (#US12210101)

I would start with part c. I think it is effective because it provides the students an example using concrete terms so they can translate the words into the math. (#US10920109)

由這些職前教師的說法可以看出，他們將文字敘述的數學語句排除在他們使用的“mathematical language”或“mathematical representation”之外，然而，

一般而言，文字敘述的數學語句仍屬於數學語言與數學表徵的範疇，他們數學語言相關的教學能力之不足，在此也提供本研究一個線索。

表 4.1.34　職前教師使用之非數學教育專門詞彙

職前教師詞彙	職前教師編號
觀念	#TW11410154、#TW90510105、#TW11510134、#TW11610134、#TW90910102
思考力	#TW11510107
理解力	#TW11510158
文字敘述的解讀能力	#TW11510141
感覺	#TW11410110、#TW11610150
親切	#TW11410159
接受、接受度	#TW11410116、#TW11610144、#TW90510105
comfortable	#US13420109、#US13420109
mathematical language	#US12820114
mathematical representation	#US12210101、#US14820102
the math	#US10920109
數學	#TW11810111

使用數學教育中的詞彙，屬職前教師的數學教學知能的一部分，也代表著師資培育對他的培養成效（Blömeke et al., 2008），當職前教師無法使用這些詞彙時，師資培育的培育成果值得考量。此外，數學教育中專門詞彙的具備，能使職前教師與他人或與自己溝通數學教育中的概念，促進反思，以幫助形成其他的概念，進一步來說，當職前教師關於數學教育的概念能與承載它的語言連結，語言便成了這個概念的標誌與把手，供職前教師選取、操縱他們的概念，也就有了自由控制自己思想的能力（Skemp, 1987）。

三、職前教師對學生知能在文字敘述數學語句之組成與特徵的機制之思維

由前述分析，我們知道部分職前教師能思維中能連結到文字敘述為主之數學語句的特徵，並認為這些特徵會造成學生的理解困難，然而，他們所能覺察的的特徵乃是如抽象、冗長等，而不是如同文獻中討論的物件間關係的複雜、大量名詞化等，在此部分，本研究從數學語言的角度出發，探討當真正落到執行面時，職前教師為降低學生的理解困難，會使用怎樣的語句，並詮釋職前教師對學生知能在文字敘述數學語句之組成與特徵的機制之思維。本研究給予職前教師以下語句，

臺灣：兩個正數的正平方根乘積，與兩個正數乘積的正平方根相同。

美國：The product of the positive square roots of two positive numbers is equal to the positive square root of the product of the two positive numbers.

提供給職前教師的語句兼具了多項文獻中所論及之數學語言特徵，例如：語法結構複雜、物件關係複雜、語句進展速度快、大量名詞化、包含多個數學專門詞彙等。在問卷情境中，告知職前教師學生理解此語句的式子表徵$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$，但看不懂該語句，以開放性試題要求職前教師被將該語句改寫成學生較易理解的句子，但仍須以文字敘述為主。

本研究採用歸納分析法（Patton, 2002），先以從語句組成成分的角度出發，分析職前教師新改寫之語句，抓取他們修改哪些原詞彙，並整理、分類他們改寫後的新詞彙；也對他們所變更的語句結構進行分析，其中也包含因詞彙的修改而伴隨的語句結構改變。本研究再從語句特徵的角度，分析職前教師改寫的語句具有的特徵，本研究根據這些線索，探討職前教師思維中,認為對學生造成困難以及相對應的學生較易理解的詞彙、關係、語句結構，詮釋職前教師對學生知能在文字敘述數學語句之組成與特徵的機制之思維

本研究發現，職前教師進行改寫主要有以下幾類，包含詞彙的改寫與這些詞彙的改變所伴隨之語句結構變化，以及部分針對語句結構所做的改變。臺灣與美國職前教師雖然使用不同語言，但改法中，顯現共同的特徵，因此，本研究不特別拆開兩個國家報導，但對於各國獨特之處，會特別說明。

1. 有些職前教師改寫「乘積」/"product"

雖然乘積（product）在臺灣、美國都是國小課程中就出現的詞彙，但兩個國家卻都是最多職前教師改寫這個詞。

在臺灣，有些職前教師將「乘積」改寫為「乘以」，對應於這個改法，美國職前教師是將"product"改為"times"（參閱表 4.1.35 及附錄三）。

相較於「乘積」/"product"為一個名詞，表示乘法運算之後的靜態結果，**「乘以」/"times"表徵一個運算動作，學生在腦中處理這個詞彙時，會有操作的程序**。

此外，改為「乘以」/"times"，會迫使語句的結構改變，即做乘法運算的兩個物件，會被拆開，例如，

> 一個正數的正平方根<u>乘以</u>另一個正數的正平方根會等於這兩個正數先相乘再取正平方根（#TW90410111）
>
> A and B are positive numbers. <u>The square root of A times the square root of B</u> are equal to the square root of <u>A times B</u>. (#US12120105)

在#TW90410111 的語句中，「兩個正數的正平方根乘積」改為「<u>一個正數的正平方根乘以另一個正數的正平方根</u>」，在#US12120105 的語句中，"The product of the positive square roots of two positive numbers"改為"<u>The square root of A times the square root of B</u>"，而"the positive square root of the product of the two positive numbers"改為"the square root of <u>A times B</u>"，**相乘的物件被**

拆開，而此一改寫，也使得語句中的帶有新訊息的詞彙一個一個逐步出現，減緩了語句進展的速度。

表 4.1.35　改寫「乘積」/“product”為「乘以」/“times”的職前教師回答

- 一個正數的正平方根乘以另一個正數的正平方根會等於這兩個正數先相乘再取正平方根（#TW90410111）
- 一個正數開根號乘以另一個正數開根號，會等於這二個正數相乘後，再開根號。（#TW11410101）
- 一個開根號的正數，乘以另 1 個開根號的正數的積，和 2 個正數乘起來再開根號相同（#TW11510168）
- 如果 a,b 為正數，a 的平方根乘以 b 的平方根等於 a×b 的平方根（#TW11210114）
- If a and b are two positive numbers, then the square root of ab is equal to the square root of a times the square root of b (#US10330105)
- If you have two positive numbers, a and b, and you take the square root of each and then multiply them together, it is equal to the square root of a times b. (#US10730121)
- If you have two positive numbers a and b, then the square root of a times the square root of b is the square root of a times b. (#US10730125)
- A square root of a number times a square root of another number equals the square root of the original numbers multiplied (#US13420105)
- A square root times a square root equals the same two numbers multiplied inside a square root, provided we only consider the postive square root and both numbers are positive. (#US31920105)

#US10130117、#US10620108、#US11130121、#US11520102、#US11520109、#US12120105、#US13220101、#US15220102、#US15810135、#US32350102、#US32920112

在臺灣，將「乘積」改寫為「乘以」的職前教師僅有 4 位，在美國則有較多將“product”改為“times”。

較多的**臺灣職前教師是將「乘積」改寫為「相乘」，而相對應的美國職前教師改法則是將“product”改為“multiply”**。

相較於「乘積」/“product”表示乘法運算之後的結果，「相乘」/“multiply”與「乘以」/“times”一樣，皆**表徵一個運算動作，具有程序性、操作性的特質**。然而，**與「乘以」/“times”不同的是，此類改法並不必然致使句中將兩個同時出現的兩個數學物件拆開**，即兩個「正數的正平方根」/“the positive square roots of two positive numbers”或兩個「正數」/“the two positive numbers”。例如（參閱表 4.1.36 與附錄三），

兩個正數的正平方根相乘會等於 2 個正數相乘的正平方根（#TW11510134）

Multiplying the positive square root of two positive numbers a and b is equal to the multiplication of the two positive numbers and then taking the square root. (#US10130109)

表 4.1.36　改寫「乘積」/“product”為「相乘」/“multiply”的職前教師回答

- 一個正數開根號乘以另一個正數開根號，會等於這二個正數相乘後，再開根號（#TW11410101）
- 兩的[個]正數的平方根要相乘時，先將二正數相乘，再解相乘後的正平方根（#TW11510150）
- 若 a, b 為大於零的數，其平方根相乘，會等於 a, b 兩數相乘的平方根（#TW90410101）
- 兩個正數的正平方根乘積會等於兩個正數先相乘後在[再]開出（取）正平方根（#TW11510127）
- 兩正數的正平方根相積，與兩正數相乘之後再開平方相同（#TW11410129）
- To find the product of the square roots of two positive numbers, you can multiply the two positive numbers and take the square root of their product. (#US10730113)
- Muliplying two square roots of two numbers is the same as taking the square root of the two numbers multiplied. (#US14520109)
- A square root of a number times a square root of another number equals the square root of the original numbers multiplied. (#US111310114)
- As long as neither of the numbers is not a negative number or 0, the product of two separate square roots is the same as if the two numbers were multiplied and then the square root was taken. (#US13540129)
- If you take the positive square root of two positive numbers, a and b, and multiply them, the result is equal to the square root of ab. (#US13030103)

表 4.1.36（續） 改寫「乘積」/“product”為「相乘」/“multiply”的職前教師回答

相乘	#TW11510123、#TW11210109、#TW11810104、#TW90410111、#TW11410172、#TW11510111、#TW11410159、#TW11510140、#TW11510106、#TW11510152、#TW90510105、#TW11410162、#TW90910103、#TW11410122、#TW11910106、#TW11410130、#TW90510107、#TW11810111、#TW11710114、#TW11510159、#TW11710108、#TW11910113、#TW90410104、#TW11810110、#TW11410154、#TW11610144、#TW90410109、#TW11410110、#TW11610130、#TW11410152、#TW11610117、#TW11510165、#TW11410105、#TW11510134、#TW90010109、#TW11910112、#TW11410129、#TW116101125、#TW90710105、#TW11410143、#TW90810103、#TW11310103、#TW11610105、#TW91010101、#TW11610150、#TW11410116、#TW90010110
multiply	#US10220109、#US10250102、#US10920101、#US10920109、#US11130125、#US11130128、#US11410127、#US11620101、#US12120101、#US12820110、#US13030103、#US13420113、#US13540102、#US14520109、#US14720102、#US15810160、#US32320109、#US32360126、#US31920105、#US12710128、#US13420109
be multiplied	#US10250106
multiplication	#US11130110、#US13420101

另外，有職前教師的改法中，增加了口語化的特徵，如表 4.1.37 所示，以臺灣職前教師來說，他們**在「相乘」後面加了「起來」，或在前面加了「合併」，或使用「乘起來」這個詞彙，而美國職前教師則在“multiply”或“multiplied”後面加了“together”，加入這些日常的用語，使得語句除了增加語句的程序性、操作性的特質外，也增加了口語化的特徵。**

表 4.1.37 改寫「乘積」/“product”為「相乘起來」/“multiply…together”的職前教師回答

- 兩個正數的正平方根相乘起來，會等於兩個正數相乘起來的正平方根（#TW90110108）
- 將兩個正數開平方，取正的平方根，將這兩個數的平方根相乘起來，另外直接把剛才那兩個正數相乘，再開平方，取正平方根，你會發現兩個方法算出來的都一模一樣（#TW11410154）
- 兩正數的平方根相乘可直接在根號中合併相乘（#TW90810104）
- 一個開根號的正數，乘以另 1 個開根號的正數的積，和 2 個正數乘起來再開根號相同（#TW11510168）
- 根號相乘即是數字乘起來補上根號（#TW11410152）

表 4.1.37（續）　改寫「乘積」/“product”為「相乘起來」/“multiply…together” 的職前教師回答

- If you first take the square root of two positive numbers and then multiply the positive solutions together, it is the same as taking those same two positive numbers and first multiplying them together and then taking their positive square root.(#US10730109)
- Multiplying the square roots of two positive numbers is the same as the square root of the two numbers multiplied together.(#US10920109)
- If the square roots of two numbers are multiplies[multiplied] together then this would be the same as the square root of the product of the two numbers.(#US111310114)
- When you multiply the square root of two postive[positive] numbers together, it will equal the square root of those two positive number[numbers] multiplied together. (#US11120133)

multiplied…together	#US11520106、#US11720130、#US13420109、#US32320109
multiply … together	#US10730121、#US10230102、#US11120126、#US11520106、#US11620101、#US15810103、#US35620102

另有一類職前教師的改法中，**也使用「相乘」/“multiply”這個詞彙，但他們所改寫之句子的結構，與使用「乘以」/“times”較為相似，他們也將兩個同時出現的數學物件拆開**（參閱表 4.1.38 與附錄三），因此，**除了增加語句的程序性、操作性的特質外，也具有減緩語句進展速度的特徵，**例如，

一正數之正平方根與另一正數之正平方根相乘等於此兩正數相乘之值的正平方根　（#TW11510125）

When we multiply the square root of a positive number by the square root of another positive number, we get the square root of the product of the two numbers.　(#US13220110)

The square root of the first positive number multiplied by the square root of the second positive number equals the square root of the product of the first number multiplied by the second number (#US10920105)

The algorithm for square-root multiplication states that when a and b are both great than 0, then following is true: the square root of a multiplied by the square root of b can be rewritten as the square root of a multiplied by b. (#US11120111)

#TW11510125 將「兩個正數的正平方根」拆成「一正數之正平方根」與「另一正數之正平方根」，使用「A 與 B『相乘』」的語句結構。#US13220110 將“the product of the positive square roots of two positive numbers”拆成“the square root of a positive number”與“the square root of another positive number”，使用“‘multiply’ A by B”的語句結構。#US10920105 與#US11120111 都使用“A ‘multiplied’ by B”的語句結構，且是同時將兩個物件的敘述“the product of the positive square roots of two positive numbers”與“the two positive numbers”拆開的例子，然而，#US10920105 的拆法與前述#US13220110 類似，而#US11120111 則使用數學物件 a、b 來拆。

表 4.1.38　改寫「乘積」/“product”為「相乘」/“multiply”，且拆開兩個同時出現之物件的職前教師回答

- 一個開根號的數與另一個開根號的相乘，其結果會等於這兩數先相乘再開根號（#TW11410169）
- The square root of a positive number "a" multiplied by the square root of a second positive number "b" is equal to the square root of the product of the two numbers. (#US10520101)
- The square root of one number multiplied by the square root of another number can be found by multiplying the two numbers together and taking the square root of this product. (#US11120126)

…與…相乘	#TW11510158、#TW11510125
multiply … by…	#US10220109、#US11130110、#US13220110
… multiplied by…	#US13420117、#US11720117、#US12730101、#US13420113、#US10920105、#US11120111

2.　有些職前教師改寫「正平方根」/“the positive square root”

「正平方根」/“the positive square root”是另一個職前教師會將之改寫為運算動作的詞彙/短語。

在原始的語句中,「正平方根」/“the positive square root”為一個名詞(名詞短語),可視為運算之後的結果(例如,將$\sqrt{2}$看成 2 經過開根號運算的結果),也可不考慮運算過程而將它本身視為一個數(例如,$\sqrt{2}$本身即表示一個數),無論是哪一種,皆偏向靜態。**部分職前教師會將之轉為動態的、執行一個運算動作的過程,在臺灣,職前教師會將「正平方根」改成「開(正)平方根」、「開平方」、「開方」、「取(正)平方根」**等(參閱表 4.1.39 與附錄三),改法例如,

> 兩個正整數開平方根後相乘與先將兩個正整數相乘後再開平方根的結果會相同 (#TW11810111)

> 兩正數的正平方根相積,與兩正數相乘之後再開平方相同 (#TW11410129)

> 兩個正平方根相乘等於兩數相乘再開方 (#TW11710108)

> 一個正數的正平方根乘以另一個正數的正平方根會等於這兩個正數先相乘再取正平方根 (#TW90410111)

也有職前教師雖然沒有加入「取」或「開」這樣的動詞,但從其改法也可看出他**將「平方根」動詞化**,如下,

> 將兩正數分別平方根後再相乘,會與兩正數先相乘後再平方根,其結果相同 (#TW91010101)

美國職前教師將名詞短語“the positive square root”改為含運算動作的方式,其中一種是加上動詞“take”、“get”、“find”等,將之改為“take the (positive) square root”、“ get the square root”、“ find the square root”、“ the square root was taken”等(參閱表 4.1.39 與附錄三),例如,

> If you took the square roots of two positive numbers and multiplied them together you would get the same product as multiplying the numbers together and then getting the square root. (#US15810103)

As long as neither of the numbers is not a negative number or 0, the product of two separate square roots is the same as if the two numbers were multiplied and then <u>the square root was taken</u>. (#US13540129)

The square root of every positive number is positive. Therefore, when multplying the square root of one positive number by the square root of another positive number you will find the answer to be the same as multiplying the two positive numbers first and then <u>finding the square root</u> of the product. (#US10220109)

有些美國職前教師直接**以"square root"為動詞，以之進行運算動作**，例如，

Pick two numbers greater than zero and <u>square root them</u> each. Multiply them together and you will get a number. That number will be equal to the product of the two numbers. (#US10230102)

IF you multiple the square roots of two positive numbers (greater than 0) then the answer is equal to the squar[square] root of the same numbers multiplied together then <u>sqaure[square] rooted</u>.
(#US32320109)

表 4.1.39 將「正平方根」/"the positive square root"改為含「正平方根」/"the positive square root"詞彙之運算動作的職前教師回答

- 兩個正數的正平方根乘積會等於兩個正數先相乘再<u>開出（取）正平方根</u>（#TW11510127）
- 現在有兩個正數，先將兩個正數分別<u>取平方根</u>之後，再將兩正數的平方根相乘；接著，先將兩正數相乘後，再<u>取平方根</u>，比較前後兩者，便可發現兩者是相等的！（#TW11310103）
- 兩個正數先<u>取正平方根</u>後再相乘，會和兩正數先相乘再<u>開正平方根</u>（#TW11610125）
- multiplying the positive square roots of two positive numbers is the same as multiplying the two positive numbers and <u>taking their positive square root</u>. (#US12820110)
- If I take two numbers, <u>take the square root</u> of both of them, and multiply them together, it is the same as multiplying two numbers togeth first and then <u>taking the square root</u> of the new number of product. (#US35620102)

表 4.1.39（續） 將「正平方根」/“the positive square root”改為含「正平方根」/“the positive square root”詞彙之運算動作的職前教師回答

開（正）平方根	#TW11810111、#TW11610105
開平方	#TW11810104、#TW90910103、#TW11410122、#TW11410154、#TW11410129
開方	#TW11710108
取（正）平方根	#TW90410111、#TW11510127、#TW90410109、#TW11410116、#TW116101125、#TW11410154
平方根（動詞用法）	#TW91010101
take the/their (positive) square root(s)	#US10730121、#US10130109、#US10250102、#US10730109、#US10730113、#US11120126、#US11620101、#US14520109、#US15810103、#US10730109、#US13030103、#US13420113、#US14720102
get the square root	#US15810103
the square root was taken	#US13540129、#US15520103
find the square root(s)	#US10220109、#US12710128
square root（動詞用法）	#US10230102、#US32320109

臺灣職前教師有另一類將「正平方根」轉為動態過程、一個運算動作之執行的方法，他們沒有保留「正平方根」這個詞彙，而改用「正平方根」的符號詞彙「根號」，他們**使用的運算動作詞彙為「開根號」**（參閱表 4.1.40 與附錄三），例如，

> 一個正數開根號乘以另一個正數開根號，會等於這二個正數相乘後，再開根號 （#TW11410101）

> 兩個正數開根號後相乘，與此兩個正數先相乘後開根號的值會相等 （#TW11410172）

> 兩個正整數平方根相乘等於兩個正整數相乘再開根號（#TW11910106）

> 兩個正數開根號皆取正後相乘會等於兩個正數先相乘後開根號取正 （#TW90510107）

表 4.1.40　將「正平方根」改為「開根號」的職前教師編號

詞彙	職前教師編號
開根號	#TW11410101、#TW11510168、#TW11410172、#TW11410159、#TW11510140、#TW90810103、#TW90510105、#TW11410162、#TW11410169、#TW11910106、#TW11410130、#TW90510107、#TW11710114、#TW11510159、#TW11910113、#TW11610150、#TW11810110、#TW11510165、#TW90010110、#TW90010109、#TW11910112

「開根號」是臺灣數學課堂中常使用的詞彙，學生學習歷程中，**相較於「平方根」這個詞彙，運算符號"$\sqrt{\ }$"可能與「根號」這個詞彙有較強的連結，因此，職前教師選用這個詞彙，比之於前一類使用「平方根」的改法，增添符號表徵連結的特徵，也使得運算動作更為具體、明確。**

有些職前教師使用「根號」、"radical"等詞彙，他們的用法中，乃是直接指稱"$\sqrt{\ }$"這個符號，如表 4.1.41 所示。有些職前教師將「兩個正數乘積的正平方根」/"the positive square root of the product of the two positive numbers"改寫成兩數的乘法運算會在「根號」、"radical"內進行（#TW11710114、#TW90810104、#TW11910112、#US11130125、#US13540102），#US11130128 與#US13420109（表 4.1.41 最後兩個例子）亦是類似的描述方式，雖然他們沒有使用"radical"這個詞彙，而保留了 square root。有些職前教師的改寫則描述兩數的乘法運算完成後，要加上「根號」這個符號（#TW11510152、#TW1141015、#TW11610139）。關於這些改法，語句中**對一個數開根號或取一個數的平方根這樣的運算意涵並不明顯，承載的語義是較偏向說明外在表徵上需要呈現成某個「長相」**。而#TW11510152 與#US11720117 所使用的「帶有根號的正數」或"square root number"亦是對外觀的描述。

表 4.1.41　改寫語句中使用「根號」、“radical” 指稱“$\sqrt{\ }$”這個符號的職前教師回答

- 兩個正的根號相乘，其實就是根號裡面的兩數相乘然後再開根號（#TW11710114）
- 兩正數的平方根相乘可直接在根號中合併相乘（#TW90810104）
- 平方根的乘積會等於根號內的數字相乘後開根號（#TW11910112）
- 2 個帶有根號的正數相乘，與 2 正數相乘加根號　其值相同（#TW11510152）
- 根號相乘即是數字乘起來補上根號（#TW11410152）
- 兩個正數的正平方根乘積會等於兩個正數乘積後再加上根號（#TW11610139）
- If you have two positive square roots you can multiply the two numbers under the radicands(radicals) and leave their product under a radicand(radicals). (#US11130125)
- If a and b are greater than zero (so there isn't a negative under the radical)　and radical a x radical b　= radical ab.　You can multiply a x b and put their product under the radical. (#US13540102)
- In order to multiply two different square roots (of positive numbers), you can multiply them under one square root symbol. (#US11130128)
- A square root times a square root equals the same two numbers multiplied inside a square root, provided we only consider the postive[positive] square root and both numbers are positive. (#US31920105)
- you start with two square roots that have positive answers.;When you multiply these two individual square roots the answer is one square root with the two numbers multiplied together underneath it.　;The answer of this square root must also be positive. (#US13420109)
- When all numbers are positive, and a square root number is multiplied by another square root number, the product is equal to the square root of the product of the two numbers. (#US11720117)

這些職前教師在改寫語句時，能思考到原語句對學生理解的困難，因而他們做了改寫。在本研究設計的情境中，學生已理解平方根算則的式子表徵$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$，職前教師需要的是提供學生另一個學生較可能理解、學會的文字表徵，可視為讓學生學會原語句的中繼物件，這對職前教師而言是一個重要的教學能力，因為學生對課本中的文字敘述數學語句常有理解困難（吳秀萍，2004），透過提供學生這些中繼的語句，可以幫助他們逐步學會數學領域社群中所共同接受、使用的語句（Herbel-Eisenmann, 2002）。然而，職前教師的改法若僅能提供給學生算則在外在表徵上呈現

的運算步驟或結果，便不能幫助學生學會文字敘述表徵。這些職前教師改寫這個詞彙時，思維中所做的推理、判斷並非基於培養學生的數學語言知能。

有些職前教師**轉化了他們所使用的「根號」、“square root”等詞彙，以之來表示「數」**（參閱 4.1.42 與附錄三），例如，

> 兩個正的根號相乘，其實就是根號裡面的兩數相乘然後再開根號
> （#TW11710114）
>
> A positive square root times another positive square root is equal to the square root of two positive numbers. (#US10620108)
>
> When positive square roots are multiplied the product is a square root of the factors. (#US10250106)

「根號」本來指的是一個符號，但#TW11710114 以「正的根號」來代表「正數的正平方根」這樣的數，而做「相乘」的運算；#US10620108 與 #US10250106 則以“positive squre root”來代表“the positive square roots of a positive number”這樣的數，而做“times”或“multiply”的運算。

表 4.1.42　以「根號」、“square root”代表「數」的職前教師編號

詞彙	職前教師編號
根號	#TW11710114、#TW11410152
(positive) square root	#US10620108、#US14720102、#US31920105、#US10250106、#US11130128、#US13420109、#US13540129、#US11130125

3.　有些職前教師改寫「與…相同」/“is equal to”

在中文和英文的原語句結構中，表示兩個數學物件相同的詞彙並不是完全相對應的，臺灣的結構是「A 與 B 相同」，美國的結構則是“A is equal to B”，而歸納兩個國家職前教師改寫之敘述後，也發現他們呈現不同的改寫觀點浮現出來。以下先就臺灣的情況進行報導。

在臺灣，部分職前教師將詞彙「相同」改為「等於」，這樣的改寫同時改變了語句的結構（參閱表 4.1.43 與附錄三），即**由「A 與 B 相同」的結構轉為「A 等於 B」的結構**。例如，

> 一正數之正平方根與另一正數之正平方根相乘<u>等於</u>此兩正數相乘之值的正平方根 （#TW11510125）

> 給定兩正數，則此兩正數平方根之乘積<u>等於</u>其相乘之平方根 （#TW11510106）

> 兩個正數開根號相乘<u>等於</u>兩個正數相乘開根號 （#TW90510105）

> 兩個正數開根號以後再相乘，<u>等於</u>兩個正數相乘以後再開根號 （#TW11410162）

由於「等於」這個詞彙，是學生從國小就學習過的，並且這個詞彙在很多的學習經驗中，有得到、得出的意涵，因此這樣的改法，**使得語句減低了結構性，而增加了程序性特徵**，然而，從學生進入國中開始，代數課程的學習歷程，使得「等於」這個詞彙也有了結構性的意涵，故而，此改寫仍保持了某種程度的結構性。此外，此種改法也使得語句中要呈現物件相等的訊息在語句進行至一半時便出現，學生在理解此語句時，不需要在腦中不知語句最後指向、無目標地保持著物件訊息，最後才去串連剛出現的兩個物件間的關係為相等。有一些職前教師**在「等於」的前面加上「會」這個字，使詞彙增添口語化的特徵**（參閱表 4.1.43 與附錄三），例如，

> 一個正數開根號乘以另一個正數開根號，<u>會等於</u>這二個正數相乘後，再開根號 （#TW11410101）

> 一個正數的正平方根乘以另一個正數的正平方根<u>會等於</u>這兩個正數先相乘再取正平方根 （#TW90410111）

表 4.1.43　改寫「相等」為「等於」的臺灣職前教師編號

詞彙	職前教師編號
等於	#TW11510123、#TW11510125、#TW90810103、#TW11510106、#TW90510105、#TW11410162、#TW90910103、#TW11910106、#TW11410130、#TW11510159、#TW11710108、#TW11910113、#TW90410104、#TW11610150、#TW11610144、#TW90410109、#TW11610117、#TW11510165、#TW11410105、#TW11710104、#TW11510141
會等於	#TW11410101、#TW11210114、#TW90410111、#TW11210109、#TW11510127、#TW11410143、#TW90410101、#TW11410122、#TW11510158、#TW90510107、#TW90110108、#TW11610130、#TW11510134、#TW90010109、#TW11910112、#TW11610139、#TW11510107、#TW11410125、#TW11410135

有些職前教師還**加上了日常生活用語「結果」，即「結果會等於」，此類改法，除了句子變得較具程序性也較口語化**，如下，

兩個大於零的數，開根號相乘的結果會等於兩個數相乘再開根號（#TW11810110）

一個開根號的數與另一個開根號的相乘，其結果會等於這兩數先相乘再開根號（#TW11410169）

也有職前教師並沒有使用「等於」這個詞彙，而使用了「是」這個也屬於日常生活的詞彙，他們改寫的句子如下，

兩個正的根號相乘，其實就是根號裡面的兩數相乘然後再開根號（#TW11710114）

根號相乘即是數字乘起來補上根號（#TW11410152）

這兩個語句使用了「A 其實就是 B」與「A 即是 B」的語句結構，使得語句轉而較具程序性，日常用語的使用也使語句較具口語化。另外，也有如下語句，

兩正數的平方根相乘可直接在根號中合併相乘（#TW90810104）

兩的正數的正平方根要相乘時，先將二正數相乘，再解相乘後的正平方根（#TW11510150）

#TW90810104 使用「可直接在」來連接句子的兩邊，**「可直接在」為日常生活的用語，它不盡然要表示兩個物件相等，而比較有取代、替代的意涵，這使得兩個物件相等的結構感降低**，#TW11510150 則是**以解法流程的方式改寫，一樣不是等式的寫法**，這樣的語句，提供學生學的訊息主要是在運算的法則上，而不在幫助學生學習數學領域、社群中使用的數學語句。

另外有些職前教師的改法**並沒有改變語句的結構，仍是「A 與 B 相等」的結構，但他們增加一些如「值」、「答案」、「結果」等詞彙，讓「乘法」與「開根號」的運算有個結果，藉此語句前進速度得到一些減緩，也比「相等」更為口語化**，或他們所改語句如表 4.1.44 所示，

表 4.1.44　改寫「相等」為口語化說法的臺灣職前教師回答

- 兩個正數開根號後相乘，與此兩個正數先相乘後開根號的值會相等（#TW11410172）
- 兩個正數，甲、乙各別開平方根，然後相乘會跟甲乙相乘後再開平方根一樣的值（#TW11610105）
- 有兩個大於零的整數相乘之後的正平方根，與兩個正平方根相乘的答案相等（#TW11510111）
- 兩數的平方根相乘會與兩數分別相乘再開平方根的 Ans 相同（#TW11810104）
- 兩個正整數開平方根後相乘與先將兩個正整數相乘後再開平方根的結果會相同（#TW11810111）
- 兩個正數分別取正平方根之後相乘，和先將兩正數相乘再取正平方根的結果相同（#TW11410116）
- 2 個帶有根號的正數相乘，與 2 正數相乘加根號　其值相同（#TW11510152）
- 兩數值分別開根後相乘，與兩數值相乘後再開根號，其值相等（#TW90010110）
- 將兩正數分別平方根後再相乘，會與兩正數先相乘後再平方根，其結果相同（#TW91010101）

這些職前教師的思維中，認為藉由這樣的改法可幫助學生理解，然而，他們並沒有變更語句為「A 等於 B」的結構，對學生理解的幫助多大值得探討。

提供給美國職前教師的語句中，“is equal to”在語句中間的位置，語句結構已是“A is equal to B”，多數職前教師將**改寫的焦點置於使“is equal to”變得較為口語化，他們將之改為“is”、“ is the same as”、“ can be rewritten as”、“ can be found by”**等（參閱表 4.1.45 與附錄三），例如，

If you have two positive numbers a and b, then the square root of a times the square root of b <u>is</u> the square root of a times b. (#US10730125)

Multiplying the square roots of two positive numbers <u>is the same as</u> the square root of the two numbers multiplied together. (#US10920109)

The square root of 'a' times the square root of 'b' <u>is the same as saying</u> the square root of 'a'x'b', only if 'a' and 'b' is greater (larger) than zero. (#US11520102)

… when a and b are both great than 0, then following is true: the square root of a multiplied by the square root of b <u>can be rewritten as</u> the square root of a multiplied by b. (#US11120111)

The square root of one number multiplied by the square root of another number <u>can be found by</u> multiplying the two numbers together and taking the square root of this product. (#US11120126)

表 4.1.45　改寫“is equal to”為“is”、“ is the same as”的美國職前教師編號

詞彙	職前教師編號
is	#US10730125、#US10250106、#US13420101
is the same as	#US10920109、#US12120101、#US12710128、#US12820110、#US13540129、#US14520109、#US13220115

有些美國職前教師的改法除了**使得詞彙變得更為口語化外，還中斷了句子，為前半段的運算提供一個運算結果的代稱，如“it”、“that”、“this”、“the answer”等，使得語句的前進速度減緩**，如表 4.1.46 所示，

有些職前教師選擇了**中斷語句，並加入如“it”、“ the product”、“ the result”、“the answer”等詞彙來為前半段的運算提供一個運算結果的代稱，**

他們的改寫使語句前進速度減緩，然而，他們並沒有將"is equal to"變得較為口語化，進行這樣改法的職前教師如表 4.1.47 所示。

表 4.1.46　改寫「相等」為口語化說法的美國職前教師回答

- If you first take the square root of two positive numbers and then multiply the positive solutions together, it is the same as taking those same two positive numbers and first multiplying them together and then taking their positive square root. (#US10730109)
- If I take two numbers, take the square root of both of them, and multiply them together, it is the same as multiplying two numbers togeth[together] first and then taking the square root of the new number of product. (#US35620102)
- First, we cannot have a negative under the square root, otherwise we'll end up with a non-real number. So if we multiply the square root of a number by the square root of another number, it is the same as saying the square root of the multiplication of both numbers. (#US11130110)
- If you multiply the positive square roots of 2 positive numbers it will equal the same as the positive square root of the product of the two positive numbers. (#US32360126)
- If we multiply two numbers and take their square root, that would be the same as taking the square root of two numbers and multiplying those two values together. (#US11620101)
- If the square roots of two numbers are multiplies together then this would be the same as the square root of the product of the two numbers. (#US11130114)
- you start with two square roots that have positive answers.;When you multiply these two individual square roots the answer is one square root with the two numbers multiplied together underneath it.　;The answer of this square root must also be positive（#US13420109）

表 4.1.47　僅使語句前進速度減緩而沒有改寫"is equal to"為口語化詞彙的美國職前教師編號

詞彙	職前教師編號
, it is equal to	#US10730121
, it will equal to	#US11120133
, the product is equal to	#US11720117
, the result is equal to	#US13030103
the answer is equal to	#US32320109
the answer equals	#US11410127

有些美國職前教師的改法，使得**語句不只是描述一個數學算則，而融入了「人」做運算的意涵**，如表 4.1.48 所示，他們加入"you"或"we"來改寫"is equal to"，**改成人得到運算結果的敘述**，例如"you get the same"或"we get"。

表 4.1.48　改寫「相等」為口語化說法的美國職前教師回答

- When you multiply two positive square roots, you get the same answer if you multiply the two positive numbers, then take the positive square root. (#US14720102)
- If you took the square roots of two positive numbers and multiplied them together you would get the same product as multiplying the numbers together and then getting the square root. (#US15810103)
- The square root of every positive number is positive.　Therefore, when multplying the square root of one positive number by the square root of another positive number you will find the answer to be the same as multiplying the two positive numbers first and then finding the square root of the product. (#US10220109)
- If we multiply the square roots of two positive numbers we will get the square root of the two positive numbers multiplied by eachother. (#US10920101)
- When we multiply the square root of a positive number by the square root of another positive number, we get the square root of the product of the two numbers. (#US13220110)
- When you multiply the square roots of two positive numbers together you get the square root of those two positive numbers multiplied together. (#US11520106)

與#TW90810104、#TW11510150 相同，美國有些一些職前教師的改法使語句中**兩個物件相等的結構感降低，變得較像是解法流程的描述**，如下，

To find the product of the square roots of two positive numbers, you can multiply the two positive numbers and take the square root of their product. (#US10730113)

In order to multiply two different square roots (of positive numbers), you can multiply them under one square root symbol. (#US11130128)

4.　有些職前教師改寫「兩個」/"two"

在原語句中，「兩個正數的正平方根」/“the positive square roots of two positive numbers”、「兩個正數」/“the two positive numbers”都是同時給出兩個數學物件，在分析職前教師的敘述之後，可發現部分職前教師對此有所覺察並進行改寫，這些改寫可歸納成兩個類別。

有些職前教師會將原語句中的「兩個」/“two”拆開，轉成「一…另一…」、“one…another”、“first…second”（參閱表 4.1.49 與附錄三），例如，

> 一正數的正平方根與另一正數的正平方根的乘積，與兩正數的乘積的正平方根相同。（#TW11410146）
>
> The square root of one number multiplied by the square root of another number can be found by multiplying the two numbers together and taking the square root of this product. (#US11120126)
>
> The square root of the first positive number multiplied by the square root of the second positive number equals the square root of the product of the first number multiplied by the second number (#US10920105)

職前教師的改寫，**將原語句中同時出現的兩個物件拆開，使得訊息逐步出現，減緩了語句的進展速度**。

另有一類職前教師**亦改寫「兩個」/“two”，他們直接使用兩個數學物件，如 *a*、*b*，來取代「兩個正數」，將運算作用於 *a*、*b* 之上**（參閱表 4.1.49 與附錄三），例如，

> 兩個正數，甲、乙各[個]別開平方根，然後相乘 會跟甲乙相乘後再開平方根 一樣的值（#TW11610105）
>
> if given two positive numbers a and b, then the positive root of a multiplied by the positive root of b is equal to the positive root of a multiplied by b. (#US13420117)

此類改法中，職前教師為原語句中的兩個正數給出相應的數學物件，浮現出職前教師的思維中，**認為若語句提供了學生「具體」的物件以供學生操作、運思，將是學生比較容易理解的語句**。

表 4.1.49　改寫「兩個」/“two”的職前教師編號

詞彙	職前教師編號
一…另一…	#TW11410101、#TW90410111、#TW11510168、#TW11210114、#TW11510125、#TW11410169、#TW11510158、#TW11510141、#TW11410146
one (a)…another…	#US10620108、#US13420105、#US31920105、#US10220109、#US11120126、#US11130110、#US11720117、#US13220110
the first (a)…the (a) second…	#US10920105、#US13420113
a、*b*；甲、乙；M、N	#TW11210114、#TW90410101、#TW11610105 #US10130117、#US10330105、#US10730121、#US10730125、#US11130121、#US11520102、#US11520109、#US12120105、#US13220101、#US15220102、#US15810135、#US32350102、#US32920112、#US10130109、#US10250102、#US10520101、#US11120111、#US12730101、#US13030103、#US13420117、#US15810160、#US13220115、#US13220119

相較於美國，臺灣有較少職前教師思維連結到去改寫「兩個」/“two”。

5. 有些職前教師並沒有將「兩個」/“two”改寫為「一…另一…」、“one…another”或以 *a*、*b* 代表兩個正數，但他們在語句中加入「分別」、“each”等詞彙來幫助學生將「兩個」物件在腦中拆成「一個、一個」，降低同時出現所帶來的負擔

另外有些職前教師雖然沒有把句中將兩個同時出現的兩個數學物件拆開，即兩個「正數的正平方根」/“the positive square roots of two positive numbers”或兩個「正數」/“the two positive numbers”仍一起出現，但他們在他們改寫的句子中，增加了一些如「分別」、「個別」、「各有」、“each”、“individual”、“seperate”、“both”等詞彙（參閱表 4.1.50 與附錄三），他們的

思維中，推理、判斷兩個同時出現的數學物件會造成學生的理解困難，因而想要以這些詞彙來幫助學生在面對語句時，能在將「兩個」物件拆開想成「一個、一個」，降低同時出現所帶來的負擔。

表 4.1.50　加入詞彙幫助學生在腦中將「兩個」物件拆開的職前教師回答

➢ 兩個正整數分別開根號後相乘，等於相乘後再開根號（#TW90810103） ➢ 各[個]別數字開根號相乘等於兩數先相乘再開根號（#TW11610150） ➢ 現在有 2 個正數，各有 1 各小正平方根，而且 2 個正數乘積會有 1 個大正平方根，那麼，前面 2 個小正平方根相乘會等於後面那 1 個大正平方根（#TW11410143） ➢ When two numbers are both greater than zero, the product of the square roots of each number (finding square roots then multiplying) is the same as the square root of the product of the two numbers (multiplying the number, then finding the square root). (#US12710128) ➢ If I take two numbers, take the square root of both of them, and multiply them together, it is the same as multiplying two numbers togeth first and then taking the square root of the new number of product. (#US35620102) ➢ As long as neither of the numbers is not a negative number or 0, the product of two separate square roots is the same as if the two numbers were multiplied and then the square root was taken. (#US13540129) ➢ you start with two square roots that have positive answers.;When you multiply these two individual square roots the answer is one square root with the two numbers multiplied together underneath it. ;The answer of this square root must also be positive (#US13420109)	
分別	#TW11310103、#TW91010101、#TW11410116、#TW90010110
each	#US14820102、#US12710128、#US10230102

6. 有些職前教師在語句的開頭，先描述有兩個正數的存在，以減緩語句的進展速度

有些職前教師在語句的開頭，先描述有兩個正數，之後再描述這兩個正數做開根號的運算，此時，這兩個正數屬於不帶新訊息的詞彙，為對語句進展的推進速度較慢主題訊息語詞（thematic; Laborde, 1990），他們的改法如表 4.1.51 所示（亦參閱附錄三），

表 4.1.51　在語句的開頭先描述有兩個正數之存在的職前教師回答

➢ 給定兩正數，則此兩正數平方根之乘積等於其相乘之平方根（#TW11510106）
➢ 有二個正數，其正平方根的乘積會等於其乘積的正平方根（#TW11410125）
➢ 若 a, b 為大於零的數，其平方根相乘，會等於 a, b 兩數相乘的平方根（#TW90410101）
➢ If I take two numbers, take the square root of both of them, and multiply them together, it is the same as multiplying two numbers togeth first and then taking the square root of the new number of product. (#US35620102)
➢ If you have square roots of two positive numbers, the product of the square roots will be equal to the square root of the products of the two original numbers. (#US12210101)
➢ If you have two positive numbers a and b, then the square root of a times the square root of b is the square root of a times b. (#US10730125)
#TW11410143、#TW11310103、#TW11810110、#TW11210114 #US13420117、#US13540102、#US13540129、#US15810135、#US32350102、#US10130117、#US10230102、#US10330105、#US10730121、#US11120111、#US11130121、#US11520109、#US12120105、#US12710128、#US12730101、#US13220101、#US13220115、#US13220119

7. 有些職前教師先描述平方根算則，再以補充的方式來說明算則中的數為正數（僅適用於正數），此類改法將語句中的訊息分散提供，降低語句中新訊息的密度，減緩語句的進展速度，如下，

The square root of a times the square root of b is equal to the square root of a times b, where a and b must be greater than zero.

(#US15220102)

The square root of 'a' times the square root of 'b' is the same as saying the square root of 'a'x'b', only if 'a' and 'b' is greater (larger) than zero.

(#US11520102)

A square root times a square root equals the same two numbers multiplied inside a square root, provided we only consider the postive[positive] square root and both numbers are positive.

(#US31920105)

8. 有些職前教師將有複雜的名詞化特徵之語句轉為一連串運算動作的複合，來降低語句的難度

在原中文語句中，「正數」、「正平方根」、「乘積」複合成「兩個正數的正平方根乘積」與「兩個正數乘積的正平方根」，是一連串的名詞堆疊，是含有多層形容關係的語法結構，具有數學語言中複雜的名詞化（complex nominalization; Laborde, 1990）這項特徵。

表 4.1.52　將語句改為一連串運算動作複合的職前教師之回答

- 一個開根號的數與另一個開根號的相乘，其結果會等於這兩數先相乘再開根號（#TW11410169）
- 兩個正數，甲、乙各別開平方根，**然後**相乘會跟甲乙相乘**後再**開平方根一樣的值（#TW11610105）
- 兩個正數先開根號**後再**相乘會等於兩個正數先相乘**再**開根號（#TW90010109）
- 兩個正數分別取正平方根**之後**相乘，和先將兩正數相乘**再**取正平方根的結果相同（#TW11410116）
- 兩數的平方根相乘等於兩數先相乘**再**取正平方根（#TW90410109）
- If you took the square roots of two positive numbers and multiplied them together you would get the same product as multiplying the numbers together and then getting the square root. (#US15810103)
- If you **first** take the square root of two positive numbers and **then** multiply the positive solutions together, it is the same as taking those same two positive numbers and **first** multiplying them together and **then** taking their positive square root. (#US10730109)
- Pick two numbers greater than zero and square root them each.　Multiply them together and you will get a number.　That number will be equal to the product of the two numbers. (#US10230102)
- When you multiply two positive square roots, you get the same answer if you multiply the two positive numbers, **then** take the positive square root. (#US14720102)

開根號、相乘（及類似改法）	#TW11410169、#TW90010109、#TW11910112、#TW90410110、#TW11510165、#TW11810110、#TW11610150、#TW11910113、#TW11410130、#TW90510107、#TW11710114、#TW11510159、#TW11410162、#TW11910106、#TW90510105、#TW90810103、#TW11410172、#TW11510168、#TW11410101
取正平方根（及類似改法）、相乘（及類似改法）	#TW11610105、#TW11410116、#TW90410109、#TW11610125、#TW11410129、#TW11410154、#TW91010101、#TW11310108、#TW11810111、#TW90910103、#TW11410123、#TW11310103、#TW11510127、#TW11810104、#TW90410111
take the square root（及類似改法）、multiply（及類似改法）	#US10220109、#US10250102、#US11120126、#US11620101、#US12710128、#US12820110、#US13030103、#US13420113、#US13540129、#US14520109、#US15520103、#US32320109、#US35620102

原英文語句的情況亦相當類似，有些職前教師將「乘積」/“product”、「正平方根」/“the positive square root”等名詞（名詞短語）同時都轉變為動詞（參閱表 4.1.52 與附錄三），他們的思維中，連結到可透過**將有複雜的名詞化特徵之語句轉為一連串運算動作的複合，來降低語句的難度，以讓學生理解**。

9. 有些職前教師使用了「先」、「之後」、「再」、“first”、“then” 等強調動作順序的詞，以增加語句的程序性

在 7 中描述的職前教師中，許多在改寫的語句裡使用了「先」、「然後」、「再」、「接著」、「後」、「之後」、「以後」、“first”、“then”等詞彙等強調動作順序的詞彙（參閱表 4.1.52），以增加語句的程序性。有些臺灣職前教師雖然沒有同時改寫「乘積」/“product”與「正平方根」/“the positive square root”，但他們也使用了這些詞彙，同樣有增加語句程序性的效果，如表 4.1.53 所示，

表 4.1.53　使用動作順序的詞彙而沒有同時改寫成兩個運算動作複合的職前教師之回答

- 兩個正數分別的正平方根相乘的乘積，與兩個正數先乘積後再的正平方根相同（#TW11410110）
- 兩個正數的正平方根相乘等於兩個正數相乘後的正平方根（#TW11610144）
- 兩個正數的正平方根相乘之後的乘積等於這兩個正數相乘後之乘積的正平方根（#TW11410105）
- 兩個正數的正平方根乘積會等於兩個正數乘積後再加上根號（#TW11610139）
- 有兩個大於零的整數相乘之後的正平方根，與兩個正平方根相乘的答案相等（#TW11510111）

10. 臺灣職前教師所使用的語句，會傾向於客觀的、外在物件的陳述，而美國職前教師則常會將執行運算的主體置入描述中

美國職前教師常在語句中加入"you"、"we"或"I"等詞彙來進行運算的動作（參閱表 4.1.54），例如，

If you have two positive numbers, a and b, and you take the square root of each and then multiply them together, it is equal to the square root of a times b. (#US10730121)

When we multiply the square root of a positive number by the square root of another positive number, we get the square root of the product of the two numbers. (#US13220110)

在臺灣，職前教師傾向於客觀的、外在物件的陳述，僅有#TW11410154 的語句中，使用了「你」，

將兩個正數開平方，取正的平方根，將這兩個數的平方根相乘起來，另外直接把剛才那兩個正數相乘，再開平方，取正平方根，你會發現兩個方法算出來的都一模一樣 #TW11410154）

表 4.1.54　將執行運算的主體置入描述中的美國職前教師編號

詞彙	職前教師編號
you	#US10220109、#US10230102、#US10250102、#US10730109、#US10730113、#US10730121、#US10730125、#US11120113、#US11130125、#US11410127、#US11520106、#US13030103、#US13420109、#US14720101、#US32320109、#US32360126
we	#US10920101、#US11130110、#US13220110、#US11620101、#US31920105
I	#US35620102

11. 有些職前教師所改寫的語句會省略一些詞彙，他們可能沒有覺察他們的改寫使得指涉的對象不清，可能造成學生理解困難

有些職前教師改寫語句時，會省略一些詞彙，如下，

兩正數的平方根相乘等於相乘的平方根 （#TW11510123）

兩正數平方根相乘，為內部相乘再開根號 （#TW11510140）

兩正數先開根號再相乘等於<u>先相乘再開根號</u>（#TW11410130）

開根號的兩個數相乘等於<u>相乘後再開根號</u>（#TW11510159）

When you multiply two square roots the answer equals the square root of the product. (#US11410127)

這些職前教師的改寫中，句子的後半段省略「兩個正數」，雖然語句變得簡潔，但學生可能會不知道是哪些數學物件要相乘。另外，又如，

在兩個平方根相乘等於<u>數字</u>相乘再開平方（#TW90910103）

Two positive square roots multiplied together , equal the square root of <u>their</u> product. (#US11720130)

這兩位職前教師雖然寫出指涉「兩個正數」的詞彙，但他們的寫法仍不能讓學生明確知道進行乘法運算者為何。而#TW11410159 的寫法，在句子的後半僅寫出「合併運算」，使得進行運算的物件與進行何種運算都不明確，若學生沒有自己連結到平方根乘法算則的內容為何，其實並不能理解此語句，

兩正數開根號相乘，<u>可直接合併運算</u>（#TW11410159）

另外有職前教師的改寫，並沒有明確指出有兩個數學物件在進行運算，如下，

根號相乘即是數字乘起來補上根號（#TW11410152）

平方根的乘積會等於根號內的數字相乘後開根號（#TW11910112）

先開根號再相乘等於先相乘再開根號（#TW11910113）

由這些改寫的語句可看出，職前教師假設學生面對此語句時，知道有兩個數進行運算，事實上，這樣的語句很可能必須搭配其他呈現方式，例如平

方根算則符號表徵的版書，才能使學生了解語句所欲表達的語義。而#TW90710105 的改寫，

平方根符號可以掛到相乘的每個正數上 （#TW90710105）

失去了原語句中的數學內涵，這樣的語句僅要學生記住運算的口訣，對培養學生的數學語言知能並沒有幫助。

雖然兩個國家職前教師的改寫屬於此類的並不多（僅上述例子），但臺灣的人數仍較美國多，這或許與臺灣職前教師重視讓學生能使用算則、進行運算有關，他們比較容易聚焦到如何提供學生一個較為簡潔、容易記住的運算口訣。

12. 有些職前教師改寫數學語句時，對其中的數學精準度與嚴謹度會較放鬆

有些職前教師會以「平方根」/“the square root”取代「正平方根」/“the positive square root”，或以「數」/“number”取代「正數」/“positive number”，他們對數學的精準度與嚴謹度放鬆，忽略所改寫的語句其實數學上是錯誤的，例如，

<u>兩數</u>的<u>平方根</u>相乘會與<u>兩數</u>分別相乘再開平方根的 Ans 相同 （#TW11810104）

如果 a,b 為正數，a 的<u>平方根</u>乘以 b 的<u>平方根</u>等於 a×b 的<u>平方根</u> （#TW11210114）

2 個正數<u>平方根</u>相乘等於 2 數相乘的正平方根 （#TW90410104）

If <u>the square roots</u> of <u>two numbers</u> are multiplies together then this would be the same as <u>the square root</u> of the product of <u>the two numbers</u>. (#US11130114)

A positive square root times another positive square root is equal to the square root of two positive numbers. (#US10620108)

If a and b are positive numbers than the square root of a times the square root of b is equal to the square root of the quantity a times b. (#US32350102)

表 4.1.55 呈現職前教師是否維持數學的精準度與嚴謹度的情況，即他們是否較放鬆地使用「平方根」/"square root"之詞彙或堅持使用「正平方根」/"positive square root"，以及他們是否較放鬆地使用「數」/"number"之詞彙或說明了必須為「正數」/"positive number"。

表 4.1.55　職前教師維持數學的精準度與嚴謹度的情況

使用「正平方根」與「正數」	使用「平方根」或「數」
#TW90410111、#TW11510127、#TW11410129、#TW11410143、#TW11410125、#TW11610117、#TW11510150、#TW11510134、#TW11610130、#TW90110108、#TW11510125、#TW11210109、#TW11410135、#TW11410146、#TW11410105、#TW11610144、#TW11610139、#TW11510111、#TW11410110、#TW11710104、#TW11510123	#TW90410101、#TW11210114、#TW11310103、#TW11510106、#TW90410109、#TW11910112、#TW90910103、#TW11510140、#TW11910106、#TW11810104、#TW90410104
#US14620105、#US31920105、#US10130109、#US12530103、#US12820110	#US14520109、#US14820102、#US15220102、#US15220103、#US15810135、#US32320109、#US32350102、#US32920112、#US10130117、#US10220109、#US10250102、#US10250106、#US10330105、#US10520101、#US10620108、#US10730113、#US11730121、#US11730125、#US10920101、#US10920105、#US10920109、#US11120111、#US11120126、#US11120133、#US11130110、#US11130114、#US11130121、#US11410127、#US11520102、#US11520106、#US11520109、#US11720117、#US11720130、#US12120101、#US12120105、#US12710128、#US12730101、#US13030103、#US13220101、#US13220110、#US13220115、#US13220119、#US13420101、#US13420105

由表 4.1.55 可看出**臺灣與美國職前教師對數學語句之數學精準度與嚴謹度的重視程度有很大差異，臺灣職前教師較美國重視**。

13. 有些職前教師沒有覺察自己所改寫的數學語句沒有構成完整的語義或數學有誤

有些職前教師改寫的語句並沒有構成完整的語義，例如，

> 兩個正數的平方根乘積等於兩正數開平方根 （#TW11710104）
>
> 一正數的正平方根與另一正數的正平方根相乘，會等於該兩正數的正平方根 （#TW11510158）
>
> A positive square root times another positive square root is equal to the square root of two positive numbers. (#US10620108)
>
> The product of two positive square roots is equal to the square root of those two numbers. (#US12820105)

都在語句的後半段缺少了「相乘」，而

> 兩個正數的正方根會等於兩數相乘的正平方根 （#TW11210109）

則是語句前半段缺少了「相乘」，又如，

> Pick two numbers greater than zero and square root them each. Multiply them together and you will get a number. That number will be equal to the product of the two numbers. (#US10230102)

少了「平方根」，而

> 兩個正數先取正平方根後再相乘，會和兩正數先相乘再開正平方根 （#TW11610125）

則少了「相等」，這些語句都少了部分詞彙而使得整個語句沒有構成完整的語義。

14. 有些臺灣職前教師將語句改寫為譬喻，他們的思維連結到教學生數學算則，所改寫的語句並不能幫助學生理解平方根算則的文字敘述表徵，例如，

有些臺灣職前教師的改法使用了譬喻，他們改寫的語句內容超越了原語句中的物件，如下，

a 有帶帽子，b 有帶帽子　當 a 和 b 兩個想要連在一起，就只能擁有一個帽子　　（#TW11510114）

乘號表示「同時」　二個人分別乘不同的交通工具同時要去台北，和二人同時乘同一輛車一起去台北，其目的都是一樣的（#TW11610134）

有一對情侶本來分開住的，有一天他們結婚，也因些[此]住在一起了。<根號比喻成房子>　　（#TW90910102）

他們的改法顯示出，他們僅聚焦於教學生算則，而不在於以數學語言為教學主體，教學生算則的文字敘述表徵。

15. 有些職前教師將語句改寫切成多個部分，使得語句進展速度變得頗為緩慢，根據 Laborde（1990），進展速度過慢的語句，也會造成學生的理解困難

有些職前教師改寫的句子切分成多個部分，且在他們一再重複訊息，使句中有許多的主題訊息語詞（thematic; Laborde, 1990）情況下，他們的改寫的句子長度比原語句增加許多，如表 4.1.56 所示。根據 Laborde(1990）若語句的進展速度太慢，即不夠多提供新訊息的詞彙且太過著重已知的訊息，反而會造成閱讀者的閱讀負擔（reading burden），這些職前教師所改寫的句子對學生閱讀而言是否進展速度過慢，若是口語敘述又是如何，值得進一步研究。

表 4.1.56　將語句進展速度減緩的職前教師之回答

- 現在有 2 個正數，各有 1 各小正平方根，而且 2 個正數乘積會有 1 個大正平方根，那麼，前面 2 個小正平方根相乘會等於後面那 1 個大正平方根（#TW11410143）
- 現在有兩個正數，先將兩個正數分別取平方根之後，再將兩正數的平方根相乘；接著，先將兩正數相乘後，再取平方根，比較前後兩者，便可發現兩者是相等的！（#TW11310103）
- 將兩個正數開平方，取正的平方根，將這兩個數的平方根相乘起來，另外直接把剛才那兩個正數相乘，再開平方，取正平方根，你會發現兩個方法算出來的都一模一樣（#TW11410154）
- Pick two numbers greater than zero and square root them each. Multiply them together and you will get a number. That number will be equal to the product of the two numbers. (#US10230102)
- When you multiply the value of two square roots a and b , the resulting product , c, is equal to multiplying a x b , then taking the square root of the product c. (#US10250102)
- For a product of square roots with numbers, a and b, that are greater than zero, the following algorithm for square-root multiplication applies: The answer, called a product, to the multiplication of two square roots, sqrt a and sqrt b, is the square root of the multiplication of the two numbers a and b, thus sqrt ab. (#US13420101)
- Compute the positive square roots of two positive numbers. Find their product (answer 1). Then, compute the product of the two original numbers and find its positive square root (answer 2). These two products will be equal (answer 1 = answer 2). (#US12530103)

16. 有些職前教師對於詞彙的改寫情況並不穩定，反映出他們在語句的刺激下，順著思維的連結對語句改寫，而他們在當下連結到哪個概念並不穩定

許多職前教師改寫「乘積」/“product”或「正平方根」/“the positive square root”等名詞（名詞短語），例如，將之轉變為動詞，職前教師的思維中，可能認為改成程序性、操作性的語句，將能使學生較容易理解。本研究提供給職前教師的語句中，「乘積」/“product”與「正平方根」/“the positive square root”皆出現兩個，然而，有的職前教師卻僅對其中一個進行修改（參閱表 4.1.57），例如，

兩個正數的<u>正平方根</u>乘積會等於兩個正數乘積後再<u>加上根號</u>

（#TW11610139）

兩正數的正平方根相乘等於這兩個正數乘積的正平方根（#TW11610117）

平方根的乘積會等於根號內的數字相乘後開根號　　（#TW11910112）

Multiplying the positive square root of two positive numbers a and b is equal to the multiplication of the two positive numbers and then taking the square root. (#US10130109)

The square root of a positive number "a" multiplied by the square root of a second positive number "b" is equal to the square root of the product of the two numbers. (#US 10520101)

若職前教師認為該詞彙造成學生的困難，在同一語句中，兩個都應改寫，故而，本研究推測這些職前教師可能是順著語句刺激所造成的思維連結改寫，而其思維的連結並不是穩定的。

表 4.1.57　職前教師詞彙改寫之不穩定情形

僅改寫一個「乘積」	僅改寫一個「正平方根」
#TW11610117、#TW11410110、#TW11510106、#TW11410143、#TW11910112、#TW11510127	#TW11710108、#TW11910106、#TW11710104、#TW90810104、#TW90410111、#TW11410129、#TW90410109、#TW11610139、#TW11510140、#TW11810104、#TW90910103、#TW11910112、#TW11510127
#US10130117、#US10230102、#US10520101、#US10730113、#US11130114、#US11410127、#US11720117、#US11720130、#US12120101、#US13220101、#US13220110	#US10130109、#US10220109、#US10250102、#US10250106、#US10730113、#US10730121、#US11120126、#US12820110、#US13030103

17. 整體而言，職前教師將語句改得具有以下特徵：

(1) 較具程序性，而較不具結構性：例如，以運算動作取代大量的名詞化，或者提供可操作的「具體」物件

(2) 較口語化，數學專門用語的使用量較少

(3) 新訊息一步一步出現，減緩語句的進展速度

這是職前教師思維中，學生較易理解之文字敘述數學語句所具有的特徵。比較前述兩項思維的分析，我們知道職前教師思維中能連結到的對於文字敘述的之特徵，是比較偏向描述性的、不可操作的，例如，抽象、冗長等，他們不容易連結到這三點特徵，然而，他們在實際執行時，為使學生理解，思維中能做這樣的連結，讓使用的語句呈現這些特徵。

Schön（1983）提出所謂實踐的知識（practical knowledge），也就是行動中的理解（knowing in action），是一種可以自動化地知道如何去執行的行動（action）、認識（recognition）、判斷（judgment），它不需要在執行前或執行中思考該怎麼執行，這種知識內化在感覺中，在行動中被使用（internalized in the action for the stuff of action），屬於一種無法描述的（verbalize）、無聲的（tacit）知識。職前教師關於數學語句之特徵的概念、思維，便屬於此類知識。

第二節　職前教師之數學語言相關教學能力

本節將報導臺灣、美國職前教師在數學語言相關教學能力的表現，以及兩個國家表現的異同。本研究為聚焦於與課堂實際情境相關度較高的部分，設計兩個教學情境，本節第一部分將先報導以函數表徵為數學題材的教學情境中，所探測的三個數學教學能力，包含兩個和運算「執行」有關的能力，即「能選擇應教給學生的數學語言」和「能選擇應教給特定數學程度學生的數學語言」，以及一個與運算「推理與判斷」有關之能力，即「能判斷影響學生理解數學語言的因素」。第二部分將報導以平方根算則為數學題材的教學情境中，所探測的三個數學教學能力，亦包含兩個和運算「執行」有關的能力，即「能使用學生可以理解的數學語言」和「能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動」，以及一個與運算「推理與判斷」有關之能力，即「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」。

一、函數表徵之教學情境

（一）屬運算「執行」之數學教學能力：

能選擇應教給學生的數學語言

1. 題目敘述

中文版本

一般來說，「函數」這個概念有許多表徵的方式，下表中列出幾種表徵方式。

(a) 請問，如果教學時間允許，在**課堂上**你會把哪些表徵方式介紹給學生？

請勾選所有你會介紹給學生的方式

表徵方式名稱	實際描述或舉例	會介紹
B. 文字	對於給定的一個x值，必有唯一的一個y值和它對應，則稱y是x的函數	□1
C. 式子	$y = f(x) = 5x - 7$ 這種輸入一個x值就會得到一個y值的式子是一種函數	□1

英文版本

There are many ways of representing the concept of "function". The table below lists several of them.

(a) Given sufficient time, which of these representations would you use ***in class*** to introduce this concept to students?

Please check all the ways you would use.

Name of representation	***Actual description or examples***	***I would use***
B. Words	If for a given value x, there is one and only one value y corresponding to it, then we say y is a function of x.	□1
C. Expression	$y = f(x) = 5x - 7$. Here if you input an x, you will get a y. This kind of expression is a function.	□1

本題為函數表徵之教學情境題組 MFE706 中的(a)小題，要求職前教師選出在時間允許下，會教給學生的所有表徵，本研究針對其中 B、C 選項，即文字表徵、式子表徵這兩種數學語言進行探討，以瞭解職前教師對於「能選擇應教給學生的數學語言」的數學教學能力具備情形，這項教學能力屬於運算「執行」。

在數學教學中，教師需要傳遞數學概念給學生，也需要教學生如何進行表徵轉換，此時數學語言往往為其用以傳遞的工具；而有些時候，數學語言本身為教師所要傳遞的主體，此時，數學語言同時為教師傳遞的主體，也為教師用以傳遞的工具。就函數的文字表徵「對於給定的一個x值，必有唯一的一個y值和它對應，則稱y是x的函數」來說，它是教師要教的數學語言，同時具有被傳遞之主體，及用以傳遞之工具兩種角色。它也具有文字敘述之數學語句常有的特徵，例如：語法結構頗為複雜，所含數學物件甚多且物件間的關係複雜，語句進展速度快等。而函數的式子表徵中，式子「$y = f(x) = 5x - 7$」是教師所要教的數學語言，同時具有主體與工具的身份；對於這樣的數學語言，教師往往會以類似「輸入一個x值就會得到一個y值」的句子來說明其內涵，提供這個結構性的式子程序性、可操作性的特質。

2. 臺灣、美國的表現

由表 4.2.1 所示，共有 89%的臺灣職前教師選擇教學生函數的式子表徵這個數學語言，顯著高於美國的 66%；但關於函數的文字表徵，臺灣、美國各有 71%、65%的職前教師選擇教給學生，兩個國家間並無顯著差異。

在臺灣，71%的職前教師選擇教給學生文字敘述之數學語句，比選擇教給學生式子表徵者，低了 18%，達顯著差異。但在美國，二者並無顯著差異。

表 4.2.1　選擇教給學生之數學語言百分比

	式子	文字	表徵差異
臺灣	89% (3.3%)	71% (5.4%)	18%**
美國	66% (4.3%)	65% (7.3%)	1%
國家差異	23%**	6%	

註：括號中的數值為標準誤。
*p < .5。**p < .1。

文字敘述及式子這兩種數學語言皆為臺灣、美國中學教材中呈現的函數表徵，而其中式子表徵，在課綱中，是學生在 7-9 年級階段即應學習的知能（e.g., 教育部，2008；National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010）。比較受孔子思想之東亞國家與西方國家的文獻中，常提及這些東亞國家教授的數學內容往往較西方更困難、要求更高（more demanding），而東亞的教師也往往較西方的教師更固守課本及綱要中所設定要教的數學內容（Perry, Wong, & Howard, 2006; Silver, 1998; Siu, 2009）。以此觀點來看，兩個國家職前教師選擇教文字表徵給學生之比例無顯著差異的現象，值得探討，本研究進一步分析職前教師選擇教哪些數學語言的組型。

如圖 4.2.1 所示，兩個國家職前教師選擇教給學生文字表徵之比例雖差異不大，但其組成成分卻不相同。在臺灣，選擇教給學生文字表徵的職前教師多數為同時選擇教給學生式子表徵者，僅有 4%的職前教師選擇僅教給學生文字表徵。美國的情況則不同，選擇僅教文字表徵者佔 18%。就兩種數學語言的特徵來說，面對一般學生，此類職前教師選擇教文字表徵，卻不教較具程序性、可操作性的式子表徵，他們在「能選擇應教給學生的數學語言」之能力上，是不足的。

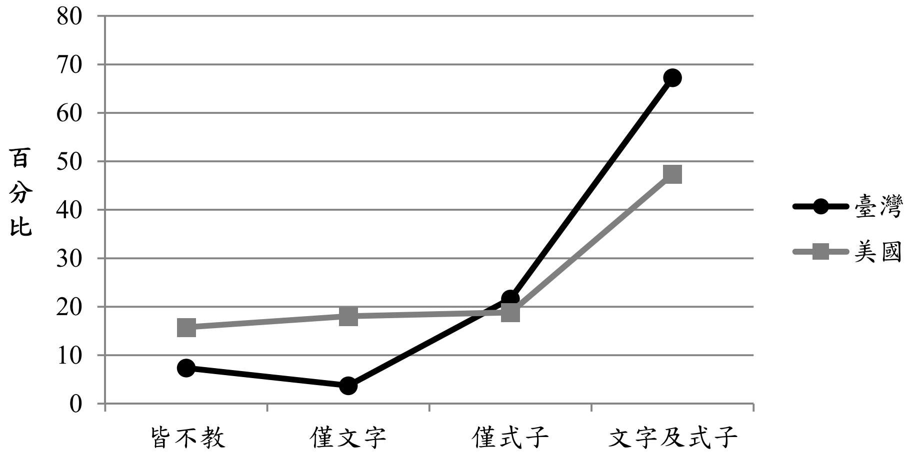


圖 4.2.1　選擇教給學生之數學語言的組型

基於文字、式子這兩種數學語言皆為臺灣、美國中學教材中呈現的函數表徵，以及兩種數學語言的特徵、難度，本研究認為在函數表徵情境中，二者數學語言皆不教給學生，完全不培養學生在此類數學語言的能力，是不恰當的，也認為僅教結構複雜的文字表徵而不教程序性較強、與後續學習關連性強的式子表徵是不恰當的，故而，此二類選擇，本研究將其得分訂為 0 分；而僅教式子、二者都教則訂為 1 分。兩個國家的平均得分如表 4.2.2 所示。

表 4.2.2　「能選擇應教給學生的數學語言」之答對率

	臺灣	美國	分數差異
答對率	89% (3.3%)	66% (4.3%)	23%**

註：括號中的數值為標準誤。
$^{*}p < .5$。$^{**}p < .1$。

臺灣的平均答對率顯著高於美國，顯示臺灣職前教師在「能選擇應教給學生的數學語言」的數學教學能力上，較美國具備。相較於臺灣，美國

有較高比例的職前教師選擇兩種數學語言都不教給學生，或是選擇僅教結構複雜的文字表徵而不教程序性較強的式子表徵，而臺灣則有相當高比例的職前教師選擇兩種數學語言都應教給學生。

（二）屬運算「執行」之數學教學能力：能選擇應教給特定數學程度學生的數學語言

1. 題目敘述

中文版本

(c) 如果要介紹給數學程度較差的學生，請選出最適合的三種表徵方式。

請勾選三個空格

A. 函數機器	□1
B. 文字	□1
C. 式子	□1
D. 表格	□1
E. 數對	□1
F. 集合對應	□1
G. 第(b)小題中你所寫的	□1

英文版本

(c) If you wanted to introduce some ways of representing the concept of function to students with less advanced mathematics, please indicate the three most suitable options.
Please check <u>three</u> boxes.
A. Function machine ☐ $_1$
B. Words ☐ $_1$
C. Expressions ☐ $_1$
D. Table ☐ $_1$
E. Number pair ☐ $_1$
F. Corresponding sets ☐ $_1$
G. The one you write in part (b) ☐ $_1$

本題為函數表徵之教學情境題組 MFE706 的(c)小題，設定的學生特定數學程度是「程度較差」，要求職前教師選出三個會教給數學程度較差學生的函數表徵，其中 G 選項是學生在(b)小題的答案，例如：圖形表徵、實例表徵、電算器表徵、bow and arrow 表徵等。由於要進行教學的對象數學程度較差，故而本題的答案設定為較具體、程序性操作較強的幾個表徵，包含函數機器、式子、表格、集合對應等表徵，以及 G 中符合此性質的表徵，例如實例表徵、電算器表徵等。

本研究針對其中 B.文字、C.式子這兩種數學語言進行探討，以瞭解職前教師對於「能選擇應教給數學程度較差學生的數學語言」之教學能力具備情形，這是屬於運算「執行」的能力。

2. 臺灣、美國的表現

由表 4.2.4 顯示，面對數學程度較差的學生，臺灣有 57%的職前教師選擇教他們函數的式子表徵這種數學語言，顯著高於美國的 24%。式子表徵雖具有程序性、可操作性的特質，但它是以一堆符號x、y、$f(x)$、等號、

運算符號、數值等數學物件組成，仍具有結構性、抽象性的特質，且學生必須瞭解數學中這些符號的意義、組成的語法規則，才能真正理解此表徵，相較之下，函數機器、表格、集合對應、電算器等表徵，更為具體。在題目 MFE706(c)僅要求職前教師選出三個適合的表徵下，職前教師不盡然需要選擇式子表徵，但仍近六成臺灣職前教師即使面對數學程度較差的學生，也選擇教給他們這種表徵，可見得他們對學生學習符號式子這種數學語言的重視。美國的情況則不相同，有超過七成的職前教師認為若學生數學程度較差，則可以不必學習式子表徵，亦即，至少在函數的情境中，學生可以不學符號式子這種數學語言。

面對數學程度較差的學生，兩個國家選擇教文字表徵的比例皆不高，臺灣僅有 2%，顯著低於美國的 10%，可看出，無論在臺灣或美國，多數職前教師認為文字表徵並不適合程度較差的學生學習。關於他們認為不適合學生學習的原因為何，從前一節中職前教師關於「文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制」、「學生知能在文字敘述之組成與特徵的機制」之思維，可以得到一些想法。

表 4.2.3　應教給數學程度較差學生之數學語言百分比

	式子	文字	表徵差異
臺灣	57% (4.8%)	2% (1.7%)	55%**
美國	24% (5.9%)	10% (2.3%)	14%**
國家差異	33%**	-8%**	

註：括號中的數值為標準誤。
$^{*}p < .5$。$^{**}p < .1$。

圖 4.2.2 顯示，美國有將近七成（69%）的職前教師認為面對數學程度不好的學生時，無論式子或文字表徵都不需要教；臺灣選擇兩種數學語言都不教的職前教師則較美國少，有 43%。在臺灣，最高比例的是（55%）選擇不教文字表徵，但認為式子表徵仍需要教給學生，美國做此選擇的職前教師僅有 21%；此現象可能與兩個國家之代數課程著重點不同有關。美

國的代數課程強調與日常生活知識的連結，關於函數的教學，重視量之間的關係與變動模式的掌握，而臺灣的代數課程則重視文字符號的意義、約定、運算法則等，在函數的部分，著重函數定義、建立關係式等面向的教學（陳仁輝、楊德清，2010；Li & Ginsburg, 2006）；這可能是臺灣有比美國更高比例職前教師認為即使面對程度不好的學生，仍應教符號式子這種數學語言的原因。

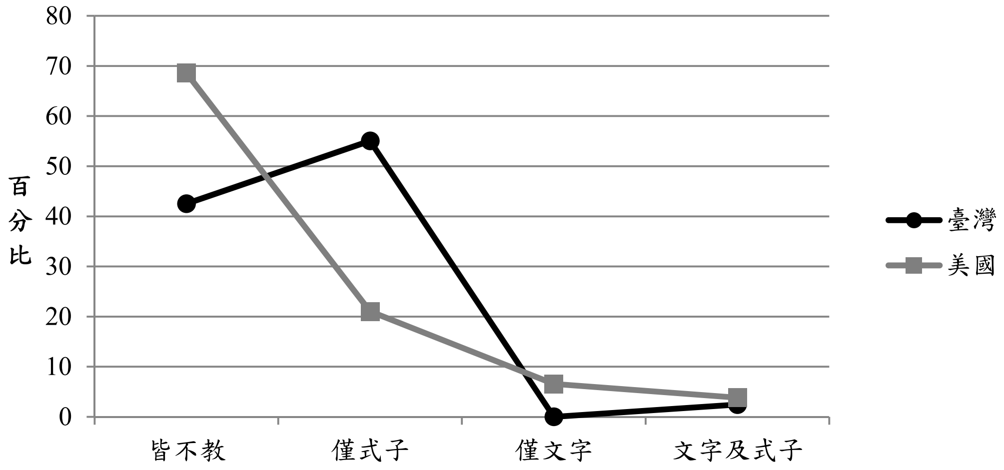


圖 4.2.2　選擇教給程度較差學生之數學語言的組型

根據文獻探討可知，文字表徵對學生而言是困難的數學語言，對數學程度不佳的學生而言，更是如此，因此，本研究認為選擇教文字表徵者，在「能選擇應教給數學程度較差學生的數學語言」的教學能力上，是不足的，因此訂僅教文字、教文字及式子的得分為 0 分。關於式子表徵，根據其具有程序性操作的特質且後續學習關連性強，本研究認為選擇僅教式子是恰當的，訂為 1 分；然又根據其以符號組成來表達數學物件關係的抽象性、結構性，認為對程度不好學生來說，有一定難度，故而，訂既不教式子也不教文字的得分亦為 1 分。

表 4.2.4 顯示，臺灣的平均答對率顯著高於美國，顯示臺灣職前教師在「能選擇應教給數學程度較差學生的數學語言」的數學教學能力上，較美國具備。但相較於兩國在「能選擇應教給學生的數學語言」的表現，在「能選擇應教給數學程度較差學生的數學語言」的表現差異較小，且兩國的平均答對率都約在 90%以上。然而，兩國得分之職前教師組成不同，美國有較高比例的職前教師選擇兩種數學語言都不需要教給學生，而臺灣則有較高比例的職前教師選擇該教學生程序性較強、與後續學習關連性強的式子表徵。

表 4.2.4　「能選擇應教給數學程度較差學生的數學語言」之答對率

	臺灣	美國	分數差異
答對率	98% (1.7%)	90% (2.3%)	8%**

註：括號中的數值為標準誤。

$^{*}p < .5$。$^{**}p < .1$。

（三）屬運算「推理與判斷」之數學教學能力：能判斷影響學生理解數學語言的因素

1. 題目敘述

中文版本

(d) 請說明「文字表徵方式」最適合介紹給什麼樣的學生？為什麼？

英文版本

(d) In your opinion, for what kind of student is the “Words” representation most suitable? Why?

本題為函數表徵之教學情境題組 MFE706 的(d)小題，本研究藉由職前教師說明文字表徵「對於給定的一個x值，必有唯一的一個y值和它對應，則稱y是x的函數」適合介紹給哪類學生及其原因，來探討職前教師關於「能判斷影響學生理解數學語言的因素」之數學教學能力的具備情形。

2. 職前教師之回答的編碼系統

職前教師在 MFE706(d)的回答，呈現出許多他們對文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制之思維，如前一節所示。然而，為了能進行臺灣、美國的比較，探討兩個國家職前教師在「能判斷影響學生理解數學語言的因素」之數學教學能力具備情形的異同，本研究認為需要依據前一節的結果，發展成編碼系統，並給予每類編碼恰當的得分。

在過去參與 TEDS-M 的經驗中，我們知道為了進行臺灣、美國的比較，編碼系統不宜過細或過複雜，故而，本研究將前一節中所得的職前教師各種思維進行選擇與整併，以及對資料進行分析與歸納，得到一用以探討職前教師關於「能判斷影響學生理解數學語言的因素」的教學能力之編碼系統，並將之交由美國 TEDS-M 團隊檢核恰當性，以下呈現之編碼系統與給分，乃是臺灣與美國的共識。每位職前教師的回答可以得到所有適合的編碼，在得分上，則以其獲得之所有編碼中得分最高者為其得分。透過此編碼系統與給分，我們可以探討職前教師是否能基於文字敘述之數學語句的特徵，或學生的特徵，進行推理、思考，恰當地判斷影響學生理解數學語言的因素。

本研究將編碼系統區分為以下類別：以考量「數學語言」特徵為主、以考量「學生」特徵為主，以及其他。由於每一個編碼都代表職前教師所浮現的一類因素（其中可能包含數個子類），為了能更貼切地描述職前教師所指涉的因素為何，本研究根據質性研究的想法，直接引述職前教師的用詞來描述每個因素的內涵（quotations; Patton, 2002），在引號中不同字形者為職前教師的實際描述。

A. 以考量「數學語言」特徵為主

(1) Code 10：數學語言的組成成分與特徵（得分：1）

部分職前教師思考時，會考量「數學語言」的特徵，其運思所作用的對象圍繞著提供給他們的文字敘述，有些職前教師聚焦於文字敘述的組成成分，有些職前教師則「看見」了文字敘述所具有的特徵，如下：

含有數學專門詞彙

文字敘述含有數學專門詞彙亦是職前教師提到的特徵，他們認為「『給定』、『唯一』是比較數學的用語」（#TW11410168），而“The terms/words ‘one and only one’ and ‘correspondint [correspondent]’” (#US13030104)、「『對應關係』就是一個抽象的詞句」（#TW11410119），且“very technical” (#US13220107)。

抽象

在臺灣職前教師眼中，「文字敘述很抽象」（#TW90810109）、「不夠具體」（#TW90710110），這是最多臺灣職前教師提出的特徵；美國的職前教師亦不例外，例如，US13220111 便提到“words are more abstract”，US10250101 則提到“Students should be introduced in more concrete ways first, and then they can be introduced to the abstract ‘words’”。他的描述呈現出職前教師所判斷之文字敘述的抽象或不夠具體等特徵，往往是來自參照其他表徵而得，其他職前教師的描述，也透露著類似的想法：文字敘述“much less concrete than the picture or symbolic representations” (#US11820102)、「不比圖解來得容易明瞭」（#TW11510121）、“harder to comprehend than a visual representation” (#US11420104)。

長、簡潔

職前教師提到「文字敘述較長」（#TW90210103），「簡潔」（#TW11410141）等特徵，看似矛盾的描述，其實乃是一體兩面。數學中常試圖以較少的詞

彙來描述所要說明的對象，而使得數學語言往往具有精鍊、簡約、濃縮的特徵（李士錡，2001；Laborde, 1990），然而，也因為這樣的特徵，使得數學語句的進展速度往往較一般日常語句快，一樣長的句子，數學語句常比日常語句包含更多有新訊息的詞彙，這會使閱讀句子的人感覺腦中的負荷較大，而感受到數學的敘述較長。

一般化

「總結」是僅在臺灣出現的主題（theme），有些臺灣職前教師提到文字敘述適宜呈現給學生的時機乃在最後總結時，例如，應在學生「認識『函數』後，再用文字概念做最後的總結」（#TW11910109）、「在完成學習時，老師用文字給予文字性的結論敘述」（#TW11610114）、「相對於其他表徵，文字表徵的敘述較有總結的概念」（#TW11410168）等。在臺灣，教師在教學最後的總結，往往希望學生能基於之前所經驗的實例、圖像等，進行抽象，形成一般化的概念，這些職前教師提出文字敘述適合用於總結，可能代表著他們認為文字敘述具有「一般化」的特徵，能表徵出一般化的概念。

(2) Code 20：轉換成其他表徵或建構概念心像（得分：2）

部分職前教師考量「數學語言」的特徵，但並不是單以一種「客觀」、「外在」之「數學物件」的角度，他們也考慮這些數學語言在學生腦中需要經過特殊的運思、操弄。

轉換成其他表徵，如符號或圖像等

職前教師認為，文字敘述「沒有經過轉換、示例等方式，其概念很難真的理解」(#TW11510157)，必須「轉換成成自己可以吸收的模式」(#TW11410144)，例如，轉換成「數學符號」（#TW90210105）、「數學式子」（#TW90710102），從美國職前教師的敘述亦可看到同樣的想法：“put words into symbolic language and create an equation from it” (#US11820101)。有些職前教師則提到

學生「需將文字表徵轉換成圖像表徵」(#TW11810105)，或"visualize what the words represent" (#US10730114)。

強調腦中的運思

本研究注意到有些職前教師在描述文字敘述轉成數學式或圖像時，會出現「腦」(#TW11610112)、「腦海」(#TW11910102)、「心像」(#TW11410102)等詞彙，相較於前一個子類，這個子類中，浮現出另一個主題，即這些職前教師的思維中，特別著重學生腦中的運思，關注學生的腦是如何處理文字敘述的，#US10250129 的說法為此提供一個很好的詮釋："…The student must be able to <u>process the actions of two variables in their heads</u> for this to make any sense to them. They would also most likely have to <u>visualize some sort of example in their head</u>…"。

B. 以考量「學生」特徵為主

(1) Code 11：數學能力及與數學特徵相關的思考能力（得分：1）

這一個類別與下一個類別所呈現的面向，皆以「學生」特徵為思考的主體，並且皆是描述學生能力，然而，相較於下一類，這一類的職前教師敘述，展現出對數學這個題材更高的關注強度。

數學能力

分析職前教師的答案，浮現出「數學能力」(#TW11510146)這個面向，他們認為「數學理解力強」(#TW11510130)的學生較能理解該文字敘述。有些職前教師則更聚焦於數學能力中與數學語言相關的部分，例如，「對數學語言較熟悉」(#TW90110105)、"have the mathematical linguistic knowledge to break down the statement" (#US11130111)的學生，較能理解文字敘述。

與數學特徵相關的思考能力

這個類別的描述中，職前教師所論及的雖然並不屬於一般為數學教育界探討的數學能力，但乃是與數學之抽象化、邏輯性等特徵有關的思考能力，有其對數學的針對性，故而，本研究亦將之歸納於與數學能力同一類中。

職前教師提到「可做抽象思考」(#TW10610127)、「具有抽象思考能力」(#TW11410126)、"a higher abstract thinking ability" (#US11820102)的學生較能理解文字敘述，而這樣的想法，乃相映於數學概念或數學語言的抽象特徵，例如，#TW10810107 便提到需要有抽象思考能力的原因是「因為文字表徵方式所寫的是較抽象難懂的文字」。有些職前教師則提及與另一項數學特徵「邏輯」有關的能力，他們認為「邏輯概念」(#TW11610136)、「邏輯性」(#TW11610149) 強，「具備邏輯思考能力」(#TW11510157) 的學生，較能理解文字敘述。

(2) Code40：學生的能力與程度（得分：0.5）

這一類敘述中，職前教師以「學生」為思考的主體，聚焦於學生所擁有的能力、程度上，但相較於前一類，乃是較為廣泛的、一般性的敘述。可以想成將前一類的「數學能力」拆成兩個主題標籤，即「數學」、「能力」，前者針對題材，後者屬於學生身上所擁有的。本類敘述可能圍繞著「數學」，但關於學生身上所擁有的，則提出的是一個較模糊的概念，「數學程度」(#TW11410151) 便是一個例子；可能圍繞著「能力」，但所針對的題材卻沒有限於數學，例如，「語文能力」(#TW90410108)；也可能提出更為模糊的概念：「程度」(#TW90910105)。以下為本編碼中的幾個類別。

數學程度或程度

部分職前教師考量到學生數學程度的面向，雖然他們認定能理解數學語言所需的數學程度不盡相同，例如「數學程度中上」(#TW11510164)、「數學程度佳」(#TW11410157)，但都認為數學程度是一個影響因素。有些職前

教師的描述雖然沒有直接出現「數學程度」這個詞彙，但其敘述中所表達的意義，提供研究者他們亦是考量學生數學程度的線索，例如，在臺灣，#TW90210103 提到「對數學概念較好的學生」較能理解數學語言，在美國，則有職前教師以學生的修課情況來呈現，例如，“higher level such as pre-calculus or calculus” (#US11130119)及“a higher level mathematics course(algebra II)” (#US10730110)。

有些職前教師描述更為模糊的概念：「程度」，例如「程度較中高」（#TW90910105）、“advance students” (#US 10130118)、“Highest level” (#US10250111)、“the higher achieving students” (#US10130126)等。

語言能力

職前教師亦提出學生的「語言能力」（#TW90410108）為影響學生理解文字敘述數學語言的因素，他們提到的語言能力包含學習、理解、運用等方面，認為「文字吸收能力佳」（#TW11710107）、「文字運用理解能力較高」（#TW11310108）、“have higher reading understanding” (#US10130126)、“ with a strong command of the language” (#US11220102)的學生，較能理解數學語言。這裡所提及的是較一般性的語言能力，即「國文程度」（#TW11610120）、「國文程度（閱讀能力）」（#TW11310101）等，並非特指數學語言能力。

理解能力

有些職前教師提出「理解能力」（#TW11510156）、“reasoning skills” (#US11520105)，他們認為學生的理解能力對理解數學語言產生影響，「因為理解力佳，比較能從文字直接理解它所表達的涵意」（#TW11610143）。

(3) Code41：學生的情意面（得分：0.5）

臺灣職前教師出現學生的情意面向，例如，與數學態度有關的「對數學有興趣」（#TW90010107），或與數學焦慮有關的「害怕看到數學符號」（#TW

11710107)。並沒有任何美國職前教師出現這個面向。有些職前教師的思維中，認知與情意同時出現，他們的敘述透露出他們認為二者間相互關連的訊息，例如，#TW11910111 提到「數學程度不好使其沒興趣了解文字涵意」，#TW11410151 也提到「數學程度較佳，且對數學有興趣的學生，因為較能將文字抽象出數學概念，且能有耐心的閱讀、分析語句所表達的意思」。

(4) Code42：學習類型（得分：0.5）

有些職前教師認為“It just depends what type of a learner the student is” (#US14420102)。美國的職前教師由一般文獻中所常探討的三類學習特徵切入，即視覺的（visual）、聽覺的（auditory）、動覺的（kinesthetic）學習類型，他們認為“less visual and more auditory type of learners” (#US11120108)較能理解文字敘述，而“visual and kinesthetic learners” (#US 13420116)則較不能理解文字敘述。臺灣也有職前教師從學習類型去看，但他們提出的面向與美國職前教師並不相同，例如，#TW90710109 所提「需要明確定義的學生」。

C. 其他（得分：0）

既沒有從數學語言面向也沒有從學生面向考量學生學習或理解文字敘述之數學語句的職前教師，本研究給予其得分 0 分，判斷他們在「能判斷影響學生理解數學語言的因素」的能力上是較為缺乏的，而其中有一僅美國出現而臺灣沒有的類別，本研究認為值得另外給予編碼以表徵他們獨特的思維。

(1) Code70：文字敘述適合所有學生學習

有些職前教師認為所有學生都可以學習、理解文字敘述，只要在教學上進行調整或搭配其他表徵，例如，#US10730110 的回答“I think it could be used for any level of student given that you aren't relying soley[solely] on this representation....”。另外有些職前教師則甚至認為不需搭配其他表徵，所有學生都可以學習、理解文字敘述，例如#US32930107 的回答“Any, because the "words" can be further explained in order to make sense to the students....”。

3. 臺灣、美國的表現

此部分，本研究將報導依據前一部分的編碼系統給予職前教師回答編碼的結果，本研究先於表 4.2.5 呈現這些因素的主題（theme; Patton, 2002）與概述，以方便後續分析與描述。

表 4.2.5 職前教師所判斷影響學生理解數學語言之因素

主題	概述	分數
轉換	為理解所面對文字表徵，學生需將之轉換為較具體的表徵或概念心像，例如，圖像、式子等。	2
數學語言特徵	數學語言的組成成分以及所呈現的數學語言特徵，例如，包含數學專門詞彙或抽象等，會影響學生理解文字表徵。	1
數學能力	學生在數學能力或與數學的邏輯、抽象、形式等特徵相關之思考能力的具備情形，影響他們理解文字表徵。	1
一般能力	學生能力影響其理解文字表徵。此處之能力並非特指與數學特徵相關者，而是較為一般性的說法，例如，理解能力、程度等。	0.5
情意	例如，學生關於數學或數學學習的態度等，對其學習、理解文字表徵造成影響。	0.5
學習類型	學生因本身的學習類型（例如，視覺、聽覺、動覺）不同而影響其對文字表徵的學習與理解。	0.5
學生皆可	文字敘述適合所有學生學習，只要在教學上進行調整或搭配其他表徵，或甚至不需要搭配其他表徵。	0

圖 4.2.3 顯示臺灣、美國職前教師出現各因素的百分比。除了學習類型外，兩個國家在其他各因素的百分比皆達顯著差異（$p < .05$）。

臺灣、美國出現轉換因素的百分比各有 18%、3%，臺灣顯著高於美國，但仍不算高。提供此類答案的職前教師必須先能連結到數學語言的特徵，例如形式化或抽象化等，也必須對其他表徵及特性有所認識，更重要的是，必須瞭解在學生學習數學語言的歷程中，其腦中如何運作，如何處理數學語言。職前教師需具備、連結多項數學教學能力以進行思考、推理，才可能提供轉換因素，這並不是一個容易的運思，可能因此造成出現轉換因素的百分比不高。

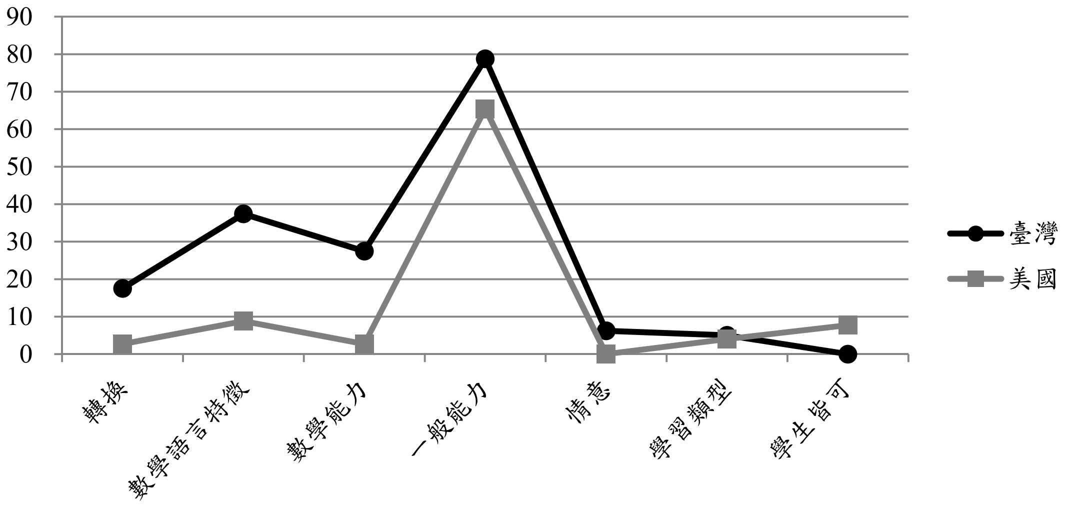


圖 4.2.3　影響學生理解數學語言各因素百分比

臺灣、美國各有 37%、9%的職前教師出現數學語言特徵因素，他們能判斷文字表徵「對於給定的一個x值，必有唯一的一個y值和它對應，則稱y是x的函數」具有抽象化、精簡與嚴謹等特質。這些皆為文獻中提及的數學語言特徵，但屬較為「一般性」的描述。文獻中針對數學語言特徵分析，常更進一步考量語法結構的複雜度、數學語彙間關係的複雜度、語句進展速度等，考量這些特徵能使職前教師更細部、深入地考量學生腦中對數學

語言的處理歷程，也更能思考學生在課堂中能理解或不能理解學習內容的原因。然而，兩個國家皆沒有任何職前教師能主動提出此類特徵，能提出「一般性」描述者，比例也不高，他們分析數學語言特徵的能力仍須培養。

臺灣、美國各有 27%、3%的職前教師提出數學能力因素，各有 79%、65%提出一般能力因素。表 4.2.6 顯示，兩個國家中，能考量到能力因素影響學生理解數學語言的職前教師各有 96%、67%，但能更聚焦到數學能力，而不僅是提出一般性的程度、理解力等的職前教師僅占其中少部分，以美國的比例尤其低，僅占 4% （= (1+2) / 67）。

表 4.2.6　職前教師提出能力因素之各組型百分比

	臺灣	美國	國家差異
數學及一般能力	10% (3.8%)	1% (0.7%)	$9\%^{*}$
僅數學能力	17% (4.7%)	2% (1.2%)	$16\%^{**}$
僅一般能力	69% (5.6%)	64% (3.6%)	4%
總和	96%	67%	29%

註：括號中的數值為標準誤。
$^{*}p < .5$。$^{**}p < .1$。

關於情意因素，臺灣與美國出現的比例皆相當低，但值得注意的是，美國並無任何職前教師出現此因素（參閱圖 4.2.3）。謝豐瑞、楊志堅與施皓耀（2012）的研究結果指出，臺灣、美國各有 39%、58%的職前教師在其師資培育學程中修習過如信念、態度等方面的數學情意議題，部分職前教師可能具備此方面的相關知識。由此看來，在本題出現情意因素者，比可能具情意相關知識者少得多，這可能是因為（1）職前教師雖然具備數學情意方面的知識，但在此與數學語言有關的情境中，並不會引動這些知識的連結；或（2）職前教師並不認為情意因素是影響學生學習數學語言的重要因素。

表 4.2.7 呈現兩個國家中，考量到與數學語言所具特徵相關的因素（轉換或數學語言特徵）、與學生所具特徵相關的因素（數學能力、一般能力、

情意、學習類型）之職前教師比例。幾乎所有臺灣職前教師皆能提出學生特徵相關因素，能從學生能力、情意等切入看他們理解數學語言的情形，比例顯著高於美國的 68%。文獻指出數學語言的特徵影響學生理解數學語言（Barton & Heidema, 2000），臺灣有超過一半的職前教師能提出與語言特徵相關的因素，但在美國卻僅有 12%，美國職前教師頗缺乏由數學語言的角度切入而分析學生理解數學語言情況的能力。不過，就臺灣本身而言，能提出語言因素者仍顯著低於能提出學生因素者，職前教師從數學語言的角度切入分析的能力尚須培養。

綜合表 4.2.7 與圖 4.2.3 來看，美國職前教師有高達三成不能由學生因素或語言因素思考學生理解數學語言的情況；而能從這兩類因素去思考者，也往往僅會考慮到一個學生因素，或一個語言因素，能連結到的面向較臺灣職前教師單一。並且，這些美國職前教師多數能考量到的為學生因素，且為學生的一般能力這種較一般性、較廣泛的考量。從這樣的想法到能真正分析學生學習、理解數學語言時的腦中運作，實有一段距離。

表 4.2.7　職前教師提出語言因素或學生因素之各組型百分比

	臺灣	美國	國家差異
語言及學生因素	54% (5.4%)	11% (2.4%)	43%**
僅學生因素	44% (5.4%)	57% (4.5%)	-14%
僅語言因素	0% (0.0%)	1% (0.9%)	-1%
兩類因素皆無	3% (1.9%)	31% (5.3%)	-28%**
提出學生因素	97% (1.9%)	68% (5.1%)	29%**
提出語言因素	54% (5.4%)	12% (2.7%)	42%**
因素差異	44%**	57%**	

註：括號中的數值為標準誤。

*$p < .5$。**$p < .1$。

表 4.2.8 呈現臺灣、美國的答對率，可看出臺灣在「能判斷影響學生理解數學語言的因素」的能力上，顯著優於美國。但 49%的答對率是否足夠，值得臺灣的師培界考量。

表 4.2.8　「能判斷影響學生理解數學語言的因素」之答對率

	臺灣	美國	分數差異
答對率	49% (3.1%)	22% (2.6%)	27%**

註：括號中的數值為標準誤。

$^{*}p < .5$。$^{**}p < .1$。

二、平方根算則之教學情境

（一）屬運算「執行」之數學教學能力：

能使用學生可以理解的數學語言

1. 題目敘述

中文版本

以下是某本國中教科書裡關於「平方根乘法算則」的敘述：

「兩個正數的正平方根乘積，與兩個正數乘積的正平方根相同」，

郭老師教完「平方根乘法算則」後，發現多數學生都學會了這個敘述的式子表徵，即: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 。但是許多學生卻仍說看不懂上面這個敘述。

(a) 請**改寫**這個敘述好讓同學容易理解，敘述中**請不要使用符號**。

英文版本

> The following is a statement of “algorithm for square-root multiplication” in a secondary school textbook:
>
> “The product of the positive square roots of two positive numbers is equal to the positive square root of the product of the two positive numbers”,
>
> After Ms. Guo has taught the “algorithm for square-root multiplication”, she finds that most students learned the expressional representation of this statement, that is, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, but many students still say they do not understand the above statement.
>
> (a) Please ***rewrite*** the statement so it is easier for students to understand. **Please *do not use symbols*** in your sentence.

教師常常在課堂中使用文字敘述的數學語言，包含口述與版書，若學生無法理解教師本來使用的文字敘述時，教師的選擇之一是將該敘述做一些變化以讓學生能理解、學習該數學語句，之後或許才能更進一步地教學生課本上的或更為數學領域、社群使用的數學語句。

本題為平方根算則教學情境題組 MFE806 的(a)小題，職前教師必須能判斷句子對學生而言的困難點為何，例如：結構化、堆疊許多數學語彙、大量名詞化等，並能實際執行將這些困難點去除的行動，改寫成學生較易理解的數學語句。本研究以此題來探測職前教師「能使用學生可以理解的數學語言」之能力。

2. 職前教師之回答的編碼系統

職前教師在 MFE806(a)的回答，呈現出許多他們關於學生知能在文字敘述之組成與特徵的機制的思維，如前一節所示。本研究為了能進行臺灣、美國的比較，探討兩個國家職前教師在「能使用學生可以理解的數學語言」

之數學教學能力具備情形的異同，依據前一節的結果，發展成編碼系統，並給予每類編碼恰當的得分。

從 TEDS-M 的經驗告訴我們，進行國際比較時，編碼系統不宜過細或過複雜，故而，本研究將前一節中所得的職前教師各種思維進行選擇與整併，以及對資料進行分析與歸納，得到一用以探討職前教師關於「能使用學生可以理解的數學語言」的教學能力之編碼系統，並將之交由美國 TEDS-M 團隊檢核恰當性，以下呈現之編碼系統與給分，乃是臺灣與美國的共識。透過此編碼系統與給分，我們探討職前教師能否使用學生可理解之文字敘述數學語句的情況。

本研究的編碼系統基本上聚焦於職前教師對 4 個可能造成學生理解困難的數學詞彙之抓取情形，以及他們所做的修改是否恰當，此為本研究對職前教師改寫之語句所做的第一類編碼，之後，本研究根據職前教師所可能出現的各種類別，給予第二類編碼及其得分，如後所述，本研究在說明此編碼系統時，易提供職前教師的的實例，以更清楚地展現，在引號中不同字形者為職前教師的實際描述。

A. 第一類編碼：所抓取之職前教師改寫詞彙

(1) Code A：改寫「乘積」/“product”

Code A1 - 改為：乘以、times

改為「乘以」是臺灣職前教師改寫「乘積」方式的第一類，對應於這個改法，美國職前教師是將“product”改為“times”。

此改寫的特徵在於使表示乘法運算之後的靜態結果轉為一個運算動作，學生在腦中處理這個詞彙時，可能會有操作的程序。

改為「乘以」/“times”，會迫使語句的結構改變，即做乘法運算的兩個物件，會被拆開，例如，「兩個正數的正平方根乘積」會變為「一個正數的

正平方根乘以另一個正數的正平方根」(#TW90410111),或是由"the positive square root of the product of the two positive numbers"改為"the square root of A times B" (#US12120105)。故而,此一改寫,會使得語句中的帶有新訊息的詞彙一個一個逐步出現,而減緩語句進展的速度。

Code A2 - 改為:相乘、multiply

職前教師改寫「乘積」/"product"的方式中,第二類是將之改為「相乘」/"multiply"。

相較於「乘積」/"product"表示乘法運算之後的結果,「相乘」/"multiply"與「乘以」/"times"一樣,皆表徵一個運算動作,具有程序性、操作性的特質。例如,「兩個正數的平方根相乘」(#TW11510134),或"Multiplying the positive square root of two positive numbers" (#US10130109)。然而,與「乘以」/"times"不同的是,此類改法並需要將兩個同時出現的數學物件拆開。

有些職前教師的改法增添口語化的特徵,例如,「乘起來」(#TW11510168)或"multiplying the numbers together" (#US15810103)。

另有一類職前教師亦改為「相乘」/"multiply"這個詞彙,但他們所改寫之句子的結構將兩個同時出現的數學物件拆開,使用「乘以」/"times"較為相似,因此也具有減緩語句進展速度的特徵。例如,#TW11510158 改寫之「一正數的正平方根與另一正數的正平方根相乘」。美國職前教師則使用"multiply"的被動語態,例如,"when multplying[multiplying] the square root of one positive number by the square root of another positive number" (#US10220109),以及"The square root of a positive number 'a' multiplied by the square root of a second positive number 'b'" (#US10520101)。

(2) Code B:改寫「正平方根」/"the positive square root"

「正平方根」/“the positive square root”是另一個職前教師會將之改寫為運算動作的詞彙/短語。

改為：開平方、take the square root…

在原始的語句中，「正平方根」/“the positive square root”為一個名詞（名詞短語），偏向靜態。部分職前教師會將之轉為動態的、執行一個運算動作的過程，改寫為「開平方根」（#TW11810111）、「開平方」（#TW11410129）、“took the square roots…getting the square root” (#US15810103)、“square root them” (#US10230102)等。

改為：開根號

臺灣職前教師的資料浮現出另一種類別，他們亦是將「正平方根」轉為運算動作，但使用的詞彙/短語為「開根號」，例如，的所改之語句：「兩個正數開根號後相乘…先相乘後開根號的值…」（#TW11410172）。

「開根號」是臺灣數學課堂中常使用的詞彙，相較於「平方根」，運算符號“$\sqrt{\ }$”往往與「根號」這個詞彙有較強的連結，因此，職前教師選用這個詞彙，比之於前述改法，增添符號表徵連結的特徵，也使得運算動作更為具體、明確。

改為：在根號中、under the radical…，「根號」為符號

分析、歸納職前教師改寫的敘述發現，有一類職前教師使用「根號」、“radical”等詞彙，他們的用法中，乃是直接指稱“$\sqrt{\ }$”這個符號，例如，「2 個帶有根號的正數…2 正數相乘加根號…」（#TW11510152）、「…在根號中合併相乘」（#TW90810104）、“…put their product under the radical” (#US13540102)、“…multiply them under one square root symbol” (#US11130128)。

改為：根號，「根號」為數

歸納職前教師的資料，可發現臺灣職前教師改寫為「根號」者，有另一種類別浮現。職前教師賦予「根號」這個詞彙當成「數」的意義，以「根號」來指稱帶有根號的數，因此可以直接拿他們去進行乘法運算，例如，「根號相乘」(#TW11410152) 與「兩個正的根號相乘」(#TW11710114)。

(3) Code C：改寫「相同」/"is equal to"

在中文和英文的原語句結構中，「相同」與"is equal to"並不是完全相對應的，而歸納兩個國家職前教師改寫之敘述後，也發現他們呈現不同的改寫觀點浮現出來。以下先就臺灣的情況進行報導。

改為：等於

部分職前教師將詞彙「相同」改為「等於」，這樣的改寫同時改變了語句的結構，即由「A 與 B 相同」的結構轉為「A 等於 B」的結構。例如，「兩個正數的正平方根乘積會等於兩個正數乘積的正平方根」(#TW11510107) 與「在兩個平方根相乘等於數字相乘再開平方」(#TW909101013)。

這樣的改法，使得語句減低了結構性，而增加了程序性特徵，有些職前教師還增加了與運算結果有關的詞彙，更加強操作、程序感的呈現，例如，「兩個大於零的數，開根號相乘的結果會等於兩個數相乘再開根號」(#TW11810110)

改為：即是、結果相同...

部分職前教師的敘述，浮現出他們增強語句之口語化的改寫特點。有些職前教師除了將詞彙改寫為非數學專門用語外，也改變了語句的結構，他們的語句結構與前一類職前教師的敘述結構類似，例如，「根號相乘即是數字乘起來補上根號」(#TW11410152) 與「兩個正的根號相乘其實就是根號裡面的兩數相乘然後再開根號。」(#TW11710114)。

給美國職前教師的情境中，語句結構是“A is equal to B”，故而本研究針對美國職前教師的改寫，聚焦於他們的修改是否把“is equal to”變得為較口語化，或減緩了語句進展速度。

改為：is the same as…

美國職前教師將改為“is equal to”變得為較口語化詞彙/短語，例如，“Multiplying the square roots of two positive numbers is the same as the square root of the two numbers multiplied together” (#US10920109)與“the square root of a multiplied by the square root of b can be rewritten as the square root of a multiplied by b” (#US11120111)。就語句中“is equal to”這部分來說，職前教師並沒有改變語句結構，僅是將之替換。

改為：it is the same as…

部分美國職前教師的改寫語句，有些美國職前教師的改寫減緩了語句進展速度，也變得較為口語化，例如，“If we multiply two numbers and take their square root, that would be the same as taking the square root of two numbers and multiplying those two values together.” (#US11620101)與“When you multiply two positive square roots, you get the same answer if you multiply the two positive numbers, then take the positive square root.” (#US14720102)。

(4) Code D：改寫「兩個」/“two”

在原語句中，「兩個正數的正平方根」/“the positive square roots of two positive numbers”、「兩個正數」/“the two positive numbers”都是同時給出兩個數學物件，在分析職前教師的敘述之後，可發現部分職前教師對此有所覺察並進行改寫，這些改寫可歸納成兩個類別。

改為：一…另一…、one…another

部分職前教師會將原語句中的「兩個」/“two”拆開，轉成「一…另一…」/“one…another”，例如，「一正數的正平方根與另一正數的正平方根的乘積，與兩正數的乘積的正平方根相同。」（#TW11410146）與“The square root of one number multiplied by the square root of another number can be found by multiplying the two numbers together and taking the square root of this product.” (#US11120126)。職前教師在其改寫的句子中，減緩了語句的進展速度。

改為：**a, b**

另一個改寫敘述的類別是將語句中的「兩個正數」直接代以兩個數學物件，例如，「兩個正數，甲、乙各[個]別開平方根，然後相乘 會跟甲乙相乘後再開平方根 一樣的值」(#TW11610105）與“if given two positive numbers a and b, then the positive root of a multiplied by the positive root of b is equal to the positive root of a multiplied by b.” (#US13420117)。此類改法中，為原語句中的兩個正數給出相應的物件，職前教師的語句提供學生「具體」的物件以供他們操作、運思。

B. 第二類編碼：語句改寫的類型

(1) Code 20：得分 2

改寫中包含 code A（乘積/product），並包含 code B（正平方根/the positive square root）與 C（相同/is equal to）

例如，

一個正數開根號乘以另一個正數開根號，會等於這二個正數相乘後，再開根號。（#TW11410101） [Code：A1, A2, B, C, D]

一個正數的正平方根乘以另一個正數的正平方根會等於這兩個正數先相乘再取正平方根。（#TW90410111） [Code：A1, A2, B, C, D]

兩個正數的正平方根乘積會等於兩個正數先相乘再開出（取）正平方根。（#TW11510127） [Code：A2, B, C]

If you have two positive numbers, a and b, and you take the square root of each and then multiply them together, it is equal to the square root of a times b. (#US10730121) [Code：A1, A2, B, C, D]

To find the product of the square roots of two positive numbers, you can multiply the two positive numbers and take the square root of their product. (#US10730113) [Code：A2, B, C]

(2) Code 30：得分 1.5

改寫中包含 code A（乘積/product），並包含 code B（正平方根/the positive square root）、C（相同/is equal to）、D（兩個/two）其中之一

例如，

一個開根號的正數，乘以另 1 個開根號的正數的積，和 2 個正數乘起來再開根號相同。（#TW11510168） [Code：A1, A2, B, D]

兩個正數的正平方根相乘之後的乘積等於這兩個正數相乘後之乘積的正平方根。（#TW11410105） [Code： A2, C]

現在有兩個正數，先將兩個正數分別取平方根之後，再將兩正數的平方根相乘；接著，先將兩正數相乘後，再取平方根，比較前後兩者，便可發現兩者是相等的！（#TW11310103） [Code：A2, B]

Multiplying the positive square root of two positive numbers a and b is equal to the multiplication of the two positive numbers and then taking the square root. (#US10130109) [Code： A2, B, D]

If a and b are two positive numbers, then the square root of ab is equal to the square root of a times the square root of b.
(#US10330105) [Code：A1, D]

(3) Code 11：得分 1.5

改寫中包含 code B（正平方根/the positive square root），並包含 C（相同/is equal to）、D（兩個/two）其中之一

例如，

兩個正數的正平方根乘積會等於兩個正數乘積後再加上根號。（#TW11610139） [Code：B，C]

正整數的正平方根與另一正整數的正平方根之乘積等於此二正整數乘積的正平方根。（#TW11510141） [Code：C，D；72]

If a and b are both positive, then the two following expressions are equal to each other:;a) The product of the square root of a and the square root and b.;b) The square root of ab. (#US13220119) [Code：C，D]

(4) Code 10：得分 1

改寫中包含 code A（乘積/product）

例如，

有兩個大於零的整數相乘之後的正平方根，與兩個正平方根相乘的答案相等。（#TW11510111） [Code：A2；72]

When you multiply two square roots the answer equals the square root of the product. (#US11410127) [Code：A2]

Two positive square roots multiplied together , equal the square root of their product. (#US11720130) [Code：A2]

(5) Code 40：得分 0.5

改寫中僅包含 code B（正平方根/the positive square root）、C（相同/is equal to）、D（兩個/two）其中之一

例如，

有二個正數，其正平方根的乘積會等於其乘積的正平方根。（#TW11410125） [Code：C]

一正數的正平方根與另一正數的正平方根的乘積，與兩正數的乘積的正平方根相同。（#TW11410146）　[Code：D]

When you take the product of two positive square roots it is equal to the square root of the product of those two numbers.
(#US14720104)　[Code：C]

(6) Code 41：得分 0.5

改寫中將兩個正數改為實際數值，但包含 code A（乘積/product）、code B（正平方根/the positive square root）、C（相同/is equal to）其中之一

例如，

根號一乘根號二等於根號二
根號二乘根號三等於根號六
⋮
列舉法（#TW11910119）　[Code：A1, C]

The product is the answer when you multiply two postitive numbers together. a and b will be greater than 0. I would then give the students an example: a=16 b=36 sq root of 16=4 sq.root of 36 =6 6x4=24 which is greater than 0. (#US15810160)　[Code：A2]

A and B confuse people, use numbers.　Square root of 4 times square root of 25 equals square root of 100. (#US12820102)　[Code：A1]

(7) Code 70：得分 0

改寫中僅將「有兩個正數」先行提出描述，並未包含 code A（乘積/product）、code B（正平方根/the positive square root）、C（相同/is equal to）、D（兩個/two）中的任何一個

例如，

When two numbers are positive, the product of the square roots of each number is equal to the square root of the product of the numbers. (#US14820102)

Given two positive numbers, the product of their square roots equals the square root of their product. (#US10330102)

If you have square roots of two positive numbers, the product of the square roots will be equal to the square root of the products of the two original numbers. (#US12210101)

(8) Code 71：得分 0

改寫中使用譬喻，改寫之內容超過原敘述提供之物件

例如，

a 有帶帽子，b 有帶帽子　當 a 和 b 兩個想要連在一起，就只能擁有一個帽子。（#TW11510114）

乘號表示「同時」　二個人分別乘不同的交通工具同時要去台北，和二人同時乘同一輛車一起去台北，其目的都是一樣的。（#TW11610134）

有一對情侶本來分開住的，有一天他們結婚，也因些[此]住在一起了。<根號比喻成房子>。（#TW90910102）

(9) Code 72：數學錯誤

本研究認為雖然有些職前教師所改寫的句子出現數學上的錯誤，仍應編碼他們是否具備改寫上述 Code A～Code D 的能力，但本研究認為職前教師能否維持其所改寫之語句的正確性是很重要的，故而，若語句犯有數學錯誤，則本研究另外給予此 Code 72。然而，在「正數」或「正平方根」上較為放鬆的情況，本研究在此並不判定為數學錯誤。

例如，

兩個正數的平方根乘積<u>等於</u>**兩正數開平方根**。
（#TW11710104）

The product of two positive square roots is equal to <u>the square root of those two numbers.</u> (#US12820105) [Code：72]

3. 臺灣、美國的表現

關於職前教師在 Code A～Code D 的修改整理於表 4.2.9。

表 4.2.9　數學詞彙改寫舉隅

原詞彙/短語	改寫詞彙舉隅/短語	
	臺灣	美國
乘積 product	乘以	times
	相乘、乘起來	multiply
與…相同 is equal to	等於	is the same as it is equal to get the same answer
正平方根 the positive square root	開平方、取正平方根、開根號	taking the square root
	根號	radicals
二個 two	一個…另一個	one number… another…
	a, b	a, b

圖 4.2.4 呈現兩個國家改寫上述各詞彙的百分比。臺灣、美國各有 74%、65%的職前教師認為「乘積」/“product”是造成語句困難的詞彙並將之改寫，他們的改寫讓原本結構性較強的句子增加了程序性。臺灣有 8%的職前教師將之改為「乘以」，而美國有 19%將之改為“times”。「乘以」/“times”為運算動作，且其與其他詞彙的組成方式為「A 乘以（times）B」，即一個物件會出現在「乘以」/“times”之前，另一個則會出現在「乘以」/“times”之

後，這使得語句中的物件一步一步出現，減慢語句的進展速度。較高比例改寫「乘積」/“product”的職前教師，是將之改為「相乘」、「乘起來」、“multiply”，臺灣、美國的比例各為 72%、49%。這樣的改法亦將名詞「乘積」/“product”改為運算動作，但與「乘以」/“times”不同的是，多數職前教師將此類詞彙與其他詞彙組合時，並沒有將要相乘的兩個物件（詞彙）拆開。

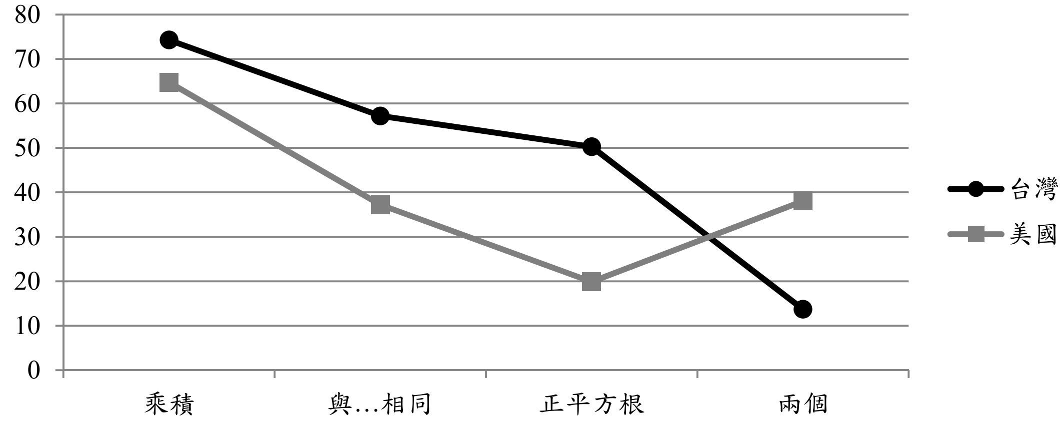


圖 4.2.4　改寫各詞彙的百分比

將「與…相同」/“is equal to”改寫成「等於」或“is the same as”、“ it is equal to”會使得語句結構由「A 與 B 相等」變為「A 等於（is the same as）B」或“A, it is equal to B”，改寫後的語句中，數學物件一步一步出現，語句進展速度減緩。並且「等於」、“ it is equal to”等詞彙或短語，具有運算動作的特質，能降低語句的結構性，增加其程序性。此外，「等於」或“is the same as”、“ it is equal to”等皆為日常生活中亦會使用的語言，改寫成這些語言，也使得語句的數學化（technical）特質降低，變得較為口語化。臺灣、美國各有 57%、37%的職前教師進行此類改寫，臺灣的比例顯著高於美國（$p < .05$）。

「開平方」、「取正平方根」、「開根號」、“taking the square root”等詞彙/短語指涉的是一運算動作，將「正平方根」/“the positive square root”這樣改寫可增加語句的程序性。而將「正平方根」/“the positive square root”改寫為「根號」/“radical”的職前教師，提供學生一個連結到符號“$\sqrt{\ }$”的機會，對學生來說，「根號」/“radical”可能比「正平方根」/“the positive square root”更具有具體物件的特質。臺灣、美國各有 50%、20%的職前教師進行此類改寫，臺灣的比例顯著高於美國（$p < .01$）。值得一提的是，「乘積」在兩個國家都是小學階段即出現的詞彙，對中學生而言，概念上也應較中學階段才出現的「正平方根」/“the positive square root”容易，然而，無論臺灣或美國，相較於改寫「正平方根」/“the positive square root”的職前教師，改寫「乘積」/“product”者顯著較多（$p < .01$），其原因值得進一步探討。

「兩個」/“two”拆成「一個…另一個…」/“one number…another…”可使語句中的提及的物件，即兩個正數，從一次同時出現，變為一個一個依序出現，降低語句進展的速度。而將「兩個正數」/“two positive numbers”取代為 a、b，則提供學生可用以運思、操作，且較為具體的數學物件。臺灣有 14%的職前教師進行此類改寫，美國的比例則顯著較高（$p < .05$），有 38%。

表 4.2.10 呈現兩個國家在教學能力「能使用學生可以理解的數學語言」的表現，臺灣的答對率為 64%，顯著高於美國。兩個國家皆以得到 code 30 為最多數（臺灣：39%；美國：41%），這些職前教師改寫「乘積」或「正平方根」之一，並至少改寫「與…相等」或「兩個」其中之一，以運算操作的詞彙增加句子的程序性，減緩句子進展速度，並提升口語化。此外，臺灣得到 code 20 的職前教師顯著多於美國（臺灣：31%；美國：16%），有較多職前教師能較為完整地考量句子中各個可能造成學生理解困難的部件，並能恰當地改寫他們。

表 4.2.10 「能使用學生可以理解的數學語言」之答對率

	臺灣	美國	分數差異
答對率	64% (4.3%)	50% (4.0%)	14%*

註：括號中的數值為標準誤。

$^{*}p < .5$。$^{**}p < .1$。

（二）屬運算「執行」之數學教學能力：

能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動

1. 題目敘述

中文版本

(b) 如果你不想改變這個敘述，而是想教學生**理解這個敘述**，請在下列教學活動中選出你認為**最有效**的兩個，並說明它們為什麼會有效的理由。

請勾選兩個最有效的活動，並說明理由

教學活動	最有效的	有效的理由
A. 再仔細地重教一次「平方根乘法算則」這個概念。	□1	
B. 一邊帶學生看此敘述，一邊以實際數值帶入敘述中的物件，逐步寫出此敘述的對應數學式。	□1	
C. 給學生此敘述對應的數值式子，例如，$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$，要求學生以文字敘述來描述。	□1	
D. 拆解這個敘述，一部分一部分地向學生解釋此敘述的意思。	□1	
E. 由敘述的一部分開始，請學生逐步擴展，判斷句子中所有數學物件間之關係。	□1	

英文版本

(b) If you do not want to change the statement but want to teach students **to understand it**, please choose from the following the two **most effective** teaching activities and explain why they are effective.

Please check two most effective activities and explain your reasons

Teaching activity	*Most effective*	*Reason for effectiveness*
A. Thoroughly re-teach the concept of "algorithm for square-root multiplication"	□1	
B. Guide the students to read the statement, and meanwhile substitute actual values into the objects in the statement. Write step by step the corresponding mathematical expression of this statement.	□1	
C. Give students corresponding numerical expressions of the statement, such as $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ and ask students to describe it with words.	□1	
D. Decompose the statement into parts, and explain the meaning of the statement part by part to students.	□1	
E. Ask students to start with a part of the statement and gradually expand it and then judge the relations among all mathematical objects in the statement.	□1	

讓學生學會文字敘述為主的數學語句，對學生而言是重要的數學語言知能培養，缺乏此知能，學生可能無法自行閱讀、理解課本中的敘述，對於老師教學中使用的數學語言，也可能產生理解問題，故而，職前教師能否選用恰當的教學活動來教學生理解數學語句，提升學生數學語言知能，對他們來說，是重要的數學語言相關教學能力。

本題為平方根算則教學情境題組 MFE806 的(b)小題，第一步要求職前教師從 A 到 E 共 5 個教學活動中，選出教學生文字敘述之數學語句「兩個正數的正平方根乘積，與兩個正數乘積的正平方根相同」時，最有效的兩個活動，本研究以此來探測職前教師「能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動」之能力。

1. 臺灣、美國的表現

表 4.2.11 顯示，臺灣、美國有最高選用比例的皆為教學活動 B，兩個國家皆有超過半數的職前教師選用。教學活動 B 本來並非本研究認為恰當的答案，因為必須先有對該語句的瞭解，才能寫出相應的數學式，要瞭解該語句的學生，自己能寫出數學式的機會很低，因此，學生在此教學活動中，進行的是較為被動的思考，且其思考中，主要依賴教師提供的數學實例輔助，來看懂該數學語句。沒有數學實例輔助的情況下，學生不見得還能看懂該語句。然而，本研究發現，當職前教師以此方式進行教學時，為對學生寫出對應的數學式，往往對語句中的各詞彙及整個語句提供較為仔細的說明，這或許提高了學生對該語句的理解。然而，值得注意的是，學生在此活動中，即使學會了數學語言，很可能是針對此語句的瞭解，偏向知識型能力（content-oriented）的學習，而非培養了數學語言知能的心理型能力（thought-oriented; Hsieh, Lin, & Wang, 2012）。

表 4.2.11　教學活動選用百分比

	臺灣	美國	國家差異
教學活動 A	9% (2.8%)	16% (7.5%)	-7%
教學活動 B	84% (3.8%)	64% (5.7%)	20%**
教學活動 C	56% (5.4%)	38% (10.9%)	17%
教學活動 D	23% (4.4%)	39% (6.6%)	-16%*
教學活動 E	17% (3.3%)	26% (4.9%)	-9%

註：括號中的數值為標準誤。

$^{*}p < .5$。$^{**}p < .1$。

教學活動 D 與教學活動 E 為本研究認為最恰當的兩個活動。這兩個活動中，學生會學習如何將整個語句拆解成其組成成分，並學習如何觀察、判斷組成成分間的關係。這些能力屬於心理型能力，若學生獲得此能力，他們在將來面對別的數學語句時，也有機會藉由使用這些能力而理解語句。美國一位職前教師（#US14720102）的說法“…It is important for students to be able to break apart statements and make sense of it so they can do the same with other algorithms of statements they may come across in the future….”為職前教師對這類教學活動的看法提供一個很好的詮釋。然而，表 4.2.11 顯示，臺灣選用此兩類教學活動的職前教師比例皆低於美國，在教學活動 D 上，臺灣與美國的差異甚至達到顯著。

在臺灣，有超過八成的職前教師選用教學活動 B，顯著高於美國的比例，但在教學活動 D、E 的比例卻較低，這對臺灣中學數學教師培育而言，是否為令人滿意的成果，值得進一步考量。

教學活動 C 亦是文獻中認為可以培養學生數學語言能力的活動，然而，在本題的情境中，並非恰當的選擇。因為學生自己由式子$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$而寫出的數學語句，可能與「兩個正數的正平方根乘積，與兩個正數乘積的正平方根相同」相去甚遠，對於學會此句幫助不大，但臺灣卻有超過半數的職前教師選擇此教學方法。由其提供的理由來看，這些職前教師中，有 67%聚焦於此活動提供了數值實例，提及數學實例與數學語言的連結，有 26%則聚焦於此活動中學生的主動性，他們多數沒有注意到此教學活動對學習「兩個正數的正平方根乘積，與兩個正數乘積的正平方根相同」這個語句的問題。

教學活動 A 亦非恰當的選擇，因為本題要選的教學活動必須能幫學生理解數學語句，要教學的主體在於數學語言，而教學活動 A 的焦點則在於進行概念的教學。由表 4.2.11 來看，臺灣、美國選擇此教學活動的比例都相當低。

以正確選擇一個教學活動得 0.5 分來計算，兩個國家的答題情況如表 4.2.12 所示。臺灣、美國在教學能力「能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動」上，並無顯著差異。

表 4.2.12　「能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動」之答對率

	臺灣	美國	分數差異
答對率	62% (2.4%)	65% (2.6%)	-3%

註：括號中的數值為標準誤。
$^{*}p < .5$。$^{**}p < .1$。

（三）屬運算「推理與判斷」之數學教學能力：能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素

1. 題目敘述

題目內容參閱（二）的題目敘述。本題為平方根算則教學情境題組 MFE806(b)小題的第二步，要求職前教師為所選出的兩個教學活動說明為何它們是恰當的。本研究藉此探測職前教師「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」之數學教學能力，亦即，他們選擇使用這些教學活動來教學生文字敘述之數學語句「兩個正數的正平方根乘積，與兩個正數乘積的正平方根相同」時，是否考量這些活動能否培養學生數學語言知能，或是否有其他恰當的考量點。

2. 職前教師之回答的編碼系統

職前教師在 MFE806(b)第二部分的回答，呈現出許多他們對學生知能、教學活動、文字敘述數學語句在教學中的機制之思維，如前一節所示。然而，為了探討臺灣、美國職前教師在「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」之數學教學能力具備情形如何，比較兩個國家的異同，本研究依據前一節的結果，發展成編碼系統，並給予每類編碼恰當的得分。

本研究將前一節中所得的職前教師各種思維進行選擇與整併，並對資料進行分析與歸納，得到一用以探討職前教師關於「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」的教學能力之編碼系統，並使編碼系統不至於過細或過複雜，以此對兩個國家職前教師的回答進行編碼，進行臺灣、美國的比較。該編碼系統完成後，交由美國 TEDS-M 團隊檢核恰當性，以下呈現之編碼系統與給分，乃是臺灣與美國的共識。每位職前教師的回答可以得到所有適合的編碼，在得分上，則以其獲得之所有編碼中得分最高者為其得分。透過此編碼系統與給分，我們可以探討職前教師在選擇教學活動時，是否基於恰當的考量，例如，該活動能否有效地培養學生某些知能，或該活動能否提供某些他們希望學生經歷的歷程，或該活動具有的功能。

編碼系統含有 8 個類別，分別代表職前教師選擇教學活動時，可能考量的 8 個面向。每個職前教師的回答可以得到 2 位數的編碼，個位數值代表職前教師考量中出現的面向，十位數值代表其考量的恰當性。當職前教師的考量有第 1～7 類的面向時，本研究會給予職前教師出現該面向的編碼，舉例來說，若職前教師出現「語句的部分理解較易，且有助於整體語句理解」的面向，則本研究給予其編碼的個位數值 1；若經由考察，發現該職前教師的教學主體為數學語言，且其考量對其所選擇的教學活動來說，是恰當的，則本研究給予其編碼的十位數 1 這個數值，得分 0.5 分，其他情況，例如該職前教師的數學主體為數學概念，則本研究給予其十位數編碼 7，得分 0 分。另外，第 8 類表示職前教師僅考量教數學概念而沒有其他考量，此類職前教師會獲得的編碼為 77。

為了能更貼切地描述職前教師所指涉的因素為何，本研究根據質性研究的想法，直接引述職前教師的用詞來描述每個因素的內涵（quotations; Patton, 2002），在引號中不同字形者為職前教師的實際描述，以下為編碼系統中的 8 個類別（面向）。

(1) Code 0：數學語言知能

有些職前教師在思考教學活動的有效性時，浮現出「數學語言知能」這個主題，他們可能連結到學生關於數學語言知能的具備情形，或是連結到應該培養學生的數學語言知能。

理解文字敘述之數學語句的能力

職前教師在考量教學活動之有效性時，關注到學生對於文字敘述為主之數學語句的理解能力，認為學生「對於一整串文字敘述的解讀能力很弱」（#TW11510141），而一個有效的教學活動要能"help the students to read a mathematical text" (#US13420105)，"teaches students to extract meaning from statements" (#US12820114)，進而"learn to understand what the statment[statement] means" (#US12120105)。

轉化文字敘述之數學語句為數值、符號的能力

職前教師認為「學生對於文字化成符號的過程較弱，因此學生可能只是看不懂敘述，而非缺乏此概念」(#TW90010110)，故而，有效教數學語言的活動，要能幫助學生"be able to translate what they read into symbolic mathematical notation" (#US31920105)，或「化為數字」(#TW11410143)。

拆解文字敘述之數學語句的能力

在數學語言能力這個主題類別中，「拆解」這個標籤的浮現來自美國職前教師提供的理由，他們認為有效的數學語言教學活動要讓學生"learn to <u>decompose</u> problems" (#US10250102)、"be able to <u>break down</u> definitions to understand what it is saying" (#US13420101)。

使用數學語句的能力

使用數學語句的能力亦是職前教師提供之理由而浮現的子類，他們認為有效的數學語言教學活動要能讓學生"reinforces the use of math vocabulary words" (#US13420101)、"be able to properly utilize the statement"

(#US12120105)，包含“verbalize” (#US10130109)及“writing” (#US10730121)的能力。

(2) Code 1：語句的部分理解較易，且有助於整體語句理解

部分職前教師在思考數學語言教學活動的有效性時，考量到數學語句的部分、整體與學生學習的關連，他們的想法可歸納為兩個子類。

語句的部分對學生而言較容易理解

職前教師認為將語句「拆開說明」(#TW11510107)的教學活動是有效的，因為對學生而言，拆解後的語句，可使他們“focus on problem one part at a time” (#US11410131)，以「理解每個部份[分]的意義」(#TW11610153)，如此，「比較起一口氣看完一句長的中文來得清楚易懂」(#TW90810103)，也“less overwhelming” (#US32320109)。

理解語句的各部分有助於理解整個語句

與上一個子類類似的，職前教師認為拆解語句的教學活動是有效的，他們認為「每一小部分先弄懂再加以組合會比較容易」(#TW11410162)，相較於上一子類，這個子類浮現出新的主題，他們的思考中，強調了部分語句與整體語句的關連，部分語句理解後，再「整合」(#TW90810104)、「組合」(#TW11410162)、「串連」(#TW91010105)、“put them back together” (#US32930111)，進而能“understand the entire statement” (#US15810103)。

(3) Code 2：數學語言的特徵

職前教師在思考數學語言教學活動的有效性時，連結到的文字敘述之數學語句特徵主要有以下三類。

長

職前教師所描述之數學語言特徵，第一類為「長」(#TW90510105)、「太長」(#TW90810104)、「冗長」(#TW11410159)、“lengthy” (#US13420109)等。他們在思考教學活動的有效性時，考量到「太長的敘述，造成學生理解的困難」(#TW90410111)。

複雜

職前教師所描述之第二類數學語言特徵提及“the complex statement” (#US12210101)、「文字敘述的複雜性」(#TW90910103)，他們認為學生「看不懂敘述可能是句子太複雜」(#TW11510107)。然而，這些職前教師所論及的「複雜」所以確切意義為何，還需進一步探討才能得知。

抽象

職前教師所描述之數學語言特徵，第三類為「抽象」(#TW11410154)，他們認為「學生之所以看不懂，乃是文字太過於抽象化」(#TW113101013)，故而，有效的數學語言教學活動應「將抽象的文字具體化」(#TW11410146)，因為“It is easier for students to go from concrete to abstract than trying to teach them only the abstract” (#US11720130)。

(4) Code 3：連結文字敘述之數學語句與其他數學表徵

有些職前教師思考數學語言教學活動何以有效的理由時，浮現出「連結」這個主題。他們在敘述中使用「聯結」(#TW90010110)、「對應」(#TW11810104)、「對照」(#TW11410169)、「配合」(#TW11510158)、「結合」(#TW11410172)、“relate” (#US13420109)、“connect” (#US12210101)、“correspondence” (#US11520109)等詞彙。職前教師考量的可能是幫助學生建立文字敘述與其他表徵的連結，或是他們認為在課堂中展現文字敘述與其他表徵的連結有助於學生理解數學語句。

文字敘述之數學語句與符號的連結

部分職前教師認為在數學語言教學活動中，應該「把文字與符號作連結」（#TW11410125）或“take the statement and relate it to the expression” (#US13420109)，將可“build internal connections between the words and their meaning in math symbols” (#US12730101)，而使得教學活動能幫助學生理解語句或建立連結。

文字敘述之數學語句與數值的連結

部分職前教師認為有些教學活動之所以有效，乃是因為活動中使學生“look at the statement and actually substitute in number to help them see whats[what's] going on helps them make the connection” (#US14620105)，即「把敘述和數值連結」（#TW11410101）。

文字敘述之數學語句與運算動作的連結

臺灣職前教師的資料中，浮現出另一個主題，職前教師認為有些教學活動之所以有效，是因為活動「幫助學生對文字敘述與實際運算做連結」（#TW11510106），「一個文字對一個動作」（#TW11410169）。這類職前教師的想法中，聚焦的是語句與運算動作、數學操作過程的連結，而操作的對象是符號或數值，則不是他們所強調的。

(5) Code 4：其他數學物件幫助文字敘述之數學語句之學習

分析、歸納職前教師的理由時，浮現出職前教師的一個想法，他們認為其他非數學語句的數學表徵，能幫助學生理解文字敘述之數學語句。這個類別的浮現，最初來自美國職前教師每每使用“help”這個字彙，形成類別之後，字裡行間透露著相近意義的資料也進入此類別中。

數值實例是職前教師認為相當能幫助學生理解數學語句的一類數學物件，他們認為應該「用數字取代文字，易懂，再由數字去理解文字」（#TW11810104），因為他們“believe that typical students learn best by seeing examples of the actual statements… the students can see how they can just plug values in to the statement, and then it starts to make sense when simplified.” (#US13220119)，而且「用數值式子讓學生比較快瞭解敘述」(#TW90410111)。

也有職前教師認為符號也能幫助學生理解語句，例如，#US10250106 提到“students need to see a concrete examples of words in math. Sometimes the most concrete example you can give them are numbers and symbols”。

(6) Code 5：教與學的方法或過程

分析職前教師的資料，浮現出一個職前教師考量的面向，有些職前教師在思考教數學語言之教學活動的有效性時，會考量其中教師教學或學生學習的方法，以及他們進行的活動過程。以下是這個面向中所歸納而得的幾個主要子類。

學生主動學習、自行操作

職前教師考慮教學活動是否「讓學生自己嘗試，自己體會」(#TW11910113)，包含“explore … own[on] there[their] own” (#US11820107)、“self-discovery” (#US10330105)、“thinking for themselves” (#US10730109)、“reason … on their own” (#US10130117)。“These are much more constructivist approaches” (#US32350102)，過程中，「學生自己操作，一步步…建構出來」(#TW90810104)。而#US11130125 的說法，更為職前教師為何有此考量提供一個很好的詮釋，

> “I think that the more the students can work with it themselves, the more they will own it. It is easy to watch someone else do something on the board, but to work through it themselves will allow them to grasp a better understanding.” (#US11130125)

教師引導

部分職前教師關注到教學活動中教師的角色，教師在教學活動中，是否“guiding students” (#US12730101)，是否“take them step by step” (#US12520101)，他們認為「帶學生一步步做，學生較容易了解」(#TW11710108)，而「逐步引導學生，可增加其思考力」(#TW11510107)。

瞭解學生學習情形

此一子類是由臺灣職前教師的資料中浮現出來的，他們認為有些數學語言教學活動之所以有效，乃因活動具有「測試學生是否明白」(#TW11610150)的功能，教師透過這些活動，「可以看出學習的盲點，看看他們是在哪一個環節開始出錯」(#TW11610116)。美國的資料並沒有出現這個子類，呈現出臺灣職前教師相較於美國可能更重視形成性評量，隨時在課堂中掌握學生的學習情形。

(7) Code 6：學生的情意面向

臺灣職前教師思考數學語言教學活動之有效性時，會考量學生的情意面向，這是美國的資料所沒有浮現的面向。

職前教師考量教學活動中，學生可能會有「恐懼」(#TW90010102)之數學焦慮現象。也提及學生的學習態度，例如，「看敘述會讓學生有排斥感」(#TW11810117)，或學生的數學學習態度，例如，「學生通常沒有耐心看完整段文字」(#TW11610125)、而「帶學生一步步看，會使學生耐心看完」(#TW11910112)。

(8) Code 7：數學概念

由職前教師提供何以教學活動有效的理由中，浮現出「數學概念」這個面向，雖然題目情境中，職前教師被要求考量的有效與否是針對教數學語言，但職前教師仍常連結到學生關於數學概念或算則（$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$）

的理解。然而，值得注意的是，本研究也發現，有些職前教師僅聚焦於概念，以下為部分職前教師的敘述，提供我們此現象的樣貌。

#US11130121 提出"Students need to work with examples to better understand the major concepts"，他認為提供實例有助於學生理解，然而，尤其敘述看可出，要被理解的對象是概念，而非數學語句。

#US13540108 提出"The concept as a whole can be very intimidating to students. So taking it apart and showing that working through the problem piece by piece is from previous taught work"，他論及部分的理解有助於全體的理解，然而，他考慮的對象是概念，而非數學語句。

#TW11610134 提出「由學生分組自行討論，老師從旁引導，讓學生自行發現運算的規則」，他論及教與學之方法與活動的面向，但該活動的目標是學習算則，而非數學語句。

3. 臺灣、美國的表現

前一節中，本研究根據職前教師對本題的回答進行歸納分析，得到他們提供活動何以有效之理由時，所考量的各面向，表 4.2.13 呈現這些面向的主題（theme; Patton, 2002）、概述或例子，以方便後續分析與描述。

圖 4.2.5 顯示臺灣、美國的職前教師出現個面向的百分比。前 5 個面向與數學語言相關，出現這幾個面向的職前教師，在選擇要教數學語言的教學活動時，考量到數學語言；臺灣、美國各有 52%、48%的職前教師至少出現這幾個面向之一，兩個國家的比例並無顯著差異（$p = .59$）。個別面向來看，兩個國家的比例僅在「數學語言特徵」有顯著差異，臺灣有較高比例的職前教師提供理由時，能主動考量到數學語言所具有的特徵（臺灣：17%；美國：4%；$p < .01$）。然而，與職前教師在 MFE706(d)的情況類似，考量到數學語言特徵的職前教師，提到的皆為較一般性、描述性的的特徵，

例如，複雜、冗長等，這些特徵較難用以實際執行對語句的分析，與文獻中所提及的語法結構複雜、物件關係複雜等不同。

表 4.2.13　職前教師關於數學語言教學活動之有效性的考量面向

主題	概述或例子
數學語言知能	例如，將文字表徵轉換為數字或符號的能力；使用或理解數學語言的能力。
部分全體關係	例如，了解各部分之意義有助於了解整句連結起來之意義。
數學語言特徵	描述敘述中的數學語言特徵，例如，抽象、複雜、冗長等。
數學物件連結	描述數學語言與其他數學物件的連結，例如，文字敘述與實際數值、式子、數學符號等的連結。
數學物件支持	描述其他數學物件，例如，實際數值，有助於文字敘述數學語言的理解。
教學方法過程	提及關於教或學的方法或過程，例如，瞭解學生想法、學習情形；教師引導；學生主動學習。
情意	提及學生的情意面向，例如，學習語句的耐心。
數學概念	聚焦於數學概念或算則的理解（$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$），而非數學語言。

圖 4.2.5 顯示，考量到教學方法過程的職前教師，臺灣與美國各有 26%、18%，兩國並無顯著差異；兩國考量到情意面向的職前教師比例亦無顯著差異，且比例皆相當低，美國並無任何職前教師在考量教學活動的有效性時，考量到這個面向。

圖 4.2.5 也顯示，臺灣有相當高比例的職前教師在判斷教學活動何以對教數學語言有效時，考量到數學概念。本研究對此進行進一步探討。

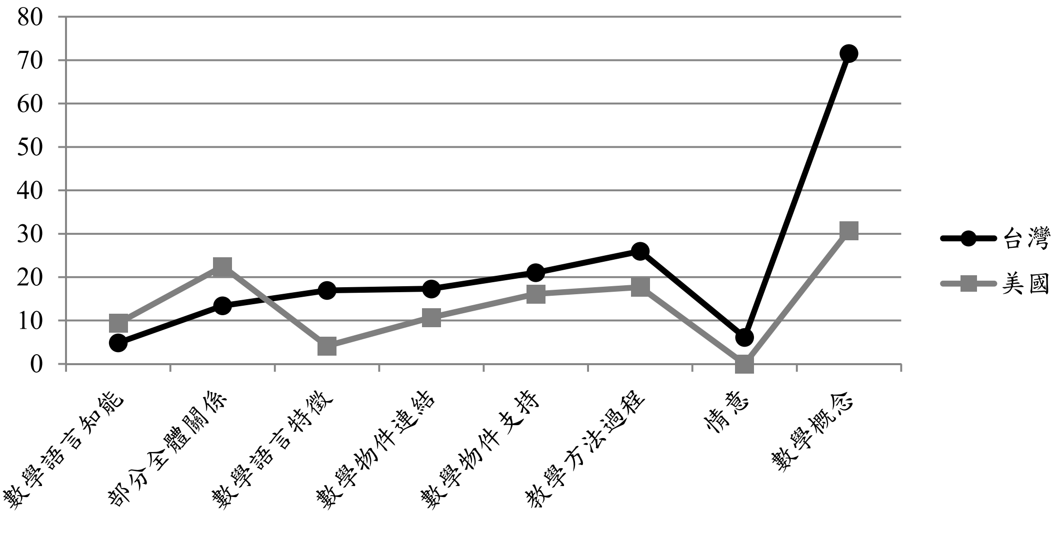


圖 4.2.5 職前教師關於數學語言教學活動有效性的考量面向百分比

本研究針對職前教師選擇教學活動B～E時,所提供的理由進行分析，發現臺灣、美國各有 59%、24%的比例所考量的面向（以教學活動數計），僅有數學概念。這表示部分職前教師選擇的雖然是與培養數學語言能力相關的教學活動，但其考量的其實是學生關於數學概念的學習，而非數學語言的學習。臺灣的比例顯著高於美國（$p < .01$），這顯示臺灣的職前教師在考量教學活動時，較美國的職前教師不容易聚焦於數學語言，較容易限於數學概念。培養學生的數學語言能力是相當重要的，臺灣職前教師不易以數學語言為教學活動之考量的情況，很可能會影響他們對學生的培養。

本研究針對理由的恰當性給予職前教師的回答得分，同一面向的理由可能正確，也可以不正確。以「數學語言特徵」這個面向為例,「學生之所以看不懂，乃是文字太過於抽象化，若實際代入數字，比較容易了解意義」與「因為這句十分抽象，直接用實際例子代入，再導入一般化的觀念較快」皆提及數學語言的特徵「抽象」,但前者為本研究認為恰當的理由，給予 0.5 分，但後者則因職前教師的思考中，聚焦於數學概念的教學，因而本研究認為並非恰當的理由。表 4.2.14 呈現臺灣、美國的答對率。

表 4.2.14　「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」之答對率

	臺灣	美國	分數差異
答對率	26% (3.0%)	39% (5.3%)	-12%*

註：括號中的數值為標準誤。
$^{*}p < .5$。$^{**}p < .1$。

兩個國家的答對率都相當低，可見得兩個國家中，多數職前教師具備「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」這項教學能力的情況並不完善，而臺灣顯著低於美國的情況，值得臺灣師資培育界思考。

三、數學語言相關數學教學能力總論

（一）兩種運算：執行 VS 推理與判斷

本研究計算兩個國家在執行、推理與判斷兩種運算的平均答對率，如表 4.2.15 所示。無論在執行上或在推理與判斷上，臺灣的答對率顯著高於美國。而無論臺灣或美國，職前教師都在執行上比推理與判斷上答對率高，這表示，職前教師能選擇該教哪些數學語言、使用怎樣的數學語言、採用怎樣的數學語言教學活動，然而，他們對於為何要採這樣執行的背後原因或相關因素，例如，學生理解數學語言的情況、一個教數學語言的活動為何有效等，沒有辦法描述，因為他們所具有的為無聲的、實踐的知識（practical knowledge; Schön, 1983）。

表 4.2.15　「推理與判斷」及「執行」之答對率

	臺灣	美國	國家差異
執行	78% (2.1%)	68% (0.7%)	11%**
推理與判斷	38% (2.4%)	30% (0.7%)	9%*
運算差異	40%**	38%**	

註：括號中的數值為標準誤。
$^{*}p < .5$。$^{**}p < .1$。

（二）各項數學語言相關教學能力

表 4.2.17 呈現兩個國家之各教學能力答對率經過中位數平滑化分析（median polish analysis）後的結果。從各國在各能力的殘差（residual）來看，考量能力效果及國家效果後，臺灣職前教師相對於美國職前教師，在「能選擇應教給學生的數學語言」及「能判斷影響學生理解數學語言的因素」等教學能力上發展得較好，這些能力可視為是與學生認知相關的能力，前者涉及培養學生什麼題材，後者涉及考量學生面對題材的運思。這與 Blömeke et al.（2008）所發現臺灣的教師教育重視培養職前教師與學生認知有關的能力不謀而合。

而美國職前教師相對於臺灣職前教師，則在「能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動」、「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」等教學能力上發展得較好，這些能力乃與教學活動相關，前者涉及教學活動的選擇，而後者涉及選用這些活動的理由是否恰當。

表 4.2.17　各教學能力答對率之中位數平滑化結果

	臺灣	美國	能力效果
能選擇應教給學生的數學語言	6	-6	17
能選擇應教給特定數學程度學生的數學語言	-2	2	34
能使用學生可以理解的數學語言	2	-2	-3
能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動	-7	7	3
能判斷影響學生理解數學語言的因素	8	-8	-25
能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素	-12	12	-28
國家效果	6	-6	60

（三）根據情境主動連結的能力

從表 4.2.17 的能力效果來看，可看出職前教師在六個教學能力中，以「能判斷影響學生理解數學語言的因素」、「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」的表現較差。在這兩個能力的探測題目中，職前教師必須進行主動連結，自己由題目情境中去思考、連結、判斷可能影響學生理解數學語言的因素，或教學活動有效的原因，這樣的思考歷程的確是困難的，然而，在實際課堂中，數學教師必須從情境中建構出問題，並加以解決，問題不會像數學中的已知條件一樣展現在他們眼前（Schön, 1983），他們必須自己連結、判斷學生對教師所用數學語言的理解情況、學生不理解的可能原因為何，也必須決定要進行怎樣的教學活動來教數學語言、判斷這樣的教學活動對學生學習的影響為何，而教師往往必須自己在瞬時間根據現況，在腦中主動連結相關的經驗、知識、概念，做這些判斷與決定，並沒有選項列表供其選擇，因此，無論對臺灣或美國，提升其職前教師主動連結、思考的能力皆相當重要。

（四）分析數學語言特徵的能力

前述分析發現，職前教師能主動提出的數學語言特徵，都是較為描述型的特徵，例如，抽象、冗長、複雜等，並沒有職前教師能做更深入的分析，考量語句的組成，主動提出例如，考量語法結構的複雜度、數學語彙間關係的複雜度、大量名詞化等特徵，他們分析數學語言特徵的能力仍須培養。針對臺灣的職前教師，本研究進一步以以下題目探測他們判斷數學語言特徵的能力（佔本研究中臺灣樣本的一半），

題幹：

一般而言，課本中描述「垂直平分線性質」的敘述是：

「$\overline{AB}$ 的垂直平分線 L 上任意一點 P 到 A、B 的距離相等」

吳老師教完這個性質後，班上仍有許多學生無法理解這個敘述。你認為學生無法理解的**最主要**原因是什麼？請勾選**四項**。

臺灣職前教師的答題情況如表 4.2.18 所示，可發現關於選項 A、C、D、F 等文獻中常提的重要數學語言特徵，皆有超過 50%的職前教師勾選，顯示出這些臺灣職前教師雖然不能主動提出，但能判斷該語句具有此特徵，而此特徵會造成學生無法理解。並且，幾乎所有臺灣職前教師皆判斷學生無法根據此語句建立圖形表徵或心像。職前教師需要有更多接觸此類數學語言特徵的機會，在腦中建立更強的連結，以期能在實際教學中，主動連結這些數學語言相關知識，對課堂中出現的數學語言進行分析與判斷。

表 4.2.18　臺灣職前教師在各數學語言特徵的勾選率

選項	勾選率
A. 語句中的語法結構複雜*	55% (6.1%)
B. 學生看不懂「P 到 A、B 的距離」	19% (4.3%)
C. 語句中各數學語彙彼此間的關係複雜*	68% (4.9%)
D. 在很短的句子中給出很多訊息*	60% (4.8%)
E. 學生不知道垂直平分線的定義	34% (5.4%)
F. 學生無法根據此語句的敘述建立出正確的圖形表徵*	93% (2.7%)
G. 學生不夠瞭解距離的概念	13% (3.7%)
H. 學生缺乏「任意一點」的概念	58% (3.4%)

註：括號中的數值為標準誤。有*的選項為本研究視為正確之選項。

第五章　結論與建議

第一節　結論

一、數學語言相關教學思維

（一）職前教師對文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制之思維

職前教師的思維中，認為文字有其系統，以一種邏輯的方式組織在一起。從數學語句的組成成分來看，職前教師注意到文字敘述有數學專門詞彙,而這些數學專門詞彙會對學生理解造成影響。從數學語句的特徵來看，職前教師能連結到對文字敘述之數學語句的特徵，但為較描述性、整體性的敘述，例如，抽象、嚴謹，精簡、冗長、一般化等，並不是數學教育文獻中提及可用以操作、分析的數學語言特徵，例如，語法結構複雜、數學物件關係複雜等。他們對數學語句特徵的思考，乃是一種整體的感知，沒有能力拆解語句中的部分或數學物件來分析。

職前教師在思考學生學習文字敘述之數學語句時，思維中會連結其他表徵，進行關連或比較，思考，有些職前教師認為其他表徵能幫助文字敘述的學習，也有職前教師認為學生與文字敘述相關的能力（可能是理解，也可能是使用），和與「式子、符號」相關的能力，是彼此競爭的，互相消長的。有些職前教師思考學生學習文字敘述之數學語句時，進一步連結到學生必須在腦中進行文字敘述表徵與這些表徵間的轉換，或從語句產生心像，以理解文字敘述。

在思考學生學習文字敘述之數學語句時，有些職前教師在思維中會連結到學生的數學語言相關知能，認為學生必須先能理解、學會數學語彙，必須具備分析語句、拆解語句的數學語言知能，才能理解文字敘述之數學語句。有些職前教師思維中則是連結到學生的數學能力、與數學的特質有

關的能力（抽象思考能力、邏輯思考能力等），也有職前教師連結到的是較為一般性的能力（例如，理解能力）、先備知識等。

有些職前教師認為語文相關能力加上數學相關能力，即可理解文字敘述的數學語句，他們很可能沒有 Niss（2003）所提出「處理和操弄數學語言的能力」（the ability to deal with and manage mathematical language）的思維。

另外有少數職前教師的思維連結學生情意、學生的學習類型，認為這些學生的這些面向會影響他們對數學語言的理解與學習。

職前教師用詞的侷限與精準度的缺乏，表示他們數學教育的專業用語（technical langauge）的缺乏，從 Skemp（1987）的說法來看，當職前教師關於數學教育的概念能與承載它的語言連結，語言便成了這個概念的標誌與把手，供職前教師選取、操縱他們的概念，職前教師也才能自由控制自己思想、與他人溝通，故而，發展其數學教育的專業用語的使用能力是重要的，此外，此類用語反映著他們在師資培育中所受到的培養與師資培育對他們的影響（Blömeke et al., 2008），職前教師無法使用這些語言的情況值得師資培育界思考。

（二）職前教師對學生知能、教學活動、文字敘述數學語句在教學中的機制之思維

有些職前教師在思考如何教文字敘述之數學語句時，思維連結到數學語言特徵，例如，抽象、冗長、複雜、一般化等，與職前教師在思考學生學習數學語言時的情況類似的，他們思維中所連結到的文字敘述數學語句的特徵，皆偏向描述性質，而比較不具可用以分析的操作性。他們分析數學語言特徵的能力仍須培養。

有些職前教師的思維連結到學生的語言能力，他們在思考如何教文字敘述之數學語句時，考量到學生身上所具備的語言能力，但為一般語言的

能力，並非針對數學語言，與職前教師在思考學生學習數學語言時的情況類似的，這些職前教師對這兩種能力的差異可能沒有覺察，當他們沒有覺察這兩種能力的差異時，他們很可能並不能意識到要培養學生的數學語言知能。

有些職前教師思維連結到數學語句的組成成分，他們也覺察到學生認識或使用數學詞彙是必須進行教學的，若教師在教學中對學生進行數學語彙的教學，乃是對學生數學語言知能的培養。另外有些職前教師思維連結到應在教學活動中培養學生數學語言知能，例如，應該教學生學習如何拆解一個數學語句，轉換文字敘述與其他數學表徵的能力，這是屬於心理型的能力，將來學生能在面對其他數學語句時使用的，然而，僅有相當少數的職前教師能連結到此類思維的連結。

有些職前教師認為教學活動中應該將語句拆解，他們的思維連結到學生難以了解整個敘述，學生較容易理解語句的部分，當部分理解後，可以促進整個語句的理解。這些職前教師的部分，思維更細部地考量到語句中各詞彙間組成的關係是什麼，這也代表著語句中數學物件間的關係是什麼，若他們能在教學活動中讓學生學習去觀察、分析這些關係，則學生將可能培養將來可以在面對其他語句時使用的數學語言知能，而這是屬於心理型的知能，不僅是知識型的。其他職前教師雖然沒有連結到語句物件間的關係，但其教學中會將語句拆解，也將提供學生學習實踐的知識之途徑（Schön, 1983）。

有些職前教師認為可在教學中進行文字敘述與其他數學表徵的連結，如此可幫助學生學習文字敘述或數學概念，也有些職前教師認為相對於文字敘述，符號式子和數值實例對學生而言較容易理解，應以其他數學表徵來幫助學生學習。

另外有些職前教師思維連結到課堂中教與學的方法或過程，部分認為教學活動應讓學生在學習過程中，自行進行運思、數學物件的操弄，以建

構知能，部分則強調教師引導的必要性，另外，臺灣有些職前教師認為教學活動應能讓老師在其中藉機會檢核學生學習情況。也有少數臺灣職前教師思維連結到學生的情意面向。

值得注意的事，無論臺灣或美國，都有些職前教師在思考教文字敘述之數學語句的教學活動時，思維聚焦於數學概念的教學，而非以數學語句為教學主體。對他們而言，以數學語句為思考的主體並不容易，他們實際到教學場域中，必須能自己從情境中建構問題與解決問題（Schön, 1983），故而很可能不會注意到此類文字敘述之數學語句是需要進行明確教學的，也可能不會有需要培養學生數學語言能力的想法。

與前述報導職前教師對文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制之思維的情況相同，有些職前教師在呈現他們關於數學語言之教學的思維時，用詞並不準確、頗為侷限，會使用一些一般性的、指涉較為廣泛的、日常的詞彙，他們數學教育專門詞彙不足，或缺乏這些詞彙所承載的數學教育概念。

（三）職前教師對學生知能在文字敘述數學語句之組成與特徵的機制之思維

從職前教師改寫的語句來看，他們會將語句中表示運算結果的名詞改為表徵運算動作的詞彙，如此，學生在腦中處理這個詞彙時，可能會有操作的程序，其中有些職前教師將有複雜的名詞化特徵之語句轉為一連串運算動作的複合，來降低語句的難度；他們改用較為口語化的詞彙，減少數學專門用語的使用量；他們改寫的語句中，帶有新訊息的詞彙變得一個一個逐步出現，減緩了語句進展的速度；此外，他們會在語句中，提供了學生「具體」的物件以供學生操作、運思，他們認為如此將是學生比較容易理解的語句。

職前教師認為具有上述特徵的語句學生較容易理解，然而，對照職前教師關於「文字敘述表徵與學生知能在學習上的機制」、「學生知能、教學活動、文字敘述為主的數學語句在教學中的機制」的思維，職前教師在思維歷程中所連結的概念、知識，為無聲的、實踐的知識（Schön, 1983）。

有些職前教師的改寫會使得一個表示數學物件關係的文字敘述，失去運算的意涵，變成僅對外在表徵上需要呈現成某個「長相」的描述；或是使得語句等式的結構感降低，改寫成一個解法流程。職前教師的改法若僅能提供給學生在外在表徵上呈現的運算步驟或結果，而不在培養學生學會該算則的一種文字敘述表徵，並不是恰當的。這些職前教師改寫時，思維中或許沒有覺察到這樣的改寫對培養學生數學語言知能幫助並不大。

有些職前教師所改寫的語句會省略一些詞彙，他們可能沒有覺察他們的改寫使得指涉的對象不清，可能造成學生理解困難。相反的，有些職前教師將語句改寫切成多個部分，並使用許多主題訊息語詞（thematic; Laborde, 1990），使得語句進展速度變得頗為緩慢，根據 Laborde（1990），進展速度過慢的語句，也會造成學生的理解困難。

有些職前教師改寫數學語句時，對其中的數學精準度與嚴謹度會較放鬆，例如省略正數的正，或正平方根的正。另外有些職前教師甚至改寫出語義不完整的式子，例如，「兩個正數的平方根乘積等於兩正數開平方根」（#TW11710104）這樣的語句。

臺灣職前教師所使用的語句，會傾向於客觀的、外在物件的陳述，而美國職前教師則常會將執行運算的主體置入描述中，他們常會在語句中放入“you”、“we”、“I”等詞彙。

有些職前教師對於詞彙的改寫情況並不穩定，對於相同的詞彙，他們有時候修改，有時候則不修改，他們很可能是隨著語句各部分給他們的刺激而連結的思維來改寫，而他們的連結並不是穩定的。

二、數學語言相關數學教學能力

（一）關於臺灣、美國職前教師的數學語言相關數學教學能力，臺灣在運算「執行」及「推理與判斷」的相關能力上，都較美國優異。

（二）無論臺灣或美國的職前教師，都在數學語言相關數學教學能力的培養上，以「執行」發展得較好，而在「推理與判斷」上表現較差。他們可以執行，但卻不能描述他們基於什麼理由執行。這由職前教師在使用學生可理解之數學語言的能力，比考量影響學生理解數學語言之因素的能力好，且較能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動，而較不能分析、提供教學活動有效的理由，由此來看，職前教師可以使用恰當的數學語言或教學活動，但對於為何恰當，卻無法言明。根據 Schön（1983），此類無聲的、實踐的知識，乃是來自職前教師的經驗（experience）與反思（reflection），而職前教師的經驗包含了他們身為學生與身為職前教師的經驗，也包含他們在師資培育學程中的經驗。

（三）進一步從相對的角度來看兩個國家在各教學能力的表現，即考量整體參與者在各教學能力的不同表現（能力效果）及兩國整體教學能力的不同表現（國家效果）下，相對於美國職前教師，臺灣職前教師在「能選擇應教給學生的數學語言」及「能判斷影響學生理解數學語言的因素」等與學生認知相關的教學能力上發展得較好。而美國職前教師相對於臺灣職前教師，則在「能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動」、「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」等與數學語言教學活動相關的教學能力上發展得較好。

（四）臺灣職前教師在「能選擇應教給學生之數學語言」的數學教學能力上，較美國具備。美國有較高比例的職前教師選擇教給學生文字敘述與符號式子兩種數學語言，或是選擇教結構複雜的文字敘述而不

需教程序性較強的符號式子，而臺灣則有較高比例的職前教師選擇兩種數學語言都教給學生。

（五）關於「能選擇應教給數學程度較差學生的數學語言」之數學教學能力，臺灣、美國皆多數職前教師具備。然而，美國有較高比例的職前教師選擇兩種數學語言都不教給程度較差的學生，但臺灣有較高比例的職前教師選擇該教學生程序性較強、與後續學習關連性強的式子表徵。

（六）關於「能判斷影響學生理解數學語言的因素」這項數學教學能力，臺灣雖然比美國優異，但平均來說，具備的職前教師仍只有約一半。

分析哪些因素影響學生理解數學語言時，絕大多數美國職前教師缺乏由數學語言的角度切入的能力。臺灣能從數學語言角度切入的職前教師比例較美國高，但相較於台灣能從學生因素切入的比例，則少了很多。由此來看，臺灣職前教師從數學語言角度切入分析影響學生理解數學語言之因素的能力可再培養。

（七）臺灣在「能使用學生可以理解的數學語言」的數學教學能力顯著比美國優異，有較多職前教師在需要時能使用較程序性、較口語化的語言。

（八）關於「能選用可以提升學生理解數學語言之能力的教學活動」這項數學教學能力，臺灣與美國職前教師的表現從答對比例來看並無顯著差異。然而，針對可以幫助學生在將來面對數學語句時，能拆解語句，觀察以及判斷組成成分間關係的教學活動，相較於美國，臺灣選用此類教學活動的職前教師比例較低。

（九）關於「能判斷影響數學語言教學活動之有效性的因素」這項教學能力，平均來說，兩個國家職前教師的具備情形皆不甚佳，但臺灣職前教師的表現又比美國更差。

臺灣、美國各有 59%、24%的比例即使選擇適合教數學語言的教學活動，所考量的面向也僅有數學概念。臺灣的職前教師在考量教學活動時，較美國的職前教師不容易聚焦於數學語言，較容易限於數學概念。培養學生的數學語言能力是相當重要的，臺灣職前教師不易以數學語言為教學活動之考量的情況，很可能會影響他們對學生的培養。

第二節　建議

一、關於教學

根據 TEDS-M 的研究結果，臺灣職前教師在數學知能、數學教學知能的表現上，皆顯著優於美國（謝豐瑞，2012a；謝豐瑞、王婷瑩，2012），然而，在數學語言相關教學能力中與教學活動相關的部分，臺灣的優勢並不復在。

臺灣職前教師在選用能培養學生數學語言知能的教學活動上，表現不比美國好。考慮教學活動的恰當性時，即使是以教數學語言為目的，仍常落於考量數學概念，而無法聚焦於數學語言。培養學生的數學語言能力是相當重要的，臺灣職前教師不易以數學語言為教學活動之考量的情況，很可能會影響他們對學生的培養。此外，關於影響學生理解數學語言的因素，臺灣仍有許多職前教師缺乏能由數學語言的角度切入之能力。這些都是值得臺灣師資培育界注意的訊息。在師資培育學程中，應該提供職前教師數學語言教學相關知識，以及實際分析的機會，以幫助他們培養出數學語言相關數學教學能力。

二、關於研究

本研究因人力、經費、時間等限制，在數學題材上的選擇上，僅較關注在代數領域，以幾何領域為數學題材的研究值得進行。

本研究為職前教師數學語言相關數學教學能力的初步探究，因此決定同時著重於職前教師思維的探索，使用開放性問題蒐集職前教師資料，以更瞭解職前教師思維中關於教學中的數學語言議題可能出現的面向。為此，能探測的數學教學能力數量也受到限制。目前，本研究已探得一些成果，獲得職前教師關於教學中數學語言一些想法、類別，未來的研究可參考這

些類別設計恰當的問題，以探測職前教師更多不同的數學語言相關數學教學能力。

參考文獻

中文

王仲春、李元中、顧莉蕾、孫名符（1995）。**數學思維與數學方法論**。臺北市：建宏出版社。

任樟輝（1996）。**數學思維論**。南寧市：廣西教育出版社。

伍謙光（1995）。**語義學導論**。湖南省：湖南教育出版社。

吳秀萍（2004）。**國中生對垂直、平行相關用語之理解研究**（未出版碩士論文）。國立台灣師範大學，臺北市。

李士錡（2001）。**PME：數學教育心理**。上海：華東師範大學出版社。

李宇明（1997）。**理論教育學教程**。武漢：華中師範大學出版社。

林福來（1997）。**教學思維的發展：整合數學教學知識的教材教法（I）**。國科會專題研究計畫成果報告（No. NSC 86-2511-S-003-025）。臺北市：臺灣師大數學系。

徐芷儀（1999）。**兩文三語: 語法系統比較**。臺北市：臺灣學生。

徐烈炯（1995）。**語義學**。北京市：語文出版社出版。

張春興（1998）。**張氏心理學辭典**。臺北市：東華書局。

教育部（2008）。**97 年國民中小學九年一貫課程綱要**。台北：作者。

陳仁輝、楊德清（2010）。臺灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。**科學教育學刊，18**（1），43-61。

陳新雄、竺家寧、姚榮松、羅肇錦、孔仲溫、吳聖雄等人（2005）。**語言學辭典**。臺北市：三民。

楊信彰（2005）。**語言學概論**。北京市：高等教育出版社。

葛本儀（2002）。**語言學概論**。臺北市：五南圖書出版股份有限公司。

謝國平（1998）。**語言學概論**。臺北市：三民。

謝豐瑞（2009）。**中學數學教師專業發展指標之研究-子計畫四：中學教師數學教學能力專業發展研究**。國科會專題研究計畫成果報告（NSC 96-2522-S-003-008-）。臺北市：國立臺灣師範大學。

謝豐瑞（2011）。**21 世紀數學教學跨國研究**。國科會專題研究計畫成果報告（NSC 96-2522-S-003-021-MY2）。臺北市：國立臺灣師範大學。

謝豐瑞（2012a）。中學數學職前教師之數學教學知能。載於謝豐瑞（主編），**臺灣數學師資培育跨國研究 Taiwan TEDS-M 2008**（119-142 頁）。臺北：國立臺灣師範大學數學系。

謝豐瑞（2012b）。臺灣不同培育模式之中學數學職前教師數學教學知能。載於謝豐瑞（主編），**臺灣數學師資培育跨國研究進階分析**（159-191 頁）。臺北：國立臺灣師範大學數學系。

謝豐瑞、王婷瑩（2012）。中學數學職前教師之數學知能。載於謝豐瑞（主編），**臺灣數學師資培育跨國研究 Taiwan TEDS-M 2008**（93-117 頁）。臺北：國立臺灣師範大學數學系。

謝豐瑞、楊志堅、施皓耀（2012）。中學數學職前教師在師資培育課程之學習機會。載於謝豐瑞（主編），**臺灣數學師資培育跨國研究 Taiwan TEDS-M 2008**（143-169 頁）。臺北：國立臺灣師範大學數學系。

西文

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical knowledge of middle school, mathematics teachers in China and The U.S.. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(2), 145-172.

Ball, D. L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barton, M. L., & Heidema, C. (2000). *Teaching reading in mathematics: A s*upplement *to "Teaching Reading in the Content Areas Teacher's Manual (2nd Ed.)".* Washington, DC: Office of Educational Research and Improvement.

Barwell, R. (2005a). Integrating language and content: Issues from the mathematics classroom. *Linguistics and Education: An International Research Journal, 16*(2), 205-218.

Barwell, R. (2005b). Language in the mathematics classroom. *Language and Education, 19*(2), 97-102.

Blömeke, S., Paine, L., Houang, R. T., Hsieh, F.-J., Schmidt, W. H., Tatto, M. T., Bankov, K., Cedillo, T., Cogan, L., Han, S.-I., Santillan, M., & Schwille, J. (2008). Future teachers' competence to plan a lesson: first results of a six-country study on the efficiency of teacher education. *ZDM Mathematics Education*, *40*(5), 749-762.

Bloomfield, L. (1933). *Language*. New York: Holt.

Bloomfield, L. (1939). *Linguistic aspects of science*. Chicago, Ill.: The University of Chicago press.

Boero, P., Douek, N., & Ferrari, P. L. (2002). Developing mastery of natural language: Approaches to theoretical aspects of mathematics. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 241-268). N.J.: Lawrence Erlbaum.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), 194-222.

Cankoy, O. (2010). Mathematics Teachers' Topic-Specific Pedagogical Content Knowledge in the Context of Teaching a^0, 0! and a÷0. *Theory and Practice, 10*(2), 749-769.

Capraro, R. M., Capraro, M. M., Parker, D., Kulm, G., & Raulerson, T. (2005). The mathematics content knowledge role in developing preservice teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Childhood Education, 20*(2), 102-118.

Carter, T. A., & Dean, E. O. (2006). Mathematics intervention for grades 5-11: Teaching mathematics, reading, or both? *Reading Psychology, 27*(2-3), 127-146.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1991). Some factors influencing the solution of addition and subtraction word problems. In K. Durkin & B. Shire (Eds.), *Language in mathematical education: Research and practice* (pp. 117-130). Milton Keynes: Open University Press.

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). The influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77*(4), 460-470.

Devitt, M., & Sterelny, K. (1999). *Language and reality: An introduction to the philosophy of language.* Mass: MIT Press.

Dewey, J. (1991). *How we think.* NY: Prometheus Books.

Durkin, K., & Shire, B. (1991). *Language in mathematical education: Research and practice.* Philadelphia: Open University Press.

Educational Testing Service (2010). *Mathematics: Pedagogy (0065)*. Princeton, NJ: Author. Retrieved from http://www.ets.org/Media/Tests/PRAXIS/pdf/0065.pdf

Ellerton, N. F., & Clarkson, P. C. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 987-1033). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Felbrich,A., Kaiser, G., & Schmotz, C. (2012). The cultural dimension of beliefs: an investigation of future primary teachers' epistemological beliefs concerning the nature of mathematics in 15 countries. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 44*(3), 355-366. doi: 10.1007/s11858-012-0418-x

Ferrari, P. L. (2004, July). *Mathematical language and advanced mathematics learning.* Paper presented at 28th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway.

Geertz, C. (1984). "From the native's point of view": On the nature of anthropological understanding. In R. A. Shweder & R. LeVine (Eds.), *Culture theory: Essays on* *mind, self, and emotion* (pp. 123-136). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Gough, J. (2007). Conceptual complesxity and apparent contradictions in mathematics language. *Australian Mathematics Teacher*, *63*(2), 8-15.

Hackett, K., & Wilson, T. (1995). *Improving writing and speaking skills using mathematical language.* Retrieved from ERIC database. (ED386747)

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning.* Baltimore: University Park Press.

Han, Y., & Ginsburg, H. P. (2001). Chinese and English mathematics language: The relation between linguistic clarity and mathematics performance. *Mathematical Thinking and Learning, 3*(2-3), 201-220.

Herbel-Eisenmann, B. A. (2002). Using student contributions and multiple representations to develop mathematical language. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(2), 100-105.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hsieh, F. J., Wang, T. Y., & Wu, X. P. (2008, July). *Understanding the teachers' use of sentences in mathematics classroom.* Paper presented at 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico.

Hsieh, F.-J., Lin, P.-J., & Wang, T.-Y. (2012). Mathematics related teaching competence of Taiwanese primary future teachers: Evidence from the TEDS-M. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 44*(3), 277-292. doi: 10.1007/s11858-011-0377-7

Koirala, H. P., Davis, M., & Johnson, P. (2008). Development of a performance assessment task and rubric to measure prospective secondary school mathematics teachers' pedagogical content knowledge and skills. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(2), 83-88.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* (J. Teller, Trans.), Chicago: The University of Chicago Press. (Original work published 1968).

Laborde, C. (1990). Language and mathematcis. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Language and comprehension* (pp. 53-69). New York: Cambridge University Press.

Lager, C. A. (2006). Types of mathematics-language reading interactions that unnecessarily hinder algebra learning and assessment. *Reading Psychology, 27*(2-3), 165-204.

Langacker, R. W. (1967). *Language and its structure: Some fundamental linguistic concepts.* New York: Harcourt Brace Jovanovich.

Learning Mathematics for Teaching. (2006). *A coding rubric for measuring the mathematical quality of instruction* (Technical report LMT1.06). Ann Arbor, MI: University of Michigan, School of Education.

Leech, G. N. (1974). *Semantics.* Harmondsworth: Penguin.

Leung, F. K. S. (2006). Mathematics education in East Asia and the West: Does culture matter? In F. K. S. Leung, K.-D. Graf, & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics education in different cultural traditions - A comparative study of the East Asia and the West* (pp. 195-211). New York: Springer.

Li, Y., & Ginsburg, M. B. (2006). Classification and framing of mathematical knowledge in Hong Kong, Mainland China, Singapore, and the United States. In F. K. S. Leung, K.-D. Graf, & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics education in different cultural traditions - A comparative study of the East Asia and the West* (pp. 195-211). New York: Springer.

Lightfoot, D., & Fasold, R. W. (2006). The structure of sentences. In R. W. Fasold & J. Connor-Linton (Eds.), *An introduction to language and linguistics* (pp. 97-135). New York: Cambridge University Press.

Marr, B. (2000, July). *How can they belong if they cannot speak the language? Enhancing students' language use in the adult mathematics classroom.* Paper presented at 7th International Conference on Adults Learning Mathematics, Medford, MA.

Mosteller, F., & Tukey, J. W. (1977), *Data Analysis and Regression*. Reading, MA: Addison-Wesley.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010). *Common core state standards for mathematics.* Washington D.C: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers.

NCATE/NCTM Program Standards (2003). *Standards for secondary mathematics teachers.* Retrieved from http://www.ncate.org/LinkClick.aspx?fileticket=ePLYvZRCuLg%3d&tabid=676

Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. In Gagatsis, A., & Papastavridis, S. (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education - Athens, Hellas 3-4-5 January 2003* (pp. 116-124). Athen: Hellenic Mathematical Society.

Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3rd ed.).Thousand Oaks, CA: Sage.

Perry, B., Wong, N.-Y., & Howard, P. (2006). Comparing primary and secondary mathematics teachers' beliefs about and mathematics teaching in Hong Kong and Australia. In F. K. S. Leung, K.-D. Graf, & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics education in different cultural traditions - A comparative study of the East Asia and the West* (pp. 21-46). New York: Springer.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms.* New York: Routledge.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics.* New York: Routledge.

Portner, P. (2006). Meaning. In R. W. Fasold & J. Connor-Linton (Eds.), *An introduction to language and linguistics* (pp. 137-168). New York: Cambridge University Press.

Raiker, A. (2002). Spoken language and mathematics. *Cambridge Journal of Education, 32*(1), 45-60.

Robins, R. H. (1997). *A short history of linguistics* (4nd ed.). New York: Longman.

Rubenstein, R. N., & Thompson, D. R. (2001). Learning mathematical symbolism: Challenges and instructional strategies. *Mathematics Teacher, 94*(4), 265-271.

Saenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998) Third Graders interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35*(2), 153-187.

Sapir, E. (1921). *Language: An introduction to the study of speech*. New York: Harcourt.

Saussure, F. D. (1966). *Course in general linguistics*. New York：McGraw-Hill.

Scheffler, I. (1997). *Symbolic worlds: Art, science, language, ritual.* New York: Cambridge University Press.

Schmidt W. H., Blömeke, S., Tatto, M. T., Hsieh, F.-J., Cogan, L., Houang, R. T., Bankov, K., Santillan, M., Cedillo, T., Han, S.-I., Carnoy, M., Paine, L., & Schwille, J. (2011). *Teacher education matters: A study of middle school mathematics teacher preparation in six countries.* NY: Teacher College Press.

Schön, D. A. (1983) *The reflective practitioner: how professionals think in action.* USA: Basic Books.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Silver, E. A. (1998). *Improving mathematics in middle school: Lessons from TIMSS and related research.* Washington, DC: U.S. Department of Education.

Siu, M. K. (2009). Mathematics education in East Asia from antiquity to modern times. In K. Bjarnadottir, F. Furinghetti, & G. Schubring (Eds.), *Dig where you stand: Proceedings of the conference on on-going research in the history of mathematics education* (pp. 197-208). Reykjavik: School of Education of University of Iceland.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics.* New York: Routledge.

Stigler, J. W., Gallimore, R., & Hiebert, J. (2000). Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures: Examples and lessons from the TIMSS video studies. *Educational Psychologist, 35*(2), 87-100.

Street, B. (2005). The hidden dimensions of mathematical language and literacy. *Language and Education, 19*(2), 135-140.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., Bankov, K., Rodriguez, M., & Reckase, M. (2011). *The teacher education study in mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics.* New York: Springer.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., …Holdgreve-Resendez, R. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries*. Amsterdam: Multicopy.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Rodriguez, M., Bankov, K., Reckase, M, D., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G., Dumais, J., Carstens, R., Brese, F., Meinck, S. (2009). *Teacher education study in mathematics (TEDS-M): Technical summary.* East Lansing, MI: Teacher Education International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Teubal, E., & Nesher, P. (1991). Order of mention vs order of events as determining factors in additive word problems: A developmental approach. In K. Durkin & B. Shire (Eds.), *Language in mathematics: Research and practice* (pp. 131-139). Milton Keynes: Open University Press.

Triandis, H. C. (1995). *Individualism and collectivism.* San Francisco: Westview Press.

Warren, E. (2006). Comparative mathematical language in the elementary school: A longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics, 62*(2), 169-189.

Willingham, D.T. (2005, Summer). Do visual, auditory, and kinesthetic learners need visual, auditory, and kinesthetic instruction? *American Educator, 29*(2), 31-35.

Wilson, S., Shulman, L., & Richert, A. (1987). "150 different ways of knowing":Representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers'thinking* (pp. 104-123). Eastbourne, England: Cassell.

Werner, H., & Kaplan, B. (1964). *Symbol formation: An organismic developmental approach to language and the expression.* New York: Wiley.

Zack, V. (1999). Everyday and mathematical language in children's argumentation about proof. *Educational Review, 51*(2), 129-146.

Zevenbergen, R. (2001). Language, social class and underachievement in school mathematics. In P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 38-50). New York: RoutledgeFalmer.

附錄一

職前教師 MFE706D 之回答

臺灣職前教師答案

編號	回答
#TW11210104	程度較好的學生，因為語言、理解程度較好。
#TW11210107	對函數有些許概念者，文字表達有些許抽象。
#TW11310101	國文程度（閱讀能力）較佳的學生。對文字敘述較有感覺
#TW11310108	對文字運用與理解能力較高，且具抽象思考能力的學生。用文字指述數學中的抽象概念，會使原本已經夠抽象的事物變得更加抽象，但學生若具備此能力則應教導。
#TW11410102	語言能力好且可進行較抽象思考之學生。因為第一步必須先解讀文字函意，解讀出來後，還要在腦海中形成文字所表達之心像。
#TW11410104	程度較高的學生或對文字敘述接受度高的學生。因文字敘述有一些數學語言包含在裡頭，如"唯一"，大部分學生不易抓住唯一的重要，也無法將文字敘述與 $f(x)=2x$ 視為有關的。
#TW11410114	能理解 A，C，D 三種表徵方式的學生。∵可以從中引導出文字表徵方式所想表達的概念。
#TW11410119	抽象思考能力較強的學生，因為光「對應關係」就是一個抽象的詞句，這不懂，其他的就更不用說了。
#TW11410121	程度不錯，觀念清楚的學生。這樣才不易被文字所惑，也能比較了解文字所說的意義。
#TW11410126	學生對於抽象思考能力較佳的，利用文字表徵方式較好，因為學生都能自行思考。
#TW11410128	中上程度。因為學生要有能力將文字化為數學，才能由「文字表徵方式」理解數學觀念，這通常有些許難度。
#TW11410134	抽象概念良好之學生。因他必須由文字中找尋重點字並重新組合理解，且若完全沒有輔以其他教學，可說是一

	段無意義文字。
#TW11410141	喜歡由定義下手，對文字的理解度好，重視嚴謹數學的人。因為定義在國中通常用文字表示，且簡潔，較其他表示方法嚴謹。
#TW11410144	抽象能力思考較好的學生。因為他可將文字順利轉換成自己可吸收的模式。
#TW11410150	程度中上的學生。“唯一一個”“給定任意一個 x”等等詞是中上學生較能感受到的。
#TW11410151	數學程度較佳，且對數學有興趣的學生，因為較能將文字抽象出數學概念，且能有耐心的閱讀、分析語句所表達的意思。
#TW11410157	國文程度、數學程度佳者 過於文字化
#TW11410158	高階一點的。或是在總結函數是講出來。
#TW11410167	抽象思考能力較好的學生，因為光憑文字敘述來教，一般學生可能無法理解。
#TW11410168	給數學理解較好的學生。相對於其它表徵，文字表徵的敘述（一種定義）較有總結的概念。
#TW11410175	程度較好的學生，對文字敘述理解力較好的學生。
#TW11510110	適合介紹給對集合有概念的學生，他們可以藉由文字說明，建立集合對應的關係。
#TW11510112	會將文字轉化成圖形之學生。∵會畫圖之學生可將清楚地藉由圖形來了解題目的需求。
#TW11510121	通常給程度較高，想像空間多的學生。文字式本身就不比圖解來的容易明瞭，學生須先就文字轉換成為數學語言，學習上較為緩慢，不適合中下程度學生。
#TW11510122	接受程度較高，且國文能力較好的學生。因為用文字會變得比較抽象，較難理解
#TW11510126	對數學有一定的程度，並且可以自我思考的學生，因為文字敘述較抽象，需要較多的思考和想像，才能將其具體化。
#TW11510130	數學理解力強。∵本身這句話要解釋起來很困難。
#TW11510137	“自己能”運用抽象想像力，先體會俱體例子（數子）再配合文字。
#TW11510139	程度較好且對中文語意清楚了解的學生。∵學生若能把中文語意轉換成數學語言的話，代表其對數學及此單元有相當程度的認識。
#TW11510146	基本國文程要夠好，數學能力也 OK 的人。因為數學再

	好，看不懂文字也沒有用，所以國文程度要有一定的水準，加上要有數學的清析的理念，那麼文字才容易懂。
#TW11510156	理解能力比較高的學生，因為文字敘述比較難想像，理解能力較差的學生可能無法想像。
#TW11510157	具備邏輯思考能力，能夠主動思考，學習的學生。以文字表示，沒有經過轉換，示例等方式，其概念很難真的理解，學生必須具備這個能力。
#TW11510163	介紹給文字敘述比較強的同學，因為他們可能會對數學式子及圖形比較沒感覺
#TW11510164	語文理解能力中上及數學程度中上的學生。因為語文能力較不好的學生對於解讀文字很吃力，所以不適合文字表徵的方式。
#TW11610101	程度好的。∵文字所描述的數學是抽象的意念，而無具體的表現，介紹給一般學生一定要配合例子。
#TW11610103	我覺得應該程度很高的學生才看的懂。國中生知道“對應”“唯一”而不必用到圖，我覺得很難懂，慎至學生不知道在寫什麼。
#TW11610112	能由文字系統直接在腦中反應出圖形或意象的度較好的學生。
#TW11610114	對於已經熟悉函數計算及相關概念的學生，在完成學習時，老師用文字給予文字性的結論敘述。因為，對一開始接觸函數的學生立即給予文字表徵方式，會使人無法消化，沒有那種感覺，有死背的氣息存在。
#TW11610120	對文字邏輯較強的同學。ex:國文程度中上的學生。∵將文字轉化為概念是需要語文能力的。
#TW11610127	可做抽象思考的學生。此類學生可將文字敘述自行轉換成圖像式思考。
#TW11610133	高二、三或是具有抽象思考的學生，因為文字表示是函數定義，對學生了解函數意義不大。
#TW11610136	給邏輯概念強的學生。文字的表徵跟口頭的講述類似，學生邏輯不夠好，會連接不上。
#TW11610140	對文字理解、抽象思考能力較佳者，較能讀懂。
#TW11610143	數學程度較好的學生。因為理解力較佳，比較能從文字直接理解它所表達的涵意。
#TW11610149	語文能力高，邏輯性強，先備知識高的學生，因為文字敘述的方式完全抽象，要學生能自己思考，較難以消化。
#TW11610152	語文能力較好的學生。因為數學用語文表示，常常前後相通，對於語文能力不佳的學生，可能會不懂其意思

#TW11610155	國文理解程度較高的學生，且較仔細的學生。避免會錯意以及忽略重點的字句。
#TW11610162	程度較好的學生，因為文字是最難吸收的，且又很抽象。
#TW11710102	理解力強的學生，因為他可把文字轉換為數學符號。
#TW11710107	對文字吸收能力佳的同學，較能領會其表達意義，或是害怕看到數學符號者，較能使其明白（進入狀況）。
#TW11710111	對函數之概念已有大致上的架構，“文字表徵方式”的闡述有助於他對函數有更深一層的了解，例如，“給定”一個 x 值，可得“唯一”之 y 值之概念。
#TW11710112	了解（A）函數機器及（G），知道函數的簡單定義的學生，不然一般學生會無法了解“唯一”的定義。
#TW11810105	理解能力較高層次的學生，因為用文字表徵方式，還需將文字表徵轉換成圖象表徵，才可進行解題，若理解能力較差者，則在轉換過程會有困難。
#TW11810107	具有抽象思考能力或能進行獨立思考的學生，因為文字表徵方式所寫的是較抽象難懂的文字，給予一般學生較無法進行這種和現實較不相關的想像，因此，只有抽象思考能力和進行獨立思考者較好。
#TW11910102	語感強，想像力豐富的學生。 語文能力佳之學生，較不會因為語文能力方面的相關因素，導致誤解題意；而想像力豐富的學生，能直接在腦海中，將題目型式由文字轉譯成符號、影像，深入理解。
#TW11910109	已清楚了解「函數」概念的學生。 學生剛開始認識函數，如果直接講解文字定義，恐怕無法使部份低成就學生理解概念，最好用一些有趣的方式使學生能進一步認識「函數」後，再用文字概念作最後總結。
#TW11910111	數學與語言程度好的學生。因為學生的語文程度不好，會使其無法了解較精簡文字所表徵之意，且會將 x、y 弄混。數學程度不好使其沒興趣了解文字涵義。
#TW11910118	程度較好之學生，因為對於抽象思考較具感覺 語言程度較好之學生，雖數理觀念未必強，但經解釋後會較容易吸收。
#TW11910120	反應比較快的學生，原因通常這類的學生已經真正到達形式運思，所以不是很需要再舉實例給他們看，直接用文字表徵就可以了。
#TW90010106	高中生，已確定達到符號表徵轉換的時期。
#TW90010107	程度好，對數學有興趣的學生。因為「給定」、「唯一」

	是比較數學的用語，一般學生比較難了解。
#TW90110103	按部就班，循序漸進的學生。因為他們可以親自代入不同的數字到式子中，以體會函數對應的關係。
#TW90110105	最適合介紹給數學程度較好，或對數學語言較熟悉的學生，因為文字敘述較抽象，定義也有「唯一」等。
#TW90210103	對數學概念較好的學生且對於文字的理解力較強的學生，因為文字敘述較長且較抽象，對於程度較好的學生而言應該會比較容易接受，但我覺得還是要配合其他表徵方式來加強其觀念。
#TW90210105	資優班的學生，或是已初步了解函數的概念。因為他們可用文字語句和數學符號作轉換，瞭解真正函數的定義。
#TW90310103	對理解能力不強的學生。以其利用文字的記憶加深印象。
#TW90410106	數學理解程度不錯或對於 A.函數機器及 C 式子都很熟悉的學生，會再以文字表徵方式使其函數意義更抽象化。
#TW90410108	語文能力，理解能力好的學生。因為此種學生透過字句就能夠知道所要表達的意思，而不用透過圖像或是式子。
#TW90510102	對於文字描述可了解其中涵義的學生。現今學生的狀況對於閱讀有很大的困難，很多人唸完一個句子卻不懂它要表達的意涵，對句子的描述無法做認知上的聯結，故適合介紹給可了解文字意涵的學生。
#TW90510104	程度較好的學生，讓學生自我根據文字表徵的內容自己去分析。
#TW90610104	程度較好的學生，對於文字描述理解力較高。一般學生對於「表」或「圖」的理解力較好。
#TW90710102	程度較高，能把文字很快轉成數學式子。
#TW90710109	適合給予需要明確定義的學生學習。 他們需要非常明確的文字定義以幫助其學習。
#TW90710110	語文概念較好的學生，因為用文字敘述不夠具體
#TW90810108	適合介紹給有抽象思考力的學生。她（他）們不需藉用圖像就能理解題目意思。
#TW90810109	程度很好的，因為文字敘述很抽象。
#TW90910105	程度較中高的學生，因為許多學生在文字理解方面比較欠缺，所以需要多花一些時間去講解。
#TW90910108	對數學概念清晰，程度中上的學生。因為對程度較差、

	數學概念模糊的學生而言，文字就只是文字，他看完後，可能也無法了解句子所代表的意思，進而無法學習、吸收，但對有概念的學生，文字表徵可幫助他更清楚、明白“函數”的定義。
#TW91010106	理解能力高的學生,因為他們相對的文字理解有關數學概念會比較 OK！

美國職前教師答案

編號	回答
#US10130118	advance students. it is challenging to not to see.
#US10130126	A words representation of a function will most likely assist students whom have higher reading understanding and cognition. If given as an introduction, the statement would probably be beneficial only to the higher achieving students. When used as support to another method, it would be beneficial to all students
#US10220105	I find this representation most suitable for secondary students who have a firm understanding of the concept of a function. I find this to be most appropriate for this group of students because the verbage may cause confusion in younger students.
#US 0230103	This is most suitable for advanced students who are in classes preparing for mathematics courses that include Calculus.
#US 0230113	When first giving the definition so that students are presented with the formal mathematical definition and then are provided with the pictures or other ways to look at functions.
#US10250101	Proficient to advanced level students. Students should be introduced in more concrete ways first, and then they can be introduced to the abstract "words" representation. Teachers should allow students to create their own "words" first from their experience.
#US10250111	Highest level
#US10250129	The "words" description is for an advanced level student. The student must be able to process the actions of two variables in their heads for this to make any sense to them. They would also most likely have to visualize some sort of example in their head or make one up on paper for this work as well. I would consider this to be pretty advanced thinking.
#US10330103	Upper level mathematics. This description is very abstract and students must have a concrete understanding of functions before providing them with abstract

	representations.
#US10520104	sophomore. Freshman students still have the mind set of a junior high school. I have noticed that they can't comprehend what most statements mean. I always have to explain it to them.
#US10620103	I feel an average level of student would be able to understand the "Words" representation of a function to a certain extent. An average level of student would hopefully have built up their math vocabulary and the "Words" representation would be clear to
#US10620107	High School. The terms are used in "logic" which students don't (typically) fully dive into until Geometry. If I were teaching middle school Algebra students, I would still use words, but I would not use the definition above for the reasons previously stated
#US10620111	I think that the "words" representation is more suitable for students who can easily interpret mathematics. It is hard to read words and visualize what they are saying, especially because math can be pretty abstract for students who struggle with the su
#US10720124	I would use the words representation for all levels. How I explain what it means would be different for the levels of understanding.
#US10730102	Any level, because all students need to understand that mathematics is more than just making calculations with numbers. It also involves using written information to make mathematical decisions.
#US10730108	I would say that this would work for 8th grade because that is a definition they can use in high school and it requires them to clearly state why it is a function.
#US10730110	I think it could be used for any level of student given that you aren't relying soley on this representation. If it is just this representation, then possably a higher level mathematics course (algebra II) would be suitable, since they would have addressed it earlier in their math career
#US10730114	More advanced students can visualize what the words represent better than lower level students who may not make the connections to what the x and y values represent.

#US10730122	Advanced level students would be capable of using to words and representing them visually to show they understand
#US10820112	After students have been introduced to functions another way. The wordy definition can be overwhelming to students who are just learning the concept.
#US10920108	Algebra 2
#US11120108	I feel the "words" representation can be beneficial at all levels. It depends on the students' ways of thinking. In general, a higher level student may understand it better, however students who are less visual and more auditory type of learners would benefit from words
#US11130102	Freshman. I think it is good to give actual definitions and than start to break it down into what it means and how the definition makes sense.
#US11130103	Any math level. There is no mathematics vocabulary that needs to be introduced in that representation.
#US11130107	It would be suitable in a higher level class, along with other representations. I would not give this definition and move on without further explanation.
#US11130111	I would say words are most appropriate for students with a higher ability in mathematics because they have the mathematical linguistic knowledge to break down the statement and make sense of what the statement is trying to say.
#US11130115	Higher level, since most of the lower level students I teach have difficulty with reading/comprehending.
#US11130118	It depends on the student. But, generally, a higher level student would learn this best.
#US11130119	higher level such as pre-calculus or calculus.
#US11130122	It is suitable in all levels. In a lower level you would not start off with the words representation, but you could build up to it.
#US11130126	The "Words" representation would work for the average student since most students can understand mathematical concepts when they are represented in a language they are familiar with.
#US11130130	middle to high level

#US11220102	Entry level but with students with a strong command of the language it is presented in.
#US11220103	Algebra one, the students need t learn the words that go with the pictures they see. This is why they have such a hard time at higher level math classes.
#US11420104	I think the "words" representation is most suitable for more advanced students because it is harder to comprehend than a visual representation.
#US11520101	average student; gives a definition or description to it
#US11520105	Advanced because they would have more reasoning skills. Less advanced classes may do better by seeing the actual picture or table.
#US11620102	an honors class, the learning capabilities in an honors class will most likely be more advanced
#US11820101	Students that can learn from lecture, put words into symbolic language and create an equation from it.
#US11820102	The words representation is best suited for students at a higher abstract thinking ability since it is much less concrete than the picture or symbolic representations.
#US11820106	I think that the words should be explored during the normal y=f(x) functions, so that the students can have the words as well as symbolic. Teaching it by itself does not allow students to fully see how the words turn into the symbolic representations.
#US12210114	higher level students
#US12520106	High school- Students should not be introduced to the "words" representation until they have a developing understanding of a function. Students at a beginning level can easily become confused by this.
#US12710113	advanced mathematics students, comfortable with equations and familiar with algebra
#US13020108	I would use that with more advanced students because they will be more well equipped to apply the statement and understand what it means.
#US13020109	It is more suitable for the higher levels. Many of the lower level math students need a visual or more of an explanation then just a definition. Wordy explanations can be confusing. If lower levels are given both the words and

	graphs they may be able to grasp the concept better
#US13020110	yes, because it is one to one and onto. or every input has only one output and every output has an input
#US13030104	10 or 11th grade. The terms/words "one and only one" and "correspondint"
#US13220102	Little above average, because there are no pictorial representations, just words and most students need to visually see math to truly understand
#US13220107	The words representation could be very confusing for most students. Its wording and vocabulary are very technical, and for this reason, I would only use this for students at an advanced level in high school (if at all).
#US13220111	higher level. they can analyze the words and pull the concept from the words. words are more abstract.
#US13220116	I wouldn't say that it is more suitable for one level of student or another, but rather it can be explained while using one of the other methods to introduce the concept. Without something concrete to attach the words to it makes it difficult for this to be conceptualized. If any learners could right away, it would be students with higher level math skills.
#US13220120	Higher level secondary students, because this representation requires the students to take in the words and conceptualize their meaning in their own mind. There is no physical manifestation with this representation to help the students understand more clearly what is going on. This type of thinking would be best for students who can think critically and visualize things at a higher level.
#US13240102	more advanced students because it's more abstract
#US13240107	For a higher level student. Lower level students have a greater difficuly with math in words and they are not sure what to do with it.
#US13420104	Middle to high because they are older and it is less likely to confuse them. They are less likely to need a visual representation.
#US13420112	everyone who can read and comprehend
#US13420116	A standard level Algebra one class can interpret the words. Lower level students, in my experience, are

	much better visual and kinesthetic learners. Auditory is not the way they learn best.
#US13540107	Words seem to be more suitable for older students who have already seen the material before. When introducing it the first time or working with younger students, pictures and visual aids tend to get the point across more.
#US13540124	7th or 8th grade...
#US14020103	I think that this is suitable for all students in that they have to know that each x input can have one, and only one output, otherwise it is not a function. This concept has to be communicated in one way or another when teaching functions.
#US14320106	I believe that it is most suitable for junior level students, cause by that time they can understand the concept. Students in lower grades just don't typically have the mental capability to understand that
#US14420102	I think it is suitable for any level of student. It just depends what type of a learner the student is. If they are more of a visual learner this representation would not be the most suitable.
#US14520104	I believe it is suitable at all levels, but all students should be shown various examples so that all students will different learning styles will be able to conceptualize what functions are.
#US14520108	advanced level because students must know how to write the function from the words. This requires analytical thought.
#US14620102	more advanced
#US14720105	Advanced, because most students need examples.
#US14740104	8th grade and 9th grade
#US14740108	any level student as long as it is accompanied by an example.
#US14820101	This would be appropriate for advanced high school students. I think that this idea can be taught to students without having to use the aforementioned language and students can still gain an understanding of a function. However, at the college level th
#US14820105	mosrt advanced students, because it can be confusing. i

	beleive students need more concrete examples still while they are in high school, visuals and manipulatives
#US15220107	It is suitable for students with a higher level of vocabulary or ones who have previous experience with a lot of word problems. Some students with a lower ability but who are oral learners may benefit from the "Words" representation.
#US15810108	Yes, it gets the students thinking
#US15810112	I think for higher level of students because the higher the graqde the more they can read and understand.
#US15810116	An advanced student because it is difficult for students to understand the word definition. It is to abstract for a student on grade level to process.
#US15810120	This question is confusing to me.
#US15810124	Middle to Higher level students. I think this because visual or kenisthetic methods of teaching usually work better than "words" at the lower level.
#US15810128	A student that understands that something will happen to that number, and that numbers can be represented by numbers.
#US15810136	Do not teach secondary
#US15810144	advanced
#US15810156	advanced
#US15820102	I think that it wold be suitable for your advanced Pre-Algebra or Algebra 1 students in general. But I would be for teaching it earlier
#US31920102	This works well for auditory learners. Student not necessariy at a higher level, just those who learn best by listening to teacher presenting the lesson in a lecture format.
#US32330104	don't know
#US32340110	I would say that it depends on every individual student.
#US32360127	mid to high achievment w' math. The other concepts have the advantage of being concrete with examples (like the table or formula examples) or have the ability to be pictorally representative (like the corresponding numbers/grouping arrows example) older
#US32920104	I think this would be most suitable for a middle level

	student. I think that a beginner would get too confused.
#US32920117	Late Elementary students may have the understanding for the concept above. I believe that not all students will understand the concept but it is important for the advanced students to get itroduced to the concept when they are ready for it.
#US32920121	Advance Algebra
#US32930102	the word representation is for use for more advanced students. If you used this representation for beginning students, I feel they would get lost and not understand functions at all.
#US32930107	Any, because the "words" can be further explained in order to make sense to the students. For example, the teacher could use the vertical line test to help clarify the "words."
#US32930112	I would say 9th-12th grade students. They may have some type of a background with functions, as well as understand the x and y values.
#US35620103	?

附錄二

職前教師 MFE806B 之回答

臺灣職前教師答案

編號	回答
#TW11210101	B.例子輔助文字，容易使學生理解 C.例子說明容易讓學生理解並記住
#TW11210114	B.以數字解釋，以符號表示，學生比較好理解
#TW11310103	B.學生之所以看不懂，乃是文字太過於抽象化，若實際代入數字，比較容易了解意義 C.先給學生例子，再帶著學生作前後比較，很容易使學生了解其中意涵
#TW11410101	A.或許不是不理解這個敘述，而是根本不懂此概念 B.學生容易把敘述和數值連結
#TW11410105	B.可使學生照著數學的方法想並教義推廣所有正值 E.學生將有比較清晰的概念
#TW11410110	B.同下 C.因為學生對實際數字比較有感覺
#TW11410116	B.數字運算比文字更能被學生接受 D.有些學生是因為不清楚語句，而造成閱讀的困難，並不全然因為不了解數學的操作
#TW11410122	B.將符號與文字與數字三者間做連結，有助於學生理解三方面其實代表的是同一個概念
#TW11410125	B.文字敘述時，學生須具備轉換文字→符號的能力，這部分可能某部份學生較差！！ C.把文字和符號作連結，學生比較容易理解
#TW11410129	B.學生習慣數字，先熟悉數字後，會較能接受符號 C.學生對符號會有恐懼症，所以要舉實際的例子來幫助學生學習
#TW11410130	B.不懂的學生是因為對文字敘述有困難，所以可以藉由數字來教學 C.由學生本身的看法來檢測問題所在，並加以改進
#TW11410135	B.用實際例子來套用會比較清楚

	E.學生的國語文能力有時很弱，所以由老師引導，逐步地讓學生解讀，自己得到的比別人給的會多更多
#TW11410143	B.提升將語言一步[2]化為數字或符號的能力，增加語文理解能力與逐步解題能力 C.提升將符號數字化為文字的能力，增加用自己的語文內化數學概念的能力
#TW11410146	B.將抽象的文字具體化，會讓學生較容易理解 D.先讓學生了解每一句話的意義後，再將各句子連結起來，較易逐步理解並融會貫通
#TW11410152	B.可以能夠開出整數的根式舉例，如$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=\sqrt{36}$，學生能計算出數字→$2\times 3=6$便有把握 C.學生容易注意到$2\times 3=6$和$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$之間的關聯性
#TW11410154	B.因為這句十分抽象，直接用實際例子帶入，再導入一般化的觀念較快 C.利用特殊化的例子，導入一般化的觀念，學生眼見為憑容易接受
#TW11410159	B.數值實例對學生而言較親切 D.由於此敘述冗長，故經由老師逐步說明應會有效
#TW11410162	B.以實例帶入敘述，可以讓學生了解敘述中數學名詞的意思 E.現在的國中生有些國文能力較差，如果從頭到尾順序閱讀，會比較有障礙，如果將每一小部份先用懂再加以組合，會比較容易
#TW11410169	B.以對照式的方法，一個文字對一個符號，一個文字對一個動作，比較能讓學生了解 D.學生對於數學的問題不僅僅在於數學面上的不理解，也有可能是在國文文字上的不理解，故選此方法
#TW11410172	B.讓文字與實際數字作結合，加深對文字的了解與印象 E.讓學生一步步接受了解並加深式子的概念
#TW11510106	B.幫數學生對文字敘述與實際運算做連結 E.可使學生一步一步了解運算規則
#TW11510107	D.看不懂敘述可能是句子太複雜，所以拆開說明應該會較容易 E.從其中一部分開始，逐步引導學生，可增加其思考力
#TW11510111	B.直接用數字代入文字中的敘述，能將文字數字化，幫

	助學生好理解吸收。 D.可先解釋前半段的字意代表什麼意思,再解釋後半段的意義，最後兩者作結合後，利用數字再說明一次，讓學生理解。
#TW11510114	A.$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=a\times b=ab$ $(\sqrt{ab})^2=\sqrt{ab}\times\sqrt{ab}=ab$ $\because a$、b 為正數 $\therefore\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ C.一邊計算有敘述的數字，一般非數字輔助 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$
#TW11510123	B.學生對實際的情況了解後比較容易懂原來的敘述 C.同上
#TW11510125	B.C.實際代數字，能快速了解目的，利用例子，讓學生省思這段敘述
#TW11510127	B.學生就是看不懂敘述,所以應由敘述著手說明,但若配合實際數值，那敘述會比較具體好懂
#TW11510134	B.利用符號與數字的比較，加深學生對式子的印象，也讓學生對未知數的概念具體化 C.給學生最直接而且最淺顯易懂的數字,有助於學生理解式子,讓學生熟練數字的運算後再引入公式,使學生的觀念更具體
#TW11510140	B.直接翻譯再用具體直觀的數值方式,國中生較易接受
#TW11510141	C.國中生對於文字與未知數的敘述表達較無法理解,給予真正數字學生反而較能觀察出特性。 D.國中生對於一整串之文字敘述的解讀能力很弱,分部份解說，學生反而較能了解其所欲表達之意義。
#TW11510150	A.先複習先備知識,也讓學生了解平方根乘法與此單元的相關性 B.學生對文字符號不太了解,帶實際數值一步一步做給學生看，以直觀教學的方法使學生了解
#TW11510152	B.可以利用數學符號來輔助了解並加深概念 D.讓學生慢慢了解數學與文字的關係
#TW11510158	B.以實際數據配合文字，可以增加理解力 C.利用要求學生以文字敘述解釋$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$的同時，可以轉換成該文字內容的敘述，會增加理解
#TW11510159	B.文字理解較難，直接看例子會較容易

	C.用例子回頭看敘述會較亦理解
#TW11510165	B.利用實際數值帶給學生看較具體，學生較易明瞭，才不會無法接受 C.直接給例子會讓學生快速明白$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$字面上的意思
#TW11510168	B.同下，且比下更為清楚，因一步一步來較佳 C.實際的數字有助了解
#TW11610105	B.實際的數值代入，較容易了解 C.自己敘述出來，然後再跟書本比較，易了解書本的意義
#TW11610106	B.同下 C.與其抽象的概念，這年紀的學生對實際的數字，接受較大，再念一次，如根號 2 乘根號 3 等於根號 6，加深印象
#TW11610116	B.學生比較容易接受實際數字，對於抽象的符號，比較不能理解 C.學生的敘述可以看出學習的盲點，看看他們是在哪一個環節開始出錯
#TW11610117	B.∵實際的數值對學生較直觀 C.給予學生較直觀的式子學生將會較容易接受
#TW11610125	B.學生對符號通常感覺較弱，帶數字直接計算較容易理解 D.學生通常沒有耐心看完整段文字，所以老師要分段解釋
#TW11610130	B.有實際上的經驗，會更容易了解 C.從例子到敘述，學生會更容易認同
#TW11610134	B.以例子輔助說明，增加學生對觀念的理解和應用 E.由學生分組自行討論，老師從旁引導，讓學生自行發現運算的規則
#TW11610139	B.因為有些學生對數學用文字說明的概念較不懂，所以應該有個式子對應。 E.可先將句子中的物件弄懂，讓學生先有概念後，再去組合整個敘述
#TW11610144	B.文字難懂，代數字較易理解 C.數字接受度較高，再要求寫出文字跟原算則比較，同學應較能接受
#TW11610150	B.給予學生視覺上的感覺，讓他們更清楚地明白內容說

	明 C.既然給予"感覺"便需測試學生是否明白，因此需要學生"依樣畫葫蘆"
#TW11610153	C.有實際數字比較好理解 D.可使學生理解每個部份的意義，知道什麼是$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{ab}$
#TW11610163	A.很多四則運算不懂，是因為根號這個符號根本不懂實際意義 C.學生對於文字的運算很模糊，所以必須讓學生眼見為憑
#TW11710104	B.先以數字不要以符號，學生較易理解，降低難度 C.先以數字不要以符號，學生較易理解後，再慢慢符號化
#TW11710108	B.帶著學生一步步做，學生較容易了解 C.可讓學生理解如何用文字敘述可以使自己看得懂
#TW11710114	B.$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}=\sqrt{6}$C.用例子講解，最容易了解 文字敘述 $2\times 3=6\Rightarrow\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$
#TW11810104	B.用文字對應數字，較能與學生日常思考相似 C.用數字取代文字，易懂，再由數字去理解文字
#TW11810110	B.帶實際的值可讓學生實際的運用更能理解此公式 C.帶值之後學生比較能夠接受，再用文字敘述更讓學生知道這個概念
#TW11810111	B.可能敘述太過抽象而不是數學不懂 C.運簡單例子，引導記憶算則
#TW11810117	B.直接看敘述會讓學生有排斥感，利用實際數值使他們了解，會容易的多 C.結合 B；讓學生用自己的話說出敘述在配合課本的，會使學生印象更深
#TW11910106	B.學生會用模仿的方式學會此模式 D.讓學生更了解對應的關係
#TW11910112	B.帶學生一步步看，會使學生耐心看完 C.利用對應數字講解而非符號，會更能深入了解
#TW11910113	B.利用值代入加深學生印象 C.利用實際的值代入，讓學生自己嘗試，自己體會
#TW11910119	B.以數值法具體數字讓學生能類化

	C.以文字敘述及列舉法讓學生了解
#TW90010102	A.有些學生的學習比較慢 B.有些學生對於抽象的代數會過於恐懼，先用數字做運算，使其了解這句話是對的
#TW90010109	B.學生對數字的接受度比符號高 C.數字比符號容易理解
#TW90010110	D.學生對於文字化成符號的過程較弱，因此學生可能只是看不懂敘述，而非缺乏此概念 E.學生對於文字與符號間的聯結較弱，因此逐步擴展文字與符號間的聯結，有助於概念的理解
#TW90110108	A.敘述方式不是重點，而是運算規則 B.具體而清楚
#TW90210106	B.用好的數字比較好理解，如$\sqrt{4}\times\sqrt{4}=4$ $\sqrt{4\times 4}=4$ D.比較省時，且知道那個地方不能了解
#TW90410101	B.對數值帶入文字敘述中，學生較易連結兩者關係 C.學生對數的運算比文字敘述更容易了解
#TW90410104	B.按照步驟寫出算式，並以數值代入較淺顯易懂 C.直接帶數字做運算，學生較易了解，當學生了解後，由學生自己的文字描述較易了解
#TW90410109	B.實際比抽象易理解 D.按步就班較易理解
#TW90410111	C.用數值式子讓學生比較快了解敘述 D.有可能太長的敘述造成學生理解的困難
#TW90510105	B.學生對於實際數值比較易接受 D.長的句子學生較不易懂，一部分觀念先建立再結合
#TW90510107	B.直接實際的數字比抽象的文字更容易讓學生了解 E.讓學生自行將中文譯成數字及符號，實際做過較不會陌生
#TW90710103	B.學生對於過多符號，均為排斥的念頭，以實際數值帶入，較能引起學習動機 E.讓學生可自動學習，這樣會使學生更能加深印象
#TW90710105	B.符號以數字取代可降低其抽象性，而習慣數字之運算可助於了解抽象之符號算式 C.可以正確使用公式，而不會產生$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$之情形
#TW90810103	A.因為平方根算則，是最基礎的運算原則，必須理解和

	使用這個概念，所以仔細重教可使學生理解 D.由一部分一部分拆解轉換成數學式子,比較起一口氣看完一句長的中文來得清楚易懂
#TW90810104	D.因為學生有可能是句子太長，不懂其中的意思，故拆解此敘述，分別解釋後再整合起來，應可幫助學生理解 E.讓學生自己操作，一步步把算則建構出來，應能幫助學生理解這個敘述
#TW90910102	B.有實際數值帶數字進去運算，會讓學生較易了解$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$的觀念 E.一步一步建立，可以讓學生慢慢架構出$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
#TW90910103	B.數字可以簡化文字敘述的複雜性 C.簡單的運算過程，能讓學生容易找到其規律模式
#TW91010101	B.學生比較可以理解算子的用意 C.透過數字的例子，可以讓學生用模仿的方式學習
#TW91010105	C.可透過更多的例子讓同學模仿練習,熟悉公式的用途 D.太多的敘述學生可能不易消化,若分解成各個學生熟悉的部分在加以串連，比較容易消化

美國職前教師答案

編號	回答
#US10130109	C. Concrete, numberical examples may help students see that the statement is true.　Describing with words provides an opportunity for students to articulate how they are thinking about the statement and verbalize the process used.;;E. Relating the statement to previous knowledge about multiplcation and square roots may help students make connections among different concepts and help them to better understand.
#US10130117	These to activities encourage students to reason through the idea on their own, instead of simply explaining the idea to them.
#US10220109	b. allows the stdents to see why the statement makes sense, giving them a real equation and letting them see how it works.;c.　takes the equation and allows a situation for the student to take responsibility for their learning. They are now explaining to others why it makes sense, why does the statement make sense.　　When students work to explain or teach they can really grasp and understanding by making their own connections to the topic discussed.
#US10230102	I want to know if my students understand what they are doing instead of just doing operations with numbers.
#US10250102	These two examples would be more effective because the students would see the results.　The more the students learn to decompose problems they will learn how to evaluate different expressions and have skills to go about solving different problems.
#US10250106	I choose answer b because students need to see a concrete examples of words in math.　Sometimes the most concrete example you can give them are numbers and symbols. I choose answer c because if students can explain a math concept in their own words I know what they understand about a concept and what they don't.　I would also show some picture representations.
#US10330102	I choose B because a lot of students learn better through

	examples and practice. I choose C because it lets the student be involved in the defining process.
#US10330105	B and D are the most effective because they force the students to examine the relationship presented and to use trial and error to test their theories of why it would or wouldn't work. These strategies use self-discovery as the main tool.
#US10330106	I choose C because it will help model the situation and I chose D because it will help students to better understand the meanings of the words and their relation to one another.
#US10520101	If the students attempt to explain statements in their own words and using numerical examples, they will need to think about what the statements are really saying.
#US10520105	Students may have trouble with textbook representations of numbers and relationships. Usually, looking at the same problem with numbers will help it "click" in a student's head. Asking them to put it in their own words can also help other students who are struggling to understand.
#US10620108	Replacing foreign words with numbers can help turn a odd algorithm into something the students can grasp.;;By starting out small - students can grasp each smaller concept and then string together these concepts to understand the big picture.
#US10720103	These two are the most important because it first and foremost gets the student involved in the meaning of the text and the mathematical relation. They have to dive into the problem to make meaning for themselves.
#US10730105	I find that when I can see an example I can make a small connection to build on it. Once I see the example with integers then variables can be added and taken step by step.
#US10730109	These two are most effective, because it involves the students thinking for themselves. The other choices deal with you, the teacher, telling them what to do or giving them options. By guiding them or giving them little hints, they can work hard to try it out and solve it for themselves.
#US10730113	Option B still promotes student reading and analysis, but it gives them a more concrete way to think about the

	algorithm. Specific examples help illustrate the way the algorithm works, but still working with the mathematical definition helps students move from concrete examples to generalizations.;Option C is a simpler variation of option B. Rather than working with the current complex statement, students can create their own definitions based on what they observe with concrete numerical expressions.
#US10730121	C practices the students writing skills and E asks them to break them down and put them into their own words which will help them learn it themselves.
#US10730125	I think that I would combine the above statements. I would substitute numerical values and then walk the class through an example of the algorithm. I think that these are most effective because the "theory" of the algortithm is removed. Students prefer concrete examples so that they can walk through the algorithm.
#US10820119	Both signify the importance of each characteristic and what the stand for individually.
#US10920101	Many middle school students have a hard time grasping the concept of variables. By showing multiple examples and having them substitute actual values themselves, they will understand variables and the concept of "algorithm for square-root multiplication' better.
#US10920105	Help the student break down the information and process it in pieces rather than give them all the information at once. Then give them examples that will help them understand the concept.
#US10920109	I would start with part c. I think it is effective because it provides the students an example using concrete terms so they can translate the words into the math. Then I would have them do b. This is very similar to c but it has the students make the example. I think this is effective because it has the students create an example that helps them understand the algorithm and keeps it in concrete terms for them.
#US11120107	I am not sure
#US11120111	I feel that both b and d would be the most effective teaching methods because 1 it provides modeling for the

	students and 2 it correlates the mathematical statements into terms that can be more easily understood by the students.
#US11120115	Giving students a chance to explain mathematical equations in words provides a chance for them to apply their language to the sometimes unclear language of math.
#US11120126	Often students, particularly in the middle level, struggle with math because it seems to abstract. Using actual values can make an abstract concept feel more concrete for the students to visualize and manipulate.
#US11120133	I believe that it is very beneficial for the students to substitute actual vales in and writing out steps. It helps them see an example to the statement. I also think it is helpful to break the statement into parts so they can focus on the understanding of smaller parts before they decipher the meaning behind the whole statement.
#US11130106	The reason I chose these statements is because I like guided discovery for my students. I feel both of these will accomplish that.
#US11130110	I would use "b" because it breaks the concept down as well as allows the students to discover the use of the concept on their own. ;I would use "d" because this links to the literary portion of math. It would be beneficial for the students to speak through the concept to be able to break it down and understand it.
#US11130114	I feel these put the statement into practice and the students will see how it is applied and gain a better understanding.
#US11130121	Students need to work with examples to better understand the major concepts.
#US11130125	I think that those two would be most effective because you are having the students describe and work with the concept. I think that the more the students can work with it themselves, the more they will own it. It is easy to watch someone else do something on the board, but to work through it themselves will allow them to grasp a better understanding.
#US11130128	Examples encourage students to develop a relational understanding.

#US11410131	Students can break down statement and focus on problem one part at a time.
#US11520102	These are the most effective because it takes the students step by step in solving the problem.
#US11520106	I chose these two because it helps the students think for themselves and get through something they didnt understand. In these two I dont just give them the information, I let them analyze the given algorithm for themselves.
#US11520109	In b. the step by step writing of the correspondence between the statement and the math form will enable students to make the connect with something they are familiar with to something that is unfamiliar.;In d. simply braking the statement into parts
#US11620101	Giving kids more examples, especially allowing them to create the examples and work forward works best for overall understanding.
#US11720117	Option B is most effective because this allows them to link the definition or algorithm to the symbolic representation. Option C is much like option B. Doing both of these will help students develop the concept of the algorithm.
#US11720130	b. It is easier for students to go from concrete to abstract than trying to teach them only the abstract.;c. Students learn better by discovering and verbalizing their discoveries
#US11730117	One is teacher-lead, the other is student-lead. Dependding on your class situation, either would provide a nice starting place for an explanation.
#US11820107	They allow students to explore and work through it own there own conceptual and procedural. Students will be able to see and understand the method better.
#US12120101	Each of these activities utilize examples, which are very effective in math. The more tangible I can make a topic to my students, the more likely they are to understand them.
#US12120105	I would like for my students to be able to learn to understand what the statment means and then be able to properly utilize the statement.
#US12210101	b. gives the students a chance to develop their own

	understanding with examples of their choice. They can connect the statement to the mathematical representation as they go. ;d. allows the students to look at the complex statement in smaller parts that may be less confusing. Also, an explanation of the meaning may allow for better comprehension based on number sense.
#US12240102	I chose those two because can understand actual numbers and situations quicker than variables.
#US12520101	This way I will be able to take them step by step through the statement so they will be able to understand it.
#US12530103	If students have difficulty understanding abstract concepts, I find that those students learn well through concrete examples.
#US12710128	B. By substituting values for the variables, students can see the concept in context. Using numbers helps to show how one expression can equal another.;;D. Some students may understand the concept in context but cannot grasp what the statement is saying. By breaking the statement into easier to understand pieces, students can gain an understanding one bit at a time.
#US12730101	The original statement was incredibly dependent on mathematical jargon. By guiding students through the jargon, giving concrete examples of the meaning of the statement, they can build internal connections between the words and their meaning in math symbols. ;By having students then describe the algorithm in their own words, they are forced to build a personal understanding of the process, which helps them to internalize an intuitive understanding of the process.
#US12820102	Variables are confusing. Use them last
#US12820105	Students need to see examples of concepts being taught, and be able to discover there own conclusions. Afterwards, be able to explain it back to you, thus illustrating knowledge.
#US12820110	by working with actual numbers students can clearly see what operations are taking place, and also discover the validity of the algorithm
#US12820114	Choice b is helpful because it teaches students to extract

	meaning from statements and represent it in a mathematical language. On the other hand choice c shows the opposite...how we can form a statement from a mathematical expression or equation. By practicing both ways students will assimilate better both the mathematical representation and the meaning of the statemnt involved.
#US12820118	The two methods allows students to have a greater understanding because instead of dealing with the abstract they can use application nature. Students get confused by using variable as compared to numerical values that already have real known solutions.
#US13030103	Just as you would break down a word problem into easier to understand pieces, I would break down the statement into parts by explaining each part (d) or by having them rewrite it as numbers (b).
#US13220101	C. Giving the students a concrete example that they can mathematically verify and asking them to explain it in words will force the students to make the link they were missing. Its like working backwards from an example, to an algorithm, to words.;E. Instead of tackling the entire statement at once, by gradually expanding on the statement as students understand, the students will build upon their understanding at each step. If the students are not understanding one step, as a teacher you know you can not move on and you may correct their misunderstanding.
#US13220106	C. Since the statement is unclear, it would be good to give the students a concrete example. It would also be good to have a student explain rather than myself.;D. b and e have the students try again to interpret the statement themselves, which is not a good idea for such an unclear statement. Rather than just reaching it over and over again, the lost solution of those left is to break down the statement and better explain what it means.
#US13220110	Step by step representation which ties the mathematical concepts along with critical reading of the algorithm are important skills for the students to learn. Letter c will be effective because it involves the students in thinking and explaining, rather tahn restating the statement for them

#US13220115	These two options address multiple types of learners: visual, auditory, interpersonal, and intrapersonal. This helps suit the interests and needs of a variety of personalities in a classroom.
#US13220119	I believe that typical students learn best by seeing examples of the actual statements. In choosing option (c), the usefulness of the statement is very clear. By choosing option (b), the students can see how they can just plug values in to the statement, and then it starts to make sense when simplified.
#US13420101	c. Since the students understand how to find the product using the symbolic representation, they must now use their own knowledge to create a description in words. This enforces writing across the curriculum and it allows students to explain their thinking. The students rewrote the statement so that they understand it instead of the teacher creating another statement they don't understand.;b. It is important for students to be able to break down definitions to understand what it is saying. This reinforces the use of math vocabulary words. It shows the connections to what they know so that they can learn verbal representation.
#US13420105	These methods both help the students to read a mathematical text. They will need to know how to do this when you, the teacher, are no longer guiding them.
#US13420109	According to the previous question, the students are comfortable with the expression. Answer C allows the students to use prior knowledge to relate the statement to concepts they are familiar with. Students will better understand something in their own words.;Answer D addresses the lengthy statement in smaller individual parts that helps explain each side of the equation. Again, students can take the statement and relate it to the expression they are comfortable with.
#US13420113	students always seem to be confused when variables are involves, so taking the variable out and substituting real numbers into the equation will help them understand.
#US13420117	having the students practice understanding the concept by substituting values they choose is helpful for the students

	because they like to see actual values to help verify themselves that it is true. Once verifying that it is true for several values, then they can practice learning the algorithm given any two values a and b, and taking it one step at a time helps the students gain the information.
#US13540102	Showing students examples with numbers means more to them than using letters.
#US13620103	For b, I, with the last question, showed how I would guide students to write out, step by stwp, the mathematical representations of the statement using actual numbers for the stated 'two positive numbers';;For d, I would slowly read the wording, explaining product means the multiplications of..., if they already did not know, then read the entire 1st part:;"The product of the square roots of two positive numbers...".;I would then say this product,;with first letting one positive integer = x & the other = y, of their square roots is:; sqrt(x)Xsqrt(y)=x^(1/2)Xy^(1/2);(first pointing out sqrt(x)=x^(1/2) and sqrt(y)=y^(1/2), individually);Then, I would read the 2nd part:; "...is equal to the square root of the product (multiplication of) of two positive numbers."; I would translate:; = sqrt(xXy)=(xXy)^(1/2);Then, I would tell them this (1/2), square root, is akin to, in driving, the reverse gear to drive, and squaring is in driving is akin to drive.;i.e.: (x^1/2)^2=x and (sqrt(x))^2=x;Applying this rule, they may begin to see the idea of the statement when I perform the following to it's algebraic equvalent:;(1st part) [(x)^(1/2)X(y)]^(1/2)=;(2nd part [(xXy)^(1/2)]^2;I tell them we can do this simply b/c the statement says x^(1/2)Xy^(1/2)=; (xXy)^(1/2);Since we are squaring both sides, the statement remains true.; Then [(x)^(1/2)X(y)]^(1/2)=; [(xXy)^(1/2)]^2;becomes:;(1st part(statement));(x^(1/2)Xy^(1/2))X(x^(1/2)Xy^(1/2))=;(2nd part);[(xXy)^(1/2)]^2;(1st part);x^(1/2)Xx^(1/2)Xy^(1/2)Xy^(1/2)-->;x^((1/2)+(1/2))Xy^((1/2)+(1/2))-->;x^(1)Xy^(1)=xXy;Since I left the right hand side alone not to overly confuse the students,;I know show them how to simplify the right hand side now:; [(xXy)^(1/2)]^2-->(xXy)^((1/2)X2)--> (xXy)^(1)-->xXy; Thus xXy=xXy!;And reversing, sqrt(xXy)=sqrt(xXy) (original right hand side, emphasising with last application the reverse operations performed, to both sides, does not

	change the equality of the algebraic and the original worded statement.;Using actual numbers, like x=2 and y=2 or x=2 and y=3 and performing these reverse operations would reinforce the concept.
#US13540108	The theory or concept isn't always understood until examples are shown to the students.;The concept as a whole can be very intimidating to students. So taking it apart and showing that working through the problem piece by piece is from previous taught work.
#US13540129	They would be most effective because any language issues would be cleared up and there would be concrete examples for the abstract explanation.
#US14210113	I think that students need to understand one concept before they can understand another. Therefore, in order to effectively teach each child in your classroom, problems need to be broken down piece by piece.
#US14520105	yeah
#US14520109	B would be effective because you are breaking the statement down and showing them what it actually means. C would be effective because the students would have to think of how they would state the algorithm. It would helped them to remember better.
#US14620105	I believe that when the students look at the statement and actually substitute in number to help them see whats going on helps them make the connection. Then after they are done doing that i believe going back and decomposing the statement helps them then see what they are missing.
#US14720102	It is important for students to see how algorithms work with real examples. It is equally as important to have students explain algorithms in their own words so they have a deeper understanding of the topic.;It is important for students to be able to break apart statements and make sense of it so they can do the same with other algorithms of statements they may come across in the future.
#US14720104	Makes students think beyond the teacher just telling them that is how it is.
#US14820102	When students do not understand what the statement means, it would be helpful to explain it by using the mathematical representation and write it in their own

	words.
#US15220102	By substituting numbers, the students still might not understand the actual statement. If they are able to break it down and figure out what each word means, hopefully they will be begin to learn the languange.
#US15520103	I feel like students would relate to these the easiest.
#US15810103	showing the students each step and putting in real values shows them how it actually works. they need to see it. It also helps to break down the statement and make sure that they understand both parts before they will understand the entire statement.
#US15810147	Helping them break up the question and take one part at a time will help them come up with an answer
#US15810160	By replacing the values with actual numbers the students will be able to see how they relate. ;When you break a problem into pieces students can take each part and then compare.
#US31920105	Math is tend to become obtuse in formal english. Students should be able to translate what they read into symbolic mathematical notation.
#US32320109	I think it would be easier for the students to parts of the equations plus it's less overwhelming.
#US32350102	I feel that these are the most effective as they require the students to evalaute the statements to discover what they mean instead of just trying to show them myself. These are much more constructivist approaches.
#US32360112	i don't understand
#US32360126	Breaking down the statment and using real numbers makes the problem tangible to the students. By using a couple of different examples with different numbers and getting similar outcomes, it will be easier for the students to get a grasp of what the statement is really saying.
#US32920108	If students do not understand I feel that when to give them step by step representation of the statement and they follow each step for each problem they will evenually understand the concept.;;I feel that it is best to start slow and add on to each step. You have to understand each step and why you are doing them to fully understand the concept.

#US32920112	Because students need extra practice. Also, by breaking it up into steps the students are not overwhelmed and can get comfortable with certain portions before overloading them.
#US32930111	The students will be able to understand how the numerical values conincide with the variables in the statement. If the equations are broken into parts, the students will be able to understand them better and than be able to put them back together like a puzzle.
#US35620102	The reason I chose these two is beacuse it allows the students the opportunity to see real examples which will allow them to better grasp how the concept works.

附錄三

職前教師 MFE806A 之回答

臺灣職前教師答案

編號	回答
#TW11210109	兩個正數的正方根會等於兩數相乘的正平方根
#TW11210114	如果 a,b 為正數，a 的平方根乘以 b 的平方根等於 axb 的平方根
#TW11310103	現在有兩個正數，先將兩個正數分別取平方根之後，再將兩正數的平方根相乘；接著，先將兩正數相乘後，再取平方根，比較前後兩者，便可發現兩者是相等的！
#TW11410101	一個正數開根號乘以另一個正數開根號，會等於這二個正數相乘後，再開根號
#TW11410105	兩個正數的正平方根相乘之後的乘積等於這兩個正數相乘後之乘積的正平方根
#TW11410110	兩個正數分別的正平方根相乘的乘積，與兩個正數先乘積後再的正平方根相同
#TW11410116	兩個正數分別取正平方根之後相乘，和先將兩正數相乘再取正平方根的結果相同
#TW11410122	兩個大於零的數開平方後相乘，會等於這兩個數先相乘再開平方
#TW11410125	有二個正數，其正平方根的乘積會等於其乘積的正平方根
#TW11410129	兩正數的正平方根相積，與兩正數相乘之後再開平方相同
#TW11410130	兩正數先開根號再相乘等於先相乘再開根號
#TW11410135	「兩個正數的正平方根乘積」會等於「兩個正數乘積的正平方根」
#TW11410143	現在有 2 個正數，各有 1 各小正平方根，而且 2 個正數乘積會有 1 個大正平方根，那麼，前面 2 個小正平方根相乘會等於後面那 1 個大正平方根
#TW11410146	一正數的正平方根與另一正數的正平方根的乘積，與兩

	正數的乘積的正平方根相同
#TW11410152	根號相乘即是數字乘起來補上根號
#TW11410154	將兩個正數開平方，取正的平方根，將這兩個數的平方根相乘起來，另外直接把剛才那兩個正數相乘，再開平方，取正平方根，你會發現兩個方法算出來的都一模一樣
#TW11410159	兩正數開根號相乘，可直接合併運算
#TW11410162	兩個正數開根號以後再相乘，等於兩個正數相乘以後再開根號
#TW11410169	一個開根號的數與另一個開根號的相乘，其結果會等於這兩數先相乘再開根號
#TW11410172	兩個正數開根號後相乘，與此兩個正數先相乘後開根號的值會相等
#TW11510106	給定兩正數，則此兩正數平方根之乘積等於其相乘之平方根
#TW11510107	兩個正數的正平方根乘積會等於兩個正數乘積的正平方根
#TW11510111	有兩個大於零的整數相乘之後的正平方根，與兩個正平方根相乘的答案相等
#TW11510114	a 有帶帽子，b 有帶帽子 當 a 和 b 兩個想要連在一起，就只能擁有一個帽子
#TW11510123	兩正數的平方根相乘等於相乘的平方根
#TW11510125	一正數之正平方根與另一正數之正平方根相乘等於此兩正數相乘之值的正平方根
#TW11510127	兩個正數的正平方根乘積會等於兩個正數先相乘再開出（取）正平方根
#TW11510134	兩個正數的正平方根相乘會等於 2 個正數相乘的正平方根
#TW11510140	兩正數平方根相乘，為內部相乘再開根號
#TW11510141	正整數的正平方根與另一正整數的正平方根之乘積等於此二正整數乘積的正平方根
#TW11510150	兩的正數的正平方根要相乘時，先將二正數相乘，再解相乘後的正平方根
#TW11510152	2 個帶有根號的正數相乘，與 2 正數相乘加根號　其值相同
#TW11510158	一正數的正平方根與另一正數的正平方根相乘，會等於該兩正數的正平方根
#TW11510159	開根號的兩個數相乘等於相乘後再開根號

#TW11510165	二個數分別開根號再相乘等於二個數先相乘再開根號
#TW11510168	一個開根號的正數，乘以另 1 個開根號的正數的積，和 2 個正數乘起來再開根號相同
#TW11610105	兩個正數，甲、乙各別開平方根，然後相乘會跟甲乙相乘後再開平方根一樣的值
#TW11610106	a、b 皆為正數，根號 a 乘根號 b 等於根號 ab
#TW11610117	兩正數的正平方根相乘等於這兩個正數乘積的正平方根
#TW11610125	兩個正數先取正平方根後再相乘，會和兩正數先相乘再開正平方根
#TW11610130	兩個正數的正平方根相乘會等於兩個正數相乘的正平方根
#TW11610134	乘號表示「同時」 二個人分別乘不同的交通工具同時要去台北，和二人同時乘同一輛車一起去台北，其目的都是一樣的
#TW11610139	兩個正數的正平方根乘積會等於兩個正數乘積後再加上根號
#TW11610144	兩個正數的正平方根相乘等於兩個正數相乘後的正平方根
#TW11610150	各別數字開根號相乘等於兩數先相乘再開根號
#TW11610158	根號的運算是可以拆開的
#TW11610163	用面積概念去解釋 $\boxed{4}$ $\boxed{16}$ $\boxed{4\times16}$ ↓ ↓ ↓ 邊長$\sqrt{4}$ 邊長$\sqrt{16}$ 邊長$\sqrt{4\times16}$
#TW11710104	兩個正數的平方根乘積等於兩正數開平方根
#TW11710108	兩個正平方根相乘等於兩數相乘再開方
#TW11710114	兩個正的根號相乘，其實就是根號裡面的兩數相乘然後再開根號
#TW11810104	兩數的平方根相乘會與兩數分別相乘再開平方根的 Ans 相同
#TW11810110	兩個大於零的數，開根號相乘的結果會等於兩個數相乘再開根號
#TW11810111	兩個正整數開平方根後相乘與先將兩個正整數相乘後再開平方根的結果會相同
#TW11910106	兩個正整數平方根相乘等於兩個正整數相乘再開根號

#TW11910112	平方根的乘積會等於根號內的數字相乘後開根號
#TW11910113	先開根號再相乘等於先相乘再開根號
#TW11910119	根號一乘根號二等於根號二 根號二乘根號三等於根號六 ⋮ 列舉法
#TW90010102	該分則分，該合則合，要配合手勢
#TW90010109	兩個正數先開根號後再相乘會等於兩個正數先相乘再開根號
#TW90010110	兩數值分別開根後相乘，與兩數值相乘後再開根號，其值相等
#TW90110108	兩個正數的正平方根相乘起來，會等於兩個正數相乘起來的正平方根
#TW90410101	若 a, b 為大於零的數，其平方根相乘，會等於 a, b 兩數相乘的平方根
#TW90410104	2 個正數平方根相乘等於 2 數相乘的正平方根
#TW90410109	兩數的平方根相乘等於兩數先相乘再取正平方根
#TW90410111	一個正數的正平方根乘以另一個正數的正平方根會等於這兩個正數先相乘再取正平方根
#TW90510105	兩個正數開根號相乘等於兩個正數相乘開根號
#TW90510107	兩個正數開根號皆取正後相乘會等於兩個正數先相乘後開根號取正
#TW90710103	將根號視為一不同的區域，但仍符合數乘法的交換、結合、分配律，將根號內的數值相乘，因為在不同區域內，所以得始終將它規劃在內
#TW90710105	平方根符號可以掛到相乘的每個正數上
#TW90810103	兩個正整數分別開根號後相乘，等於相乘後再開根號
#TW90810104	兩正數的平方根相乘可直接在根號中合併相乘
#TW90910102	有一對情侶本來分開住的，有一天他們結婚，也因些住在一起了。 <根號比喻成房子>
#TW90910103	在兩個平方根相乘等於數字相乘再開平方
#TW90910105	（a 的平方根）×（b 的平方根）＝（a×b 的平方根）
#TW91010101	將兩正數分別平方根後再相乘，會與兩正數先相乘後再平方根，其結果相同

美國職前教師答案

編號	回答
#US10130109	Multiplying the positive square root of two positive numbers a and b is equal to the multiplication of the two positive numbers and then taking the square root.
#US10130117	If a and b are positive numbers, then square root of a times the square root of b is equal to the square root of the product ab.
#US10220109	The square root of every positive number is positive. Therefore, when multplying the square root of one positive number by the square root of another positive number you will find the answer to be the same as multiplying the two positive numbers first and then finding the square root of the product.
#US10230102	Pick two numbers greater than zero and square root them each.　Multiply them together and you will get a number. That number will be equal to the product of the two numbers.
#US10250102	When you multiply the value of two square roots a and b , the resulting product , c, is equal to multiplying a x b , then taking the square root of the product c.;Therefore, square root of a times square root of b is equal to the square root of a times b
#US10250106	When positive square roots are multiplied the product is a square root of the factors.
#US10330102	Given two positive numbers, the product of their square roots equals the square root of their product.
#US10330105	If a and b are two positive numbers, then the square root of ab is equal to the square root of a times the square root of b
#US10330106	The product of the positive square roots of two positive numbers is equal to the positive square root of the product of the two positive numbers
#US10520101	The square root of a positive number "a" multiplied by the square root of a second positive number "b" is equal to the square root of the product of the two numbers.
#US10520105	For two positive numbers a and b, sqrt(a)*sqrt(b) =

	sqrt(ab). For example, sqrt(2)*sqrt(3) = sqrt(6). Use your calculator to check this result.
#US10620108	A positive square root times another positive square root is equal to the square root of two positive numbers
#US10720103	The product of the square roots of two numbers is equal to the square root of the product of the two positive numbers.
#US10730105	If a>0 and b>o, then sqrt(a)*sqrt(b)=sqrt(a*b) or sqrt(ab)
#US10730109	If you first take the square root of two positive numbers and then multiply the positive solutions together, it is the same as taking those same two positive numbers and first multiplying them together and then taking their positive square root.
#US10730113	To find the product of the square roots of two positive numbers, you can multiply the two positive numbers and take the square root of their product.
#US10730121	If you have two positive numbers, a and b, and you take the square root of each and then multiply them together, it is equal to the square root of a times b.
#US10730125	If you have two positive numbers a and b, then the square root of a times the square root of b is the square root of a times b.
#US10820119	The product of the positive square roots of two positive numbers are equal to the both the positive square root of the product and the two positive numbers.
#US10920101	If we multiply the square roots of two positive numbers we will get the square root of the two positive numbers multiplied by eachother.
#US10920105	The square root of the first positive number multiplied by the square root of the second positive number equals the square root of the product of the first number multiplied by the second number
#US10920109	Multiplying the square roots of two positive numbers is the same as the square root of the two numbers multiplied together.
#US11120107	I am not sure
#US11120111	The algorithm for square-root multiplication states that when a and b are both great than 0, then following is true:

	the square root of a multiplied by the square root of b can be rewritten as the square root of a multiplied by b. For example, the square root of 3 multiplied by the square root of 4 is equivalent to the square root of 12
#US11120115	(sq)a +(sq)b = (sq) (a+b)
#US11120126	The square root of one number multiplied by the square root of another number can be found by multiplying the two numbers together and taking the square root of this product.
#US11120133	When you multiply the square root of two postive numbers together, it will equal the square root of those two positive number multiplied together. For example, the square root of 9 is 3 and the square root of 16 is 4. 3 mulitiplied by 4 is 12. This answer is the same answer as multiplying 9 and 16 which is 144 and taking the square root which is 12.
#US11130106	The product of two square roots is the square root of the two positive numbers' product.
#US11130110	First, we cannot have a negative under the square root, otherwise we'll end up with a non-real number. So if we multiply the squhare root of a number by the square root of another number, it is the same as saying the square root of the multiplication of both numbers
#US11130114	If the square roots of two numbers are multiplies together then this would be the same as the square root of the product of the two numbers.
#US11130121	A and B > 0, such that the square root of A times the square root of B is equal to the square root of the quantity A times B.
#US11130125	If you have two positive square roots you can multiply the two numbers under the radicands and leave their product under a radicand.
#US11130128	In order to multiply two different square roots (of positive numbers), you can multiply them under one square root symbol.
#US11410127	When you multiply two square roots the answer equals the square root of the product.
#US11410131	Positve square roots of two postive number = Positive

	square roots of the product to two postive numbers
#US11520102	The square root of 'a' times the square root of 'b' is the same as saying the square root of 'a'x'b', only if 'a' and 'b' is greater (larger) than zero.
#US11520106	When you multiply the square roots of two positive numbers together you get the square root of those two positive numbers multiplied together.
#US11520109	If A and B are greater than zero then the square root of A times the square root of B will be equalled to the square root of A times B.
#US11620101	If we multiply two numbers and take their square root, that would be the same as taking the square root of two numbers and multiplying those two values together.
#US11720117	When all numbers are positive, and a square root number is multiplied by another square root number, the product is equal to the square root of the product of the two numbers.
#US11720130	Two positive square roots multiplied together , equal the square root of their product.
#US11730117	The product of any two individual, non-zero numbers' square roots is equivalent to the square root of the product of the numbers.
#US11820107	The product of two postive square roots sqroot (x) * sqroot (y) is equal to the positive square root of the prouct of the two positive numbers sqroot (xy).
#US12120101	When multiplying positive square roots, the product of two square roots is the same as the square root of the product.
#US12120105	A and B are positive numbers. The square root of A times the square root of B are equal to the square root of A times B.
#US12210101	If you have square roots of two positive numbers, the product of the square roots will be equal to the square root of the products of the two original numbers.
#US12240102	If A and B > 0, /A/B= /AB;(/)= square root
#US12520101	The product of the square roots of two positive numbers is equal to the product of the square root of the product of the two positive numbers.

#US12530103	Compute the positive square roots of two positive numbers. Find their product (answer 1). Then, compute the product of the two original numbers and find its positive square root (answer 2). These two products will be equal (answer 1 = answer 2).
#US12710128	When two numbers are both greater than zero, the product of the square roots of each number (finding square roots then multiplying) is the same as the square root of the product of the two numbers (multiplying the number, then finding the square root).
#US12730101	Consider the positive square roots of two positive numbers M and N. The square root of M multiplied by the square root of N is equal to the square root of MN.
#US12820102	A and B confuse people, use numbers. Square root of 4 times square root of 25 equals square root of 100
#US12820105	The product of two positive square roots is equal to the square root of those two numbers
#US12820110	multiplying the positive square roots of two positive numbers is the same as multiplying the two positive numbers and taking their positive square root
#US12820114	The product of the square root of a positive number with the square root of another positive number is equal to the square root of the product of these two numbers.
#US12820118	Use perfect squares to demonstrate the concept. square root of 4 time square root of 9; If we get the square root of each number and get their product we get 6. If we multiply 4 and 9 and then the square root of 36 we also get 6. Hence the concept that the product of the square root of a and square root of b is the same as square root of ab, for ab>0.
#US13030103	If you take the positive square root of two positive numbers, a and b, and multiply them, the result is equal to the square root of ab
#US13220101	Given that a and b are positive numbers, the product of the square root of a and the square root of b equals the square root of a times b.
#US13220106	The product of the square roots of two positive numbers is equal to the square root of the product of the two

	numbers.
#US13220110	When we multiply the square root of a positive number by the square root of another positive number, we get the square root of the product of the two numbers.
#US13220115	let a and b be positive numbers. The square root (a) x square root (b) = the square root (ab). In short, the square root of a x square root of b is the same as the square root of their product.
#US13220119	If a and b are both positive, then the two following expressions are equal to each other:;a) The product of the square root of a and the square root and b.;b) The square root of ab.
#US13420101	For a product of square roots with numbers, a and b, that are greater than zero, the following algorithm for square-root multiplication applies: The answer, called a product, to the multiplication of two square roots, sqrt a and sqrt b, is the square root of the multiplication of the two numbers a and b, thus sqrt ab.
#US13420105	A square root of a number times a square root of another number equals the square root of the original numbers multiplied
#US13420109	you start with two square roots that have positive answers.;When you multiply these two individual square roots the answer is one square root with the two numbers multiplied together underneath it. ;The answer of this square root must also be positive
#US13420113	The positive square root of a number multiplied by a the positive square root of a second number is equal to mutliplying the two numbers then taking the positive square root of the answer.
#US13420117	if given two positive numbers a and b, then the positive root of a multiplied by the positive root of b is equal to the positive root of a multiplied by b.
#US13540102	If a and b are greater than zero (so there isn't a negative under the radical) and radical a x radical b = radical ab. You can multiply a x b and put their product under the radical
#US13540108	a^1/2 x b^(1/2) = (ab)^(1/2)

#US13540129	As long as neither of the numbers is not a negative number or 0, the product of two separate square roots is the same as if the two numbers were multiplied and then the square root was taken.
#US13620103	Let's use a very simple example using actual positive numbers. ;;Let 4= the 1st positive number,;and let 4= again, the 2nd positive number;;then sqrt(4)*sqrt(4)=sqrt(4*4);which is: 2*2=sqrt(16); Does the left hand side equal the right hand side?; 2*2=4 and sqrt(16)=4; Therefore, the product of the positve squaret roots of two positive numbers, 2 and 2, or sqrt(2)* sqrt(2)=4;indeed is equal to the positive square root of the product of the two positive numbers sqrt(4*4)=4!;This rule applies when the two positive integers are the same and different.
#US14520105	yeah
#US14520109	Muliplying two square roots of two numbers is the same as taking the square root of the two numbers mulitplied
#US14620105	The product of the positive square roots of a and b, where a and b are positive numbers, is equal to the positive square root of the product of a and b.
#US14720102	When you multiply two positive square roots, you get the same answer if you multiply the two positive numbers, then take the positive square root.
#US14720104	When you take the product of two positive square roots it is equal to the square root of the product of those two numbers
#US14820102	When two numbers are positive, the product of the square roots of each number is equal to the square root of the product of the numbers.
#US15220102	The square root of a times the square root of b is equal to the square root of a times b, where a and b must be greater than zero.
#US15520103	The square root of two positive numbers multiplied by each other will be equal to the two numbers multiplied by eachother and the square root taken after.
#US15810103	If you took the square roots of two positive numbers and multiplied them together you would get the same product

	as multiplying the numbers together and then getting the square root.
#US15810127	I don't know I am not math minded.
#US15810135	a and b Greather than 0;times the square root of a by the square root of b
#US15810147	The result of the positive square roots of two positive numbers is equal to the positive square root of the result of two positive numbers.
#US15810160	The product is the answer when you multiply two postitive numbers together. a and b will be greater than 0. I would then give the students an example: a=16 b=36 sq root of 16=4 sq.root of 36 =6 6x4=24 which is greater than 0
#US31920105	A square root times a square root equals the same two numbers multiplied inside a square root, provided we only consider the postive square root and both numbers are positive.
#US32320109	IF you multiple the square roots of two positive numbers (greater than 0) then the answer is equal to the squar root of the same numbers multiplied together then sqaure rooted.
#US32350102	If a and b are positive numbers than the square root of a times the square root of b is equal to the square root of the quantity a times b.
#US32360112	i have no idea
#US32360126	If you multiply the positive square roots of 2 positive numbers it will equal the same as the positive square root of the product of the two positive numbers.
#US32920108	Not sure
#US32920112	a is great than 0 and b is great than 0 therefore the square root of a times b is great than zero
#US32930111	2x2 =square root of 4x4
#US35620102	If I take two numbers, take the square root of both of them, and multiply them together, it is the same as multiplying two numbers togeth first and then taking the square root of the new number of product.